

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DOMINIQUE BAKRY

## Une remarque sur les inégalités de Littlewood-Paley sous l'hypothèse $\Gamma_2 \geq 0$

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 19 (1985), p. 175

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1985\\_\\_19\\_\\_175\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__175_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE REMARQUE SUR LES INEGALITES DE LITTLEWOOD-PALEY  
 SOUS L'HYPOTHESE  $\Gamma_{2 \geq 0}$   
 par Dominique Bakry

Cette remarque fait suite à l'exposé précédent, auquel nous renvoyons pour les notations et les hypothèses. Il s'agit de préciser dans ce cadre les inégalités de Littlewood-Paley-Stein obtenues par Meyer dans [5]. Rappelons de quoi il retourne. Etant donnée une fonction  $f$  sans partie invariante, que nous supposons dans  $\mathcal{D}$  pour simplifier, posons

$$f(x,t) = Q_t f(x), \quad g^{\rightarrow}(x,t) = \left( \frac{d}{dt} f(x,t) \right)^2, \quad g^{\uparrow}(x,t) = \Gamma(Q_t f, Q_t f)(x)$$

$$g = g^{\rightarrow} + g^{\uparrow}.$$

On introduit ensuite les "fonctions de Littlewood-Paley"

$$G_f(x) = \left( \int_0^{\infty} t g(x,t) dt \right)^{1/2} \quad (\text{de même } G_f^{\uparrow}, G_f^{\rightarrow})$$

$$H_f(x) = \left( \int_0^{\infty} t Q_t g(x,t) dt \right)^{1/2}$$

$$K_f(x) = \left( \int_0^{\infty} t (Q_t \sqrt{g(x,t)})^2 dt \right)^{1/2}$$

Un cas particulier de l'inégalité de Littlewood-Paley-Stein est l'équivalence de norme dans  $L^p$  ( $1 < p < \infty$ ) entre  $f$  et  $G_f^{\rightarrow}$ . Stein a esquissé dans son livre la démonstration d'une équivalence de norme entre  $f$  et la fonction "complète"  $G_f$ , en dimension 1 et sous l'hypothèse qui correspond, dans ce cas, à la positivité de  $\Gamma_2$ . Nous allons traiter ici le cas général, ce qui se fait sans aucune difficulté au vu des résultats de l'exposé précédent. Malheureusement, en l'absence d'une équivalence de norme concernant la fonction  $G_f^{\uparrow}$ , on ne tire pas de résultat intéressant de ces inégalités.

Il s'agit bien sûr de vérifier que la norme de  $f$  dans  $L^p$  domine celle de  $G_f$  (l'inégalité inverse résultant de ce que  $G_f^{\rightarrow} \leq G_f$ ). Or dans [5], p. 168 et suivantes, Meyer établit

$$\text{si } p \geq 2, \quad \|H_f\|_p \leq c_p \|f\|_p$$

$$\text{si } 1 < p \leq 2 \text{ et } L \text{ est un générateur de diffusion, } \|K_f\|_p \leq c_p \|f\|_p.$$

Tout revient donc à majorer  $G_f$  en fonction de  $H_f$  dans le premier cas, de  $K_f$  dans le second. Or sous l'hypothèse  $\Gamma_{2 \geq 0}$

- On a  $\Gamma(Q_t f, Q_t f) \leq Q_t \Gamma(f, f)$ , donc  $g(x, 2t) \leq Q_t(x, g(\cdot, t))$ , donc  $G_f \leq 2H_f$ .

- Dans le cas des diffusions, on a  $\sqrt{\Gamma(Q_t f, Q_t f)} \leq Q_t \sqrt{\Gamma(f, f)}$ , et de la même manière  $G_f \leq 2K_f$ .

L'inégalité cherchée est donc immédiate : pour  $p \geq 2$  dans le cas général, pour  $p > 1$  dans celui des diffusions.