SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DOMINIQUE BAKRY

# Une remarque sur les inégalités de Littlewood-Paley sous l'hypothèse $\Gamma_2 \geq 0$

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 19 (1985), p. 175

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__175_0>

UNE REMARQUE SUR LES INEGALITES DE LITTLEWOOD-PALEY

SOUS L'HYPOTHESE $\Gamma_2 \geqq 0$

par Dominique Bakry

Cette remarque fait suite à l'exposé précédent, auquel nous renvoyons pour les notations et les hypothèses. Il s'agit de préciser dans ce cadre les inégalités de Littlewood-Paley-Stein obtenues par Meyer dans [5]. Rappelons de quoi il retourne. Etant donnée une fonction f sans partie invariante, que nous supposons dans $\mathcal{D}$ pour simplifier, posons

$$f(x,t) = Q_t f(x) \ , \ g^{\rightarrow}(x,t) = (\tfrac{d}{dt} f(x,t))^2 \ , \ g^{\uparrow}(x,t) = \Gamma(Q_t f, Q_t f)(x)$$

$$g = g^{\rightarrow} + g^{\uparrow} \ .$$

On introduit ensuite les "fonctions de Littlewood-Paley"

$$G_f(x) = \left( \int_0^\infty t\, g(x,t)dt \right)^{1/2} \quad (\text{ de même } G_f^{\uparrow} \ , \ G_f^{\rightarrow} )$$

$$H_f(x) = \left( \int_0^\infty t Q_t g(x,t)dt \right)^{1/2}$$

$$K_f(x) = \left( \int^\infty t (Q_t \sqrt{g(x,t)})^2 dt \right)^{1/2}$$

Un cas particulier de l'inégalité de Littlewood-Paley-Stein est l'équivalence de norme dans $L^p$ ($1<p<\infty$) entre f et $G_f^{\rightarrow}$. Stein a esquissé dans son livre la démonstration d'une équivalence de norme entre f et la fonction "complète" $G_f$, en dimension 1 et sous l'hypothèse qui correspond, dans ce cas, à la positivité de $\Gamma_2$. Nous allons traiter ici le cas général, ce qui se fait sans aucune difficulté au vu des résultats de l'exposé précédent. Malheureusement, en l'absence d'une équivalence de norme concernant la fonction $G_f^{\uparrow}$, on ne tire pas de résultat intéressant de ces inégalités.

Il s'agit bien sûr de vérifier que la norme de f dans $L^p$ domine celle de $G_f$ ( l'inégalité inverse résultant de ce que $G_f^{\rightarrow} \leqq G_f$ ). Or dans [5], p. 168 et suivantes, Meyer établit

si $p \geqq 2$ , $\|H_f\|_p \leqq c_p \|f\|_p$

si $1<p\leqq 2$ et L est un générateur de diffusion, $\|K_f\|_p \leqq c_p \|f\|_p$ .

Tout revient donc à majorer $G_f$ en fonction de $H_f$ dans le premier cas, de $K_f$ dans le second. Or sous l'hypothèse $\Gamma_2 \geqq 0$

- On a $\Gamma(Q_t f, Q_t f) \leqq Q_t \Gamma(f,f)$ , donc $g(x,2t) \leqq Q_t(x, g(.,t))$, donc $G_f \leqq 2H_f$ .
- Dans le cas des diffusions, on a $\sqrt{\Gamma(Q_t f, Q_t f)} \leqq Q_t \sqrt{\Gamma(f,f)}$ , et de la même manière $G_f \leqq 2K_f$ .

L'inégalité cherchée est donc immédiate : pour $p \geqq 2$ dans le cas général, pour $p>1$ dans celui des diffusions.