SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

NORIO KÔNO

Démonstration probabiliste du théorème de d'Alembert

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 19 (1985), p. 207-208
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__207_0>

DEMONSTRATION PROBABILISTE DU THEOREME DE d'ALEMBERT

par NORIO KÔNO

1. B.Davis [1] a donné une démonstration probabiliste du théorème de Picard utilisant les propriétés du mouvement brownien plan. Dans cet exposé nous donnons une démonstration très simple du théorème de d'Alembert utilisant la même idée que lui.

Théorème. - Quels que soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ (nombres complexes $a_0 \neq 0$ et $n \geq 1$) il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

2. Avant notre démonstration, nous rappelons les propriétés bien connues du mouvement brownien à valeurs dans C noté par $b(t, \omega)$; $0 \leq t < +\infty$, $\omega \in \Omega$ avec $b(0, \omega) = 0$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

(i) ([2], pp. 236-237)

$$\forall \varepsilon > 0, \forall z_0 \in \mathbb{C} \quad P(\omega ; \exists\, t_n \uparrow +\infty \ , |b(t_n, \omega) - z_0| < \varepsilon) = 1.$$

(ii)(le théorème de P.Lévy, [3], pp. 108-109). Soit $f(z)$ une fonction entière non constante. On pose

$$k(t, \omega) = \int_0^t |f'(b(s, \omega))|^2 \, ds.$$

On a alors

(a) $k(t, \omega)$ est une fonction strictement croissante et $\lim_{t \to \infty} k(t, \omega) = +\infty$ p.s.

(b) $x(t, \omega) = f(b(k^{-1}(t, \omega)))$ est un nouveau mouvement brownien plan avec $x(0, \omega) = f(0)$, où k^{-1} est la fonction inverse de k.

3. Démonstration du théorème. Considérons un polynôme

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (a_0 \neq 0 \text{ et } n \geq 1).$$

Évidemment on a

(iii) $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$.

Maintenant posons $A(\varepsilon) = \{ z \in \mathbb{C} ; |f(z)| \leq \varepsilon \}$ $(\varepsilon > 0)$. Alors $A(\varepsilon)$ est un ensemble compact grâce à (iii) et non vide grâce à (i) et (ii). Si bien que $z \in \bigcap_{\varepsilon > 0} A(\varepsilon)$ résout l'équation $f(z) = 0$. Q.E.D. !

Nous désirons consacrer cet article pour les souvenirs de M. Takehiko Miyata, mon devancier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B.J.Davis. Picard's theorem and Brownian motion, Trans. Amer. Math. Soc. 213(1975), 353-362.

[2] K.Ito-H.McKean. Diffusion processes and their sample paths, Springer,1965.

[3] H.McKean. Stochastic integrals, Academic press,1969.

Institute of Mathematics
Yoshida College
Kyoto University
Kyoto, Japan.