SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

RÉMI LÉANDRE

Estimation dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ de la loi de certains processus à accroissements indépendants

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 19 (1985), p. 263-270

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__263_0>

ESTIMATION DANS $L^p(\mathbb{R}^n)$ DE LA LOI DE CERTAINS PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS

Rémi LEANDRE

Bismut , dans [B] , étudie la loi d'un processus à accroissements indépendants , X_t , à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Sa mesure de Lévy $d\mu(x)$ est définie par :

(0-1) $\quad d\mu(x) = g(x)\, dx$.

Il démontre que si la " concentration " en petits sauts de X_t est assez forte , la loi de X_t possède une densité C^∞ pour $t > 0$. Si la " concentration " est un peu moins forte , le processus est " lentement régularisant " : pour tout entier p , il existe un temps t_p tel que pour $t > t_p$, X_t possède une densité de classe C^p .

L'idée de la preuve est d' effectuer une variation du processus X_t . Grâce à une exponentielle de Girsanov $G_z(t)$ ([J]) , il obtient la relation fondamentale :

(0-2) $\quad E[G_z(t)\, f(X_t(z))] = E[f(X_t)]$

si $X_t(z)$ est le processus perturbé . La fin de la démonstration consiste à <u>dériver</u> cette relation , ce qui donne lieu à des calculs difficiles (Dans un cadre plus général , on trouve une présentation plus simple de ceux-ci dans [B-J]).

Nous nous proposons de montrer que l'on peut obtenir des estimations dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ de la densité de X_t en <u>intégrant</u> (0-2) .

I. NOTATIONS ET ENONCES DES THEOREMES .

Soit $\mathcal{D}[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n]$ l'espace canonique de Skorohod ([J]), c'est-à-dire l'espace des fonctions continues à droite , limitées à gauche , de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^n$.

ω est la trajectoire canonique .

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$, positive , continue , telle que :

$$(1\text{-}1) \quad \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} (\|x\|^2 \wedge 1) \, g(x) \, dx < \infty .$$

Soit P l'unique probabilité sur $\mathcal{D}[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n]$ qui fasse du processus canonique X_t un processus à accroissements indépendants , de fonction caractéristique égale à :

$$(1\text{-}2) \quad \psi_t(\alpha) = \exp\Big[t \int \Big(\exp[-i\langle \alpha, x\rangle] - 1 + i \, 1_{[0,1]}(\|x\|) \langle \alpha, x \rangle \Big) g(x) \, dx \Big]$$

Soit $\nu(x)$ une fonction C^∞ , à support compact dans $\{g > 0\}$ telle que $\frac{\partial \nu}{\partial x}(0) = 0$ et telle que :

$$(1\text{-}3) \quad x \xrightarrow{H_z} x + \nu(x) \, z$$

soit un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ pour tout z de la boule unité $B(0,1)$ de $\mathbb{R}^n$.
<u>De plus $\nu(x)$ appartient à $\mathbb{R}^+$</u> .

Posons :

$$(1\text{-}4) \quad C_z(x) = \Big| \det \frac{\partial H_z(x)}{\partial x} \Big| \frac{g(H_z(x))}{g(x)} - 1$$

et considérons l'unique martingale locale , somme compensée de $C_z(\Delta X_s)$.

Soit $G_z(t)$ l'exponentielle de Doléans-Dade associée à la martingale locale précédente ([J]) .

Nous en possédons une expression explicite :

$$(1\text{-}5) \quad G_z(t) = \exp\Big[\sum_{s \le t}^{c} C_z(\Delta X_s) \Big] \times \prod_{\substack{s \le t \\ \Delta X_s \neq 0}} \exp[-C_z(\Delta X_s)] \, [1 + C_z(\Delta X_s)] .$$

<u>Nous supposerons dans toute la suite que</u> $G_z(t)$ <u>est uniformément bornée dans tous les</u> L^p <u>lorsque</u> z <u>décrit</u> $B(0,1)$.

Nous avons alors les deux théorèmes suivants :

THEOREME I . <u>Si pour tout</u> $t > 0$, $\left(\sum_{s \le t} \nu(\Delta X_s) \right)^{-1}$ <u>est dans tous les</u> $L^p(P)$, <u>alors</u> X_t <u>possède une densité appartenant à</u> $L^p(\mathbb{R}^n)$, <u>pour tout</u> p .

<u>Si il existe</u> $p_o > 1$, $t_o > 0$ <u>tel que</u> $\left(\sum_{s \le t_o} \nu(\Delta X_s) \right)^{-1}$ <u>soit dans</u> $L^{p_o}(P)$, <u>alors pour tout</u> $p > 1$, <u>il existe un réel</u> $t_p > 0$, <u>tel que pour</u> $t > t_p$, X_t <u>possède une densité dans</u> $L^p(\mathbb{R}^n)$. <u>Quand</u> $p \to 1$, $t_p \to 0$.

Nous démontrerons dans la partie II ce théorème . Donnons en d'abord une application .

THEOREME II . <u>Si il existe</u> $\alpha \in \,]0,2[$ <u>tel que</u>

$$\lim_{r \to 0} r^{\alpha} \int_{\nu(x) > r} g(x)\, dx > 0 \tag{1-6}$$

<u>alors pour</u> $t > 0$, X_t <u>possède une densité dans tous les</u> $L^p(\mathbb{R}^n)$.

<u>Si</u>

$$\lim_{r \to 0} \left[\operatorname{Log} \frac{1}{r} \right]^{-1} \int_{\nu(x) > r} g(x)\, dx > 0 \tag{1-7}$$

<u>alors pour tout</u> $p > 1$, <u>il existe un réel</u> t_p <u>tel que pour</u> $t > t_p$, X_t <u>possède une densité dans</u> $L^p(\mathbb{R}^n)$. <u>De plus quand</u> $p \to 1$, $t_p \to 0$.

<u>Preuve</u> : Elle est identique à celle de [B] , page 202 .

Γ est la fonction d'Euler . On a :

$$E\left[\left(\sum_{s \le t} \nu(\Delta X_s) \right)^{-p} \right] = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} \beta^{p-1} E\left[\exp\left[-\beta \sum_{s \le t} \nu(\Delta X_s) \right] \right] d\beta \tag{1-8}$$

soit :

(1-9) $$\tau(\beta) = \int (1 - \exp[-\beta\,\nu(x)])\, g(x)\, dx \,.$$

Soit $Y_t(\beta)$ le processus :

(1-10) $$Y_t(\beta) = \exp\Big[-\beta \sum_{s \le t} \nu(\Delta X_s) + t\,\tau(\beta)\Big] \,.$$

D'après [J] et [S], on sait que $Y_t(\beta)$ est une martingale positive de carré intégrable.

(1-8) implique alors :

(1-11) $$E\Big[\Big(\sum_{s \le t} \nu(\Delta X_s)\Big)^{-p}\Big] = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \beta^{p-1} \exp[-t\,\tau(\beta)]\, d\beta \,.$$

Le théorème résulte alors des théorèmes Taubériens de [B], p. 210 :

Si $\underline{\lim}_{r \to 0}\, r^{\alpha} \int_{\nu(x) > r} g(x)\, dx > 0$, alors :

(1-12) $$\underline{\lim}_{\beta \to \infty} |\beta|^{-\alpha}\, \tau(\beta) > C \,.$$

Si $\underline{\lim}_{r \to 0} \Big[\mathrm{Log}\Big(\frac{1}{r}\Big)\Big]^{-1} \int_{\nu(x) > r} g(x)\, dx > 0$, alors

(1-13) $$\underline{\lim}_{\beta \to \infty} (\mathrm{Log}\,\beta)^{-1}\, \tau(\beta) > C \,.$$

REMARQUE. Si on suppose en plus que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$, et que pour tout $\epsilon > 0$:

(1-14) $$\int_{|x| \ge \epsilon} \frac{|\mathrm{grad}\, g(x)|^2}{g(x)}\, dx < \infty$$

et que :

(1-15) $$\int_{|x| \le 1} \frac{|\mathrm{grad}\, \nu(x)\, g(x)|^2}{g(x)}\, dx < \infty$$

il résulte des techniques du calcul des variations de [B] que X_t possède une densité C^∞ à dérivées bornées dès que (1-6) est vérifiée et que X_t est " lentement régularisant " dès que (1-7) l'est.

II. DEMONSTRATION DU THEOREME .

PREMIERE ETAPE : VARIATION DU PROCESSUS .

Considérons le processus :

(2-1) $$X_t(z) = X_t + \Big(\sum_{s \le t} \nu(\Delta X_s) \Big) z$$

pour un élément , z , de la boule unité $B(0,1)$.

La mesure de Lévy de $X_t(z)$, $d\mu_z$, vérifie :

(2-2) $$\int_{\mathbf{R}^n - \{0\}} f(x)\, d\mu_z(x) = \int_{\mathbf{R}^n - \{0\}} f(H_z(x))\, g(x)\, dx$$

(H_z a été défini en (1-3)) .

Il résulte de (1-4) que :

(2-3) $$\int_{\mathbf{R}^n - \{0\}} f(H_z(x))\, (C_z(x) + 1)\, g(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}^n - \{0\}} f(x)\, g(x)\, dx \ .$$

Remarquons que $(z, x) \to C_z(x)$ est mesurable .
Donc l'ensemble des (ω, z) tels que la limite définissant $\overset{c}{\sum\limits_{s \le t}} C_z(\Delta X_s)$ n'existe pas , c'est-à-dire ,

(2-4) $$\overset{c}{\sum_{s \le t}} C_z(\Delta X_s) = \lim_{\varepsilon \downarrow\downarrow 0} \Big(\sum_{s \le t} C_z(\Delta X_s) - \int_0^t ds \int_{|x| > \varepsilon} C_z(x)\, g(x)\, dx \Big)$$

est mesurable dans $\mathcal{B}[\mathbf{R}^+ , \mathbf{R}^n] \times B(0,1)$. De même , l'ensemble des (ω, z) tels que le produit infini défini dans (1-5) n'existe pas est mesurable .

Aussi , posons lorsque l'un des deux termes figurant dans (1-5) ou (2-4) n'est pas défini :

(2-5) $$\tilde{G}_z(t) = 0 \ .$$

Alors $(\omega, z) \to \tilde{G}_z(t)$ est mesurable à valeurs dans $\mathbf{R}^+$.

De plus , à z fixé , $t \to \tilde{G}_z(t)$ est une martingale uniformément bornée dans tous les $L^p(P)$.

De (2-3) et de la formule de Girsanov pour les processus de sauts ([J] , [B]) , il s'ensuit que :

$$(2\text{-}6)\qquad E[f(X_t(z))\,\tilde{G}_z(t)] = E[f(X_t)]$$

pour toute fonction mesurable positive .

DEUXIEME ETAPE : INTEGRATION DE LA VARIATION .

Appliquons le théorème de Fubini . (2-6) implique que :

$$(2\text{-}7)\qquad \operatorname{vol} B(0,1)\, E[f(X_t)] = E\Big[\int_{B(0,1)} \tilde{G}_z(t)\, f\Big(X_t + \sum_{s\le t} \nu(\Delta X_s)\, z\Big)\, dz\Big] .$$

Utilisons la formule du changement de variable et l'inégalité de Hölder ; nous obtenons :

$$(2\text{-}8)\qquad E[f(X_t)] \le C\, E\Big[\|\tilde{G}_z(t)\|_{L^p(B(0,1))}\Big(\sum_{s\le t}\nu(\Delta X_s)\Big)^{-\frac{n}{q}}\Big]\, \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

PREMIER CAS : $\Big(\sum_{s\le t}\nu(\Delta X_s)\Big)^{-1}$ <u>est dans tous les</u> $L^p(P)$.

L'inégalité de Hölder implique que :

$$(2\text{-}9)\qquad E\Big[\|\tilde{G}_z(t)\|_{L^p(B(0,1))}\Big(\sum_{s\le t}\nu(\Delta X_s)\Big)^{-\frac{n}{q}}\Big] \le \Big(E\Big[\int_{B(0,1)} \tilde{G}_z^p(t)\, dz\Big]\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(E\Big[\Big(\sum_{s\le t}\nu(\Delta X_s)\Big)^{-n}\Big]\Big)^{\frac{1}{q}} .$$

Réappliquant le théorème de Fubini , on trouve que :

$$(2\text{-}10)\qquad E\Big[\int_{B(0,1)} \tilde{G}_z^p(t)\, dz\Big] \le \int_{B(0,1)} E[G_z(t)]\, dz < C .$$

De (2-8) et (2-9) , il résulte alors que :

$$(2\text{-}11)\qquad E[f(X_t)] \le C\, \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} .$$

DEUXIEME CAS : <u>il existe</u> $p_o > 1$ <u>et</u> $t_o > 0$ <u>tel que</u> $\Big(\sum_{s\le t_o}\nu(\Delta X_s)\Big)^{-1}$ <u>soit dans</u> $L^{p_o}(P)$.

Par hypothèse ,

$$(2\text{-}12)\quad p\Big\{\sum_{s\le t_o}\nu(\Delta X_s)\le\lambda\Big\}\le C\,\lambda^{p_o}\qquad(\lambda\to 0)\,.$$

Or , comme ν est positive ,

$$(2\text{-}13)\quad \begin{aligned} p\Big\{\sum_{s\le 2t_o}\nu(\Delta X_s)\le\lambda\Big\} &\le p\Big\{\sum_{s\le t_o}\nu(\Delta X_s)\le\lambda\,;\ \sum_{t_o\le s\le 2t_o}\nu(\Delta X_s)\le\lambda\Big\}\\ &=\Big(p\Big\{\sum_{s\le t_o}\nu(\Delta X_s)\le\lambda\Big\}\Big)^2\le C\,\lambda^{2p_o}\end{aligned}$$

car $\sum_{s\le t}\nu(\Delta X_s)$ est un processus à accroissements indépendants stationnaires.

Donc , pour tout $p>p_o$, il existe t_p tel que $\Big(\sum_{s\le t}\nu(\Delta X_s)\Big)^{-1}$ soit dans $L^p(P)$.

Réutilisons (1-11) . Nous obtenons :

$$\int_1^\infty \beta^{p_o-1}\exp[-t_o\,\tau(\beta)]\,d\beta<\infty$$

et l'inégalité de Hölder implique que :

$$(2\text{-}14)\quad \int_1^\infty \beta^{\frac{p_o-1}{p}}\exp\Big[-\frac{t_o}{p}\,\tau(\beta)\Big]\frac{d\beta}{\beta}<\infty\,.$$

Donc , lorsque t tend vers zéro , il existe un réel $p(t)$ tendant vers 0_+ tel que $\Big(\sum_{s\le t}\nu(\Delta X_s)\Big)^{-p(t)}$ soit dans $L^1(P)$, toujours en vertu de (1-11) .

Revenons à (2-8) . L'inégalité de Hölder implique :

$$(2\text{-}15)\quad \begin{aligned} &E\Big[\,\|\tilde G_z(t)\|_{L^p(B(0,1))}\Big(\sum_{s\le t}\nu(\Delta X_s)\Big)^{-\frac{n}{q}}\Big]\le\\ &\Big(E\Big[\Big(\int_{B(0,1)}\tilde G_z^p(t)\,dz\Big)^{\frac{r}{p}}\Big]\Big)^{\frac1r}\Big(E\Big[\Big(\sum_{s\le t}\nu(\Delta X_s)\Big)^{-\frac{n}{q}r'}\Big]\Big)^{\frac{1}{r'}}\end{aligned}$$

pour $r>p$ et $\frac1r+\frac1{r'}=1$ (Donc $r'<q$) .

Or $r>p$. Il découle de la formule de Jensen que :

$$(2\text{-}16)\quad \Big(\int_{B(0,1)}\tilde G_z^p(t)\,dz\Big)^{\frac{r}{p}}\le C\int_{B(0,1)}\tilde G_z^r(t)\,dt$$

et donc :

$$(2\text{-}17)\quad \left(E\left[\left(\int_{B(0,1)} \tilde{G}^p_z(t)\,dz\right)^{\frac{r}{p}}\right]\right)^{\frac{1}{r}} < \infty .$$

On sait alors qu'il existe $t_{\frac{nr'}{q}}$ tel que :

$$(2\text{-}18)\quad E\left[\left(\sum_{s \leq t_{\frac{nr'}{q}}} \nu(\Delta X_s)\right)^{-\frac{nr'}{q}}\right] < \infty$$

De plus, quand $q \to \infty$, on peut choisir r' pour que $\frac{nr'}{q} \to 0$ et donc quand $q \to \infty$, on peut choisir $t_{\frac{nr'}{q}}$ pour qu'il tende vers 0 .

En résumé, pour $t > t_{\frac{nr'}{q}}$, on a :

$$(2\text{-}19)\quad E[f(X_t)] \leq C\,\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

d'après (2-8), (2-15), (2-17) et (2-18) .

BIBLIOGRAPHIE

[B] BISMUT J.M. : Calcul des variations stochastique et processus de sauts. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 63, 2, 147-235 (1983) .

[B-J] BICHTELER K. - JACOD J. : A paraître .

[J] JACOD J. : Calcul stochastique et problèmes de martingales . Springer , Lect. Notes in Math. 714 (1979).

[S] STROOCK D.W. : Diffusion processes associated with Levy generators . Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 32 , 209-244 (1975).

Laboratoire de Mathématiques
Faculté des Sciences
25030 BESANCON CEDEX