RÉMI LÉANDRE

Flot d’une équation différentielle stochastique avec semimartingale directrice discontinue

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 19 (1985), p. 271-274
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__271_0>

FLOT D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE

AVEC SEMI-MARTINGALE DIRECTRICE DISCONTINUE

par R. LEANDRE

Ce travail a pour but de compléter les résultats sur l'existence de flots stochastiques, présentés par P.A. Meyer (d'après Kunita et Varadhan) dans le volume XV du Séminaire de Probabilités, Lecture Notes in M. 850, p. 103-117. Cet article, auquel nous nous référerons constamment, sera désigné par [M] dans la suite. Meyer remarque, p. 111, que l'on ne peut établir en général l'existence d'un flot de difféomorphismes lorsque la semimartingale directrice est discontinue, comme le montre l'exemple de l'équation exponentielle à une dimension $X_t = x + \int_0^t X_{s-}dZ_s$: si Z admet à l'instant T un saut égal à -1, les trajectoires issues des différents points x confluent en 0 à partir de T . Nous allons montrer que cet exemple est vraiment typique : l'existence d'un flot de difféomorphismes dépend seulement d'une condition (déterministe) sur la nature des sauts de Z .

Nous ferons usage à plusieurs reprises d'un théorème de Hadamard [1] : si f est une application C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, qui est propre et étale (sa différentielle ne dégénère jamais), alors f est un difféomorphisme.

HYPOTHESES ET NOTATIONS

Nous considérons une é.d.s. de la forme

$$(1) \qquad X_t = x + \int_0^t F(X_{s-})dZ_s$$

X_t et x sont des éléments de $\mathbb{R}^n$; la semimartingale directrice Z est nulle en 0 , à valeurs dans $\mathbb{R}^m$; F est une application de $\mathbb{R}^n$ dans l'espace des matrices à n lignes et m colonnes, de classe C^∞, admettant des dérivées bornées de tous ordres. Si z est un élément de $\mathbb{R}^m$, $F(x)z$ et $D_iF(x)z$ (dérivée partielle de $F(x)$ par rapport à la i-ième coordonnée de x) sont des éléments de $\mathbb{R}^n$, et nous désignons par $F'(x)z$ la matrice (n,n) dont les colonnes sont les vecteurs $D_iF(x)z$.

D'après Kunita (voir [M]), on peut choisir une version $X_t(x,\omega)$ de la solution de (1), possédant pour (presque) tout ω la propriété suivante : $X_t(.,\omega)$ est pour tout t une application C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans lui même ; les dérivées partielles en x de cette application sont des fonctions continues de (t,x). Si $U_t(x) = X_t'(x,\omega)$ est la matrice jacobienne de l'application $X_t(.,\omega)$, U_t est solution de l'équation linéaire

(2) $$U_t = I + \int_0^t dL_s U_{s-}$$

où L_t est la matrice carrée semimartingale $\int_0^t F'(X_{s-})dZ_s$.

Il nous faut aussi rappeler la méthode d'Emery pour résoudre l'é.d.s. (1). On se donne une suite de temps d'arrêt (bornés pour fixer les idées) $0=T_0<T_1<T_2\ldots$, tendant vers l'infini, tels que les semimartingales

(3) $$Z^i = Z^{T_i-} - Z^{T_{i-1}} \quad (i=1,2,\ldots)$$

aient une norme $<\varepsilon$ dans l'espace $\underline{\underline{H}}^\infty$ introduit par Emery (ZW 41, 1978, p. 241-262), où ε est un nombre suffisamment petit. Cela impose en particulier que le crochet $[Z^i,Z^i]_\infty$ soit majoré par ε , donc que les sauts de Z^i soient majorés par ε : les grands sauts de Z figurent donc parmi les instants T_i . On désigne par $X^i_t(x)$ la solution de (1) avec semimartingale directrice Z^i , de sorte que

(4) $$X^i_t(x) = x \text{ pour } t\leqq T_{i-1} , \quad X^i_t(x) = X^i_{T_i-}(x) \text{ pour } t\geqq T_i$$

D'autre part, on définit les opérateurs de raccordement en posant

(5) $$H^i(x) = x+ F(x)\Delta Z_{T_i}$$

La construction de la solution de (1) se fait alors ainsi pour tout ω : on regarde dans quel intervalle $[T_n,T_{n+1}[$ se trouve t , puis l'on forme

(6) $$\begin{aligned} x_{1-} &= X^1_{T_1-}(x)=X^1_{T_1}(x) , \quad x_{1+} = H^1(x_{1-}) \\ x_{2-} &= X^2_{T_2-}(x_{1+}) , \quad x_{2+} = H^2(x_{2-}) \ \ldots \text{ jusqu'à } x_{n+} \\ X_t(x) &= X^{n+1}_{t-T_n}(x_{n+}) \end{aligned}$$

On voit donc que, pour montrer que $X_t(.,\omega)$ est un difféomorphisme (resp. est injective) il suffit de montrer que les applications

$$X^i_{T_i}(.,\omega) , \quad X^{n+1}_{t-T_n}(.,\omega) , \quad H^i(.,\omega)$$

sont des difféomorphismes (resp. sont injectives). Etudier les deux premières fonctions revient à étudier l'équation (1) lorsque la semimartingale directrice $Z=Z^i$ a une norme petite dans $\underline{\underline{H}}^\infty$

FLOT DE DIFFEOMORPHISMES

Nous commençons par traiter le cas des deux premières fonctions : nous pouvons omettre l'indice i . D'autre part, puisque nous travaillons à ω fixé, nous pouvons remplacer T_i ou $t-T_n$ simplement par t . Nous allons montrer que, si la semimartingale directrice Z a une norme assez petite dans $\underline{\underline{H}}^{\infty}$, l'application $X_t(.)$ (dont on sait déjà qu'elle est C^{∞}) est <u>propre</u> et <u>étale</u>.

Le premier point est déjà traité dans [M] (remarque du haut de la page 116). Pour le second, nous utilisons le lemme suivant, qui étend les formules de Karandikar (Sém. Prob. XVI, p. 385) au cas discontinu.

LEMME. <u>Soit</u> (U_t) <u>une semimartingale matricielle, solution de l'é.d.s.</u>

(7) $$U_t = I + \int_0^t dL_s U_{s-}$$

(cf. (2)). <u>Supposons que pour tout</u> s, <u>la matrice</u> $I+\Delta L_s$ <u>soit inversible. Alors la semimartingale</u> (V_t) <u>solution de l'é.d.s.</u>

(8) $$V_t = I + \int_0^t V_{s-}dM_s \quad , \quad M_t = -L_t + \langle L^c,L^c\rangle_t + \Sigma_{s\leq t}\frac{\Delta L_s^2}{I+\Delta L_s}$$

(<u>où</u> $\langle L^c,L^c\rangle^i_j = \Sigma_k \langle L^{ic}_k,L^{kc}_j\rangle$) <u>est telle que</u> $V_tU_t = I$ <u>pour tout</u> t.

DEMONSTRATION. Elémentaire (calculer $d(V_tU_t)$ au moyen de la formule d'intégration par parties stochastique).

On remarquera que $I+\Delta L_s$ est toujours inversible si $|\Delta L_s|$ est assez petit, et qu'on a alors une majoration explicite de $|(I+\Delta L_s)^{-1}|$: la définition du troisième terme de M_t ne pose donc aucun problème.

REMARQUE. Meyer signale dans [M] que la démonstration de Kunita s'étend sans changement au cas des semimartingales discontinues, à norme dans $\underline{\underline{H}}^{\infty}$ suffisamment petite (remarques p. 114 et 116 , et dernières lignes avant l'appendice). Il nous semble que la méthode présentée ci-dessus (pour le cas C^{∞}) est plus simple.

On voit donc que la discussion est complètement ramenée à celle des opérateurs de raccordement H^i .

Nous désignerons par D (resp. I) l'ensemble des $z\in\mathbb{R}^m$ tels que l'application

(9) $$H(x) = x+F(x)z$$

soit un difféomorphisme (resp. soit injective). On a évidemment $D\subset I$. D'autre part, D contient un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^m$. En effet, F est lipschitzienne, donc à croissance au plus linéaire, donc pour z assez petit on a $|F(x)z| \leq |x|/2$ et $|H(x)|\geq|x|/2$ pour $|x|$ grand, de sorte que H est <u>propre</u> , et d'autre part $H'(x)=I+F'(x)z$ est <u>inversible</u> pour tout x pour $|z|$ petit puisque $F'(x)$ est bornée.

THEOREME. <u>Pour que l'équation</u> (1) <u>définisse un flot de difféomorphismes</u> (<u>resp. ait des trajectoires non-confluentes</u>) <u>il faut et il suffit que les sauts de</u> Z <u>appartiennent tous à</u> D (<u>resp. à</u> I).

DEMONSTRATION. Si les sauts de Z appartiennent tous à D (resp. I), les opérateurs de raccordement H^i sont des difféomorphismes (resp. sont injectifs), et $X_t(.,\omega)$ est alors un difféomorphisme (est injectif) par composition.

Inversement, supposons qu'avec probabilité positive, les sauts de Z appartiennent à D^c (I^c) . D'après les remarques précédant le théorème, il existe $\varepsilon>0$ tels que tous les sauts de longueur $\leqq\varepsilon$ appartiennent à D . Donc si la subdivision T_i a été choisie assez fine, les sauts $\Delta Z_t \in D^c$ ont tous lieu aux instants T_i . Il existe alors un entier i tel que, avec probabilité positive, ΔZ_{T_j} appartienne à D pour tout $j<i$, mais ΔZ_{T_j} appartienne à D^c (resp. I^c). Dans ces conditions, $X_{T_i^-}(.)$ est un difféomorphisme, mais H^i n'en est pas un (resp. n'est pas injective), donc pour $t=T_i$ $X_t(.)$ n'est pas un difféomorphisme (n'est pas injective).

REFERENCES

[1]. DIEUDONNE (J.). Eléments d'analyse, t.III, chap. XVI, p. 82, exerc. 1.

R. LEANDRE
Université de Besançon
Département de Mathématiques
25030-Besançon Cedex, France