

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PHILIPPE BIANE

## **Comparaison entre temps d'atteinte et temps de séjour de certaines diffusions réelles**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 19 (1985), p. 291-296

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1985\\_\\_19\\_\\_291\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__291_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

COMPARAISON ENTRE TEMPS D'ATTEINTE ET TEMPS DE  
SEJOUR DE CERTAINES DIFFUSIONS REELLES.

par Ph. BIANE

1. Introduction :

Soient  $X$  un processus de Bessel de dimension  $n$  issu de  $0$ , et  $Z$  un processus de Bessel de dimension  $n+2$ , également issu de  $0$ , c'est-à-dire que  $X$  et  $Z$  sont des diffusions de générateurs infinitésimaux respectifs

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{n-1}{2x} \frac{d}{dx}, \quad \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{n+1}{2x} \frac{d}{dx},$$

$n$  étant un réel  $> 1$ . Ciesielski et Taylor [1] ainsi que Gettoor et Sharpe [3] ont remarqué que les deux variables

$$S_y = \int_0^\infty 1_{\{Z_s \leq y\}} ds \quad \text{et} \quad T_y = \inf\{t / X_t > y\}$$

ont même loi, pour tout réel positif  $y$ .

Nous allons voir que des résultats de ce type subsistent pour des couples de diffusions plus généraux.

2. Cas général :

Dans la suite,  $Z$  désigne une diffusion régulière sur un intervalle  $(A,B)$  de  $\bar{\mathbb{R}}$ , de mesure de rapidité  $m$ , et d'échelle  $s$ , deux fois dérivable. On fait sur  $Z$  les hypothèses suivantes :

- i)  $s(A) = -\infty$ .
- ii)  $s(B) < \infty$  (on prendra, à partir de maintenant,  $s(B) = 0$ ).
- iii)  $Z$  est tuée en  $B$  si  $B < +\infty$ .
- iv)  $m(dx) = m'(x)dx$  où  $m'$  est positive, dérivable sur  $(A,B)$ .
- v)  $s(x) m'(x) \xrightarrow{s \rightarrow A} 0$  si  $A > -\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(x) m'(x) dx = \infty \quad \text{si} \quad A = -\infty.$$

Alors, si  $\zeta$  est le temps de vie de la diffusion,  $Z_t \xrightarrow{t \rightarrow \zeta} B$  (voir [2], [4]). Le générateur infinitésimal de  $Z$  est  $\Gamma = \frac{1}{2} \frac{d}{dm} \frac{d}{ds}$ . Soient  $y_0, y \in [A, B]$  vérifiant  $-\infty < y_0 < y < +\infty$ . Nous allons calculer la loi de  $S_y = \int_0^\zeta 1_{\{Z_s < y\}} ds$  sous  $P_{y_0}$  loi

de  $Z$  issue de  $y_0$ . Soit  $\lambda > 0$ ; appelons  $F_\lambda$  la solution positive croissante sur  $(A, B)$  de  $(\Gamma - \lambda)F_\lambda = 0$ , telle que  $F_\lambda(A) = 1$ .

Si  $f_\lambda(x) = F_\lambda(x)$ , pour  $x < y$

$$= s(x) \frac{F'_\lambda(y)}{s'(y)} + F_\lambda(y) - \frac{s(y)}{s'(y)} F'_\lambda(y) \text{ pour } y < x,$$

alors  $f_\lambda$  est solution croissante de  $\Gamma f_\lambda = \lambda 1_{(A, B)} \cdot f_\lambda$ ,

D'après la formule d'Itô  $f_\lambda(Z_t) \exp\{-\lambda \int_0^t 1_{\{Z_s < y\}} ds\}$  est une martingale bornée

On a donc la formule de Feynman - Kac :

$$E_{y_0} \left[ \exp - \lambda \int_0^\zeta 1_{\{Z_s < y\}} ds \right] = \frac{f_\lambda(y_0)}{f_\lambda(B)} = \frac{F_\lambda(y_0)}{F_\lambda(y) - \frac{s(y)}{s'(y)} F'_\lambda(y)}$$

Remarquons que le dénominateur de cette expression, en tant que fonction de  $y$ , s'écrit :  $s^2 \frac{d}{ds} \left( -\frac{F'_\lambda}{s} \right) = \frac{d}{dv} (v F_\lambda)$ , où  $v = -\frac{1}{s}$ . Soit  $\bar{\Gamma}$  l'opérateur différentiel défini par  $\bar{\Gamma}f = \frac{1}{s} F(sf)$ , opérant sur les  $f$  telles que  $sf$  est dans le domaine de  $\Gamma$ .

On a immédiatement  $\bar{\Gamma} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} \frac{d}{dm} \right) \left( s^2 \frac{d}{ds} \right)$ , soit, en posant  $v = -\frac{1}{s}$  et  $dn = s^2 dm$  :

$$\bar{\Gamma} = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dn} \frac{d}{dv} \right).$$

Remarque :  $\bar{\Gamma}$  est le générateur de la diffusion d'échelle  $v$ , de mesure de rapidité  $n$  sur  $(A, B)$ . D'après Sharpe [2], si  $L_z = \sup\{t / Z_t = z\}$  le processus

$(Z_{L_z - t}, t \geq 0)$  est une diffusion de générateur  $\bar{\Gamma}$ , issu de  $z$ .

De  $\Gamma = s \bar{\Gamma} \left( \frac{1}{s} \cdot \right) = \frac{1}{v} \bar{\Gamma}(v \cdot)$  on tire :

$$\Gamma = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v} \frac{d}{dn} \right) \left( \frac{d}{dv} (v \cdot) \right) = \frac{1}{2} PQ \text{ où } P = \frac{1}{v} \frac{d}{dm} \text{ et } Q = \frac{d}{dv} (v \cdot)$$

Posons  $H_\lambda = QF_\lambda$ . Alors :  $\frac{1}{2} QPH_\lambda = \frac{1}{2} Q(PQF_\lambda) = \lambda \frac{1}{2} QF_\lambda = \lambda H_\lambda$ .

Ceci nous amène donc à considérer la diffusion  $X$  de générateur infinitésimal

$\frac{1}{2} QP = \frac{1}{2} \frac{d}{dv} \frac{d}{dn}$  sur  $(A, B)$ . D'après  $v$ ), on a :

1) si  $A > -\infty$ ,  $H'_\lambda(x) = 2\lambda m'(x) s'(x) F_\lambda(x) \xrightarrow{x \rightarrow A} 0$ . Donc, si on impose à  $X$  d'être réfléchi en  $A$ , si  $X_0 < y_0$ ,  $X$  atteint presque sûrement tout point de  $(y_0, B)$ , et donc :

$$E[\exp -\lambda T_y / X_0] = \frac{H_\lambda(X_0)}{H_\lambda(y)} \quad (T_y = \inf\{t / X_t > y\}).$$

2) si  $A = -\infty$ , l'échelle de la diffusion  $X$  vaut  $-\infty$  en  $A$ , donc  $X$  atteint presque sûrement tout point de  $(y_0, B)$  si  $X_0 < y_0$ . On a donc :

$$E[\exp -\lambda T_y / X_0] = \frac{H_\lambda(X_0)}{H_\lambda(y)}.$$

Pour retrouver la transformée de Laplace de  $S_y$ , il faut donner à  $X$  une loi initiale  $\mu$  convenable, de sorte que  $E_\mu[H_\lambda(X_0)] = F_\lambda(y_0)$ . Si on prend pour

$$\mu(dx) = 1_{\{A < x < y_0\}} (-s(y_0)) dv(x)$$

$$\begin{aligned} E[H_\lambda(X_0)] &= \int_A^{y_0} H_\lambda(x) (-s(y_0)) dv(x) = \int_A^{y_0} (-s(y_0)) \frac{d}{dv} (v F_\lambda)(x) dv(x) \\ &= F_\lambda(y_0). \end{aligned}$$

Remarque : Si  $Z_0 = y_0 > A$ , la loi  $\mu$  est exactement la loi de  $I = \inf_{0 \leq s \leq \zeta} \{Z_s\}$ .

Si  $Z_0 = A > -\infty$ , il suffit de prendre  $X_0 = A$ . On a finalement le

Théorème : Soit  $Z$  une diffusion régulière sur  $(A, B)$  vérifiant les propriétés  $i) \dots v)$  et admettant pour générateur infinitésimal  $\frac{1}{2} \frac{d}{dm} \frac{d}{ds}$ . Soit  $X$  la diffusion sur  $(A, B)$  de générateur  $\frac{1}{2} \frac{d}{dv} \frac{d}{dn}$  ( $v = -\frac{1}{s}$ ,  $dn = s^2 dm$ ) réfléchi en  $A$  si  $A > -\infty$ , et  $|n(A)| < \infty$ .

Alors, pour tout  $y \in (A, B)$ , tout  $y_0 \in (A, y)$ , si  $P_{y_0}$  est la loi de  $Z$  issue de  $y_0$ , et  $P'_{\mu(y_0)}$ , la loi de  $X$ , de loi initiale  $\mu(y_0)$  avec  $\mu(y_0)(dx) = -1_{(A < x < y_0)} s(y_0) dv(x)$ , alors  $\int_0^\zeta 1_{\{Z_s < y\}} ds$  a même loi sous  $P_{y_0}$  que  $T_y = \inf\{t / X_t > y\}$  sous  $P'_{\mu(y_0)}$ .

3) Quelques exemples :

a) Si  $Z$  est un processus de Bessel de dimension  $n + 2 > 3$ , issu de 0, on retrouve le résultat de l'introduction (on a  $A = 0, B = +\infty$ ). Si  $Z_0 = y_0 > 0$ , on peut obtenir le résultat du théorème d'une autre façon : soient  $\beta, \gamma$  des processus de Bessel indépendants de dimensions respectives  $n$  et  $2$ , issus de 0 ; alors alors  $\delta = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$  est un processus de Bessel de dimension  $n + 2$  issu de 0. Soit  $\tau_{y_0} = \inf\{t / \delta_t > y_0\}$ . La loi de  $\beta_{\tau_{y_0}}$  est  $n \frac{x^{n-1}}{y_0^n} dx 1_{\{0 < x < y_0\}}$  c'est aussi la loi de  $I_{y_0} = \inf\{\delta_t, t > \tau_{y_0}\}$ .

D'après le résultat connu lorsque  $Z_s = 0$ , et l'indépendance des temps  $\tau_{y_0}$  et

$\int_{\tau_{y_0}}^{\infty} 1_{\{\delta_s < y\}} ds$  d'une part, et  $\tau_{y_0}$  et  $T_y - \tau_{y_0}$  ( $T_y = \inf\{t / \beta_t > y\}$ ) on retrouve le résultat.

b) Si  $Z$  est un mouvement Brownien avec drift  $\mu > 0$ , alors  $A = -\infty, B = +\infty$ ,  $S(x) = e^{-2\mu x}$ ,  $m(dx) = \frac{1}{2\mu} e^{2\mu x} dx$ . On trouve que  $X$  est un mouvement Brownien avec drift  $\mu$ . Si  $Z_0 = 0$ , le minimum de  $Z$ ,  $I$  est tel que  $-I$  a une loi exponentielle de paramètre  $2\mu$ .

Dans ce cas particulier, l'égalité en loi du théorème a une interprétation en termes de la trajectoire du mouvement Brownien avec drift  $\mu$  : soit  $Z_t = B_t + \mu t$  un mouvement Brownien avec drift  $\mu$ . Ecrivons la formule de Tanaka ;  $L^0$  étant le temps local de  $Z$  en 0 :

$$Z_t^+ = \int_0^t 1_{\{Z_s > 0\}} dB_s + \mu \int_0^t 1_{\{Z_s > 0\}} ds + \frac{1}{2} L_t^0.$$

Soit  $\tau_t = \inf\{u : \int_0^u 1_{\{Z_s > 0\}} ds > t\}$  ; on a :

$$Z_{\tau_t}^+ - \frac{1}{2} L_{\tau_t}^0 = \gamma_t + \mu t$$

où  $\gamma$  est un mouvement Brownien

$$U_t = Z_{\tau_t}^+ - L_{\tau_t}^0 = Z_{\tau_t} - L_{\tau_t}^0$$

est un mouvement Brownien avec drift  $\mu$ , et une comparaison de sa trajectoire avec celle de  $Z$  montre que :

$$\int_0^\sigma 1_{\{Z_s > 0\}} ds \quad (\text{où } \sigma = \sup\{t / Z_t = 0\})$$

est l'instant où sa trajectoire passe par son minimum.

D'après le théorème de Williams sur la décomposition de la trajectoire d'une diffusion en son minimum, (voir [4]) l'instant où un mouvement Brownien avec drift  $\mu$ ,  $Z$ , atteint son minimum a même loi que le premier instant où il atteint une variable indépendante de loi exponentielle de paramètre  $2\mu$ . En retranchant cette variable exponentielle de  $Z_0$ , on obtient le résultat de la proposition, en remarquant que

$$\int_0^\sigma 1_{\{Z_s > 0\}} ds \quad \text{et} \quad \int_0^\infty 1_{\{Z_s > 0\}} ds$$

ont même loi si  $Z$  est un mouvement Brownien avec drift  $\mu$  issu de 0.

c) Prenons pour  $Z$  un mouvement Brownien réel tué en 0, issu de  $y_0 > 0$  (ici, on  $A = +\infty > B = 0$ , il faut renverser l'ordre dans l'intervalle  $(A,B)$ ).

Le processus  $X$  obtenu dans le théorème est un processus de Bessel dimension -1. Si on prend  $y = 0$ , on obtient le résultat suivant : soit  $Z$  un mouvement Brownien issu de  $y_0 > 0$ ,  $X$  un processus de Bessel de dimension -1, de loi initiale

$y_0 \frac{dx}{x^2} 1_{\{x > y_0\}}$  ; alors, les temps d'atteinte de 0 par  $X$  et  $Z$  ont même loi.

4) Remarque : On peut généraliser les résultats ci-dessus à des lois de variables de type  $\int_0^\zeta g(Z_s) 1_{\{Z_0 < y\}} ds$  où  $Z_s = y_0$ ,  $g$  est une fonction  $> 0$ , de classe  $C^1$  sur  $(A,B)$ .

Le même calcul qu'au §2 nous donne alors le résultat suivant : si  $X$  est la diffusion sur  $(A,B)$  de générateur infinitésimal  $\frac{1}{2} (gQ) (\frac{1}{g} P)$ , et si  $g$  est telle que, partant de  $z_0 \in (A,B)$   $X$  passe presque sûrement par tous les points de

$(z_0, B)$ , alors,  $\int_0^\zeta g(Z_s) 1_{\{Z_s < y\}}$  et  $\int_0^T g(X_s) ds$  ont même loi si  $Z_0 = y_0$  et  $X_0$  a pour loi la loi du minimum de  $Z$ .

Dans le cas particulier où  $g = \frac{1}{s^2} \frac{ds}{dm}$ , on a :  $\frac{1}{Z} (gQ) \left( \frac{1}{Y} P \right) = \frac{1}{Z} \frac{d}{dm} \frac{d}{ds}$  ;  $X$  et  $Z$  ont donc même générateur. En fait, ce résultat s'obtient à partir du §3; b), en remarquant que d'après la formule d'Itô :

$$\text{Log}|s(Z_t)| = \int_0^t \sqrt{g(Z_s)} d\beta_s + \int_0^t g(Z_s) ds + \text{Log}|s(y_0)|$$

( $\beta$  = mouvement Brownien) donc,  $\text{Log}|s(Z_t)|$  changé de temps par l'inverse de la fonctionnelle additive  $\int_0^t g(Z_s) ds$  est un mouvement Brownien avec drift, et le résultat découle du §3, b), par changement de temps.

REFERENCES :

- [1] Z. CIESIELSKI, S. TAYLOR : First passage time and sojourn density for Brownian Motion in Space and the exact Hausdorff Measure of the sample path. T.A.M.S 103 (1962), p. 434-450.
- [2] M.J. SHARPE : Some transformations of diffusions by time reversal. Ann. Proba. 8 (1980), p. 1157-1162.
- [3] R. GETTOOR, M. SHARPE : Excursions of Brownian Motion and Bessel Processes. Z.W. 47 (1979), p. 83-106.
- [4] D. WILLIAMS : Path decompositions and continuity of local times for one dimensional diffusions. Proc. London Math. Soc. 3, 28, p. 738-768, 1974.

Adresse de l'auteur :

E.N.S. Ulm  
45, rue d'Ulm  
75230 PARIS CEDEX 05