

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MARC YOR

## Compléments aux formules de Tanaka-Rosen

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 19 (1985), p. 332-349

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1985\\_\\_19\\_\\_332\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__332_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Marc YOR

1. Introduction :

(1.1) Soit  $(B_t, t \geq 0)$  mouvement Brownien à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2$ , ou  $3$ , issu de  $0$ . Considérons, pour tout ensemble  $\Gamma$  borélien, borné, de  $\mathbb{R}_+^2$ , la mesure  $\lambda_\Gamma(dx)$ , définie sur  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  par :

$$(1.a) \quad \lambda_\Gamma(g) = \iint_\Gamma ds \, du \, g(B_s - B_u),$$

pour toute fonction  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , borélienne.

D'après Rosen [ 5 ],  $\lambda_\Gamma(dx)$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $(dx)$ . Plus précisément, il existe une fonction  $\alpha(x ; \Gamma)$  continue sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , telle que :

$$(1.b) \quad \lambda_\Gamma(g) = \int dx \, g(x) \, \alpha(x ; \Gamma).$$

On appellera  $(\alpha(x ; \Gamma), \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2))$  le temps local d'intersection au point  $x$  du mouvement Brownien  $(B_t, t \geq 0)$ .

Le Gall [ 4 ] montre que l'on peut construire très simplement ces temps locaux d'intersection à partir des temps locaux d'intersection associés à deux mouvements Browniens indépendants  $(B_s, s \geq 0)$  et  $(B'_u, u \geq 0)$  ; ces derniers temps locaux - dont l'existence a été obtenue par Geman - Horowitz - Rosen [ 3 ] - sont définis de la même façon que ci-dessus à partir de la formule (1.a), où l'on a changé  $(B_s - B_u)$  en  $(B_s - B'_u)$ . De plus, lorsque  $n = 2$ , Le Gall [ 4 ] montre que pour tout ensemble borné  $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$ , la fonction  $(\gamma(x ; \Gamma) \stackrel{\text{déf}}{=} \alpha(x ; \Gamma) - E(\alpha(x ; \Gamma)) ; x \neq 0)$  se prolonge en une fonction continue sur tout le plan, ce qui lui permet d'obtenir la convergence en probabilité, lorsque  $k \rightarrow \infty$ , de :

$$(1.c) \quad k^2 \iint_\Gamma ds \, du \{g(k(B_s - B_u)) - E[g(k(B_s - B_u))]\}$$

vers  $\gamma(0 ; \Gamma)$ , pour toute fonction  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ , continue, à support compact, et d'intégrale 1.

Cette convergence a été démontrée initialement - pour l'essentiel - par Varadhan [ 8 ] pour  $\Gamma = [0,1]^2$ , et la soustraction de l'espérance effectuée en (1.c) est souvent appelée renormalisation de Varadhan.

(1.2) De son côté, Rosen [ 6 ] a dégagé, en dimension 2, une "formule de Tanaka" :

$$(1.d) \quad \int_0^t ds \{K(B_t - B_s - y) - K(y)\} \\ = \int_0^t (dB_u ; \int_0^u ds \nabla K(B_u - B_s - y)) + \int_0^t ds \int_s^t du K(B_u - B_s - y) + \alpha(y ; T_t)$$

où  $T_t = \{(s,u) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 < s < u < t\}$ ,  $K$  est une certaine fonction solution de  $(\frac{1}{2} \Delta - 1)K = -\delta_0$ , et  $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  (précisément,  $K(z) \equiv \frac{1}{\pi} K_0(\sqrt{2}|z|)$ ; noter  $K(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{|z|}$ ).

L'objet principal de ce travail est de montrer que l'on peut remplacer la fonction  $K(z)$  par  $\log|z|$ ; la formule (1.d) devient alors :

$$(1.e) \quad \int_0^t ds \{\log|B_t - B_s - y| - \log|y|\} \\ = \int_0^t (dB_u ; \int_0^u ds \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|^2}) + \pi\alpha(y ; T_t) \quad (y \neq 0).$$

On déduit ensuite aisément de la formule (1.e) - que nous appellerons formule de Tanaka - Rosen - la convergence dans  $L^2$  de

$$\pi\alpha(y ; T_t) - t \log \frac{1}{|y|}, \text{ lorsque } |y| \rightarrow 0,$$

résultat que Rosen ([7]) obtient également, avec un peu plus de difficulté, à partir de (1.d); le lien avec les résultats de Varadhan et Le Gall est ainsi établi pour  $\Gamma = T_t$ .

(1.3) Remarquons maintenant que la formule (1.e) a un air de parenté évident avec la formule de Tanaka :

$$(1.f) \quad |B_t - a| = |B_0 - a| + \int_0^t \text{sgn}(B_s - a) dB_s + L_t^a,$$

où  $(B_t)$  désigne un mouvement Brownien réel, et  $(L_t^a)$  son temps local en  $a \in \mathbb{R}$ . Toutefois, une différence essentielle entre les deux formules est que l'intégrand qui figure dans l'intégrale stochastique en (1.e) possède une singularité en  $1/r$ , alors que celui qui figure en (1.f) est borné, quoique discontinu. Cette remarque nous a amené à remplacer dans la formule (1.e) la fonction  $(\log r)$  par  $\phi(r)$ , pour une classe générale de fonctions  $\phi$ , par analogie avec ce qui a été fait en dimension 1, où plusieurs auteurs (Fukushima [2], Yamada [9], Yamada - Oshima [10], Yor [11]) ont remplacé dans la formule (1.f), la fonction  $|x|$  par une fonction dont la dérivée, au sens des distributions, appartient à  $L_{loc}^2(dx)$ .

(1.4) La généralisation ainsi obtenue de la formule (1.e) peut encore être étendue en toute dimension  $n \geq 3$ . Remarquons en particulier que, pour  $n \geq 3$ , la formule (1.e) devient :

$$(1.g) \quad \int_0^t ds \{ \log |B_t - B_s - y| - \log |y| \} \\ = \int_0^t (dB_u ; \int_0^t ds \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|^2}) + \nu \int_0^t ds \int_s^t du \frac{1}{|B_u - B_s - y|^2},$$

où  $\nu = \frac{n-2}{2}$ , et  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Nous étendons encore la formule (1.g), en dimension  $n = 3$ , à une classe de fonctions  $\phi(r)$ , qui vérifient (entre autres) la condition  $|\phi'(r)| < \frac{C}{r^2}$  au voisinage de 0.

On dégage en particulier, en s'inspirant de Rosen ([6]), la formule :

$$(1.h) \quad \int_0^t ds \left\{ \frac{1}{|B_t - B_s - y|} - \frac{1}{|y|} \right\} \\ = - \int_0^t (dB_u ; \int_0^u ds \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|^3}) - 2\pi\alpha(y ; T_t) \quad (y \neq 0)$$

(la seule différence, par rapport à Rosen [6], est que l'on explicite ici l'intégrand qui figure dans l'intégrale stochastique).

(1.5) Pour terminer cette introduction, indiquons les propriétés de continuité des temps locaux d'intersection, en dimension  $n = 2$  ou  $3$ , qui jouent un rôle important dans les démonstrations ci-dessous :

(1.i) pour tout  $t > 0$ , l'application :  $y \rightarrow \alpha(y ; T_t)$  est localement lipschitzienne, d'ordre  $(\frac{1}{2} - \epsilon)$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , lorsque  $y$  décrit  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

(1.j) pour tous  $t > 0$ , et  $\delta < t$ , l'application :  $y \rightarrow \alpha(y ; T_t^\delta)$  est localement lipschitzienne, d'ordre  $\frac{1}{2} - \epsilon$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , lorsque  $y$  décrit  $\mathbb{R}^n$ .

(on note  $T_t^\delta$  l'ensemble  $\{(s, u) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 < s < u - \delta < t - \delta\}$ ).

En fait, lorsque  $n = 2$ , on peut remplacer, dans les deux cas,  $(\frac{1}{2} - \epsilon)$  par  $(1 - \epsilon)$ , mais nous n'utiliserons pas ce raffinement.

Ces résultats ont été obtenus respectivement par Le Gall [4] et Rosen [5].

## 2. Etude en dimension 2.

(2.1) Le résultat principal de ce travail est le

Théorème 1 : Soit  $\phi : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , fonction de classe  $C^2$ , telle qu'il existe  $\alpha > 0$ ,

pour lequel  $\int_{0^+} du u^{3/2-\alpha} |\phi''(u)| < \infty$ . Alors :

(i) On a, pour tout  $y \neq 0$  :

$$\int_0^t ds \{ \phi(|B_t - B_s - y|) - \phi(|y|) \}$$

(2.a)

$$= \int_0^t (dB_u ; \int_0^u ds \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|} \phi'(|B_u - B_s - y|)) + \Phi_y(t),$$

où  $\Phi_y(t) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p.s. \left[ \int_0^t ds \int_0^t du \frac{1}{2} \Delta_\epsilon \phi(|B_u - B_s - y|) + \pi_\epsilon \phi'(\epsilon) \alpha(y ; T_t) \right]$

avec  $\Delta_\epsilon \phi(r) = 1_{(r > \epsilon)} \left\{ \frac{\phi'(r)}{r} + \phi''(r) \right\}$ .

(ii) D'autre part, pour tout  $\delta > 0$ , et  $t > \delta$ , on a :

$$\int_0^{t-\delta} ds \{ \phi(|B_t - B_s|) - \phi(|B_{s+\delta} - B_s|) \}$$

(2.b)

$$= \int_\delta^t (dB_u, \int_0^{u-\delta} ds \frac{B_u - B_s}{|B_u - B_s|} \phi'(|B_u - B_s|)) + \Phi^\delta(t),$$

$$\underline{\text{où}} : \Phi^\delta(t) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p.s. \int_0^{t-\delta} ds \int_{s+\delta}^t du \frac{1}{2} \Delta_\epsilon \phi(|B_u - B_s|) + \pi \epsilon \phi'(\epsilon) \alpha(0; T_t^\delta).$$

Les démonstrations des points (i) et (ii) sont tout à fait semblables ; on ne donnera donc les détails que pour l'assertion (i).

On considère tout d'abord la fonction  $F_\epsilon(x) = \phi(\epsilon + |x-y|)$ , et on applique la formule d'Itô au processus  $(F_\epsilon(B_t - B_s), t \geq s)$ . Il vient :

$$(2.c) \quad F_\epsilon(B_t - B_s) - F_\epsilon(0) = \int_s^t (dB_u ; \nabla F_\epsilon(B_u - B_s)) + \frac{1}{2} \int_s^t du \Delta F_\epsilon(B_u - B_s).$$

On intègre ensuite les deux membres de cette identité par rapport à  $(ds)$ , sur  $(0, t)$ . Il reste enfin à faire tendre  $\epsilon$  vers 0. On décompose la démonstration en 3 étapes, qui concernent respectivement le membre de gauche de (2.a), et les 2 expressions figurant dans le membre de droite de (2.a).

Etape 1 : Le membre de gauche obtenu à partir de (2.c) est :

$$\int_0^t ds \{ \phi(\epsilon + |B_t - B_s - y|) - \phi(\epsilon + |y|) \}.$$

Le processus  $(|B_t - B_s - y| ; 0 \leq s \leq t)$  ne s'annulant presque sûrement pas, l'expression ci-dessus converge, lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , vers le membre de gauche de (2.a).

Etape 2 : Nous commençons par établir une inégalité a priori concernant

$$M_t^{(h)} \equiv \int_0^t (dB_u ; \int_0^u ds \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|} h(|B_u - B_s - y|)),$$

en supposant tout d'abord  $h : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , continue, bornée.

On obtient aisément :

$$(2.d) \quad \begin{aligned} E[(M_t^{(h)})^2] &< E\left[\int_0^t du \left(\int_0^u ds h(|B_u - B_s - y|)\right)^2\right] \\ &< t E\left[\left(\int_0^t ds h(|B_s - y|)\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le processus de Bessel  $R_t = |B_t - y|$ , et remarquons que l'on a, d'après la formule d'Itô :

$$(2.e) \quad g(R_t) = g(R_0) + \int_0^t d\beta_s g'(R_s) + \int_0^t ds h(R_s),$$

avec  $(\beta_t)$  mouvement Brownien réel, nul en 0, et  $g$  la fonction nulle en 0, définie par :

$$(2.f) \quad g'(r) = \frac{2}{r} \int_0^r du uh(u)$$

( $g$  est solution de l'équation :  $\frac{1}{2} \left(\frac{g'(r)}{r}\right) + g''(r) = h(r)$ ).

Utilisons l'identité (2.e) pour estimer (2.d). Il vient, si l'on note  $\ell_t^a(y)$  le temps local en  $a$  du processus  $(R_t)$ , et  $\mu_t = 1 + \sup_{s \leq t} |\beta_s|$  :

$$E[(M_t^{(h)})^2] \leq Ct \{E[\int_0^t ds (g'(|B_s - y|))^2] + E[(g(|B_t - y|) - g(|y|))^2]\}$$

$$\leq Ct \{E[\int_0^{\mu_t} da (g'(a))^2 \ell_t^a(y) + (\int_0^{\mu_t} da (g'(a))^2)]\}$$

$$\leq Ct E[(\ell_t^*(y) + \mu_t) \int_0^{\mu_t} da (g'(a))^2] \quad (\ell_t^*(y) = \sup_a \ell_t^a(y))$$

$$\leq Ct \|\ell_t^*(y) + \mu_t\|_2 \|\int_0^{\mu_t} da (g'(a))^2\|_2$$

On utilise maintenant l'inégalité de Hardy dans  $L^2$  : pour tout  $A > 0$ , et toute fonction  $f \in L^2(0, A)$ ,

$$\int_0^A ds \frac{1}{s^2} \left(\int_0^s du f(u)\right)^2 \leq 4 \int_0^A du f^2(u)$$

pour obtenir, à l'aide de l'expression de  $g'$  en fonction de  $h$  (égalité (2.f)) le

Lemme : Il existe  $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  tel que, pour toute fonction  $h$  continue,

$h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , on ait, pour tout  $y$  tel que :  $|y| \leq 1$  :

$$E[(M_t^{(h)})^2] \leq \gamma(t) \|\int_0^{\mu_t} dr r^2 h^2(r)\|_2.$$

Ainsi, l'application :  $h \rightarrow M_t^{(h)}$  se prolonge par continuité en une application de  $L^2([0,1], r^2 dr)$  dans  $L^2(\Omega)$  (on se restreint ici aux fonctions  $h$  à support dans  $[0,1]$ ). Si  $\phi : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^2$ , et vérifie :

$\int_{0+} dr r^{3/2-\alpha} |\phi''(r)| < \infty$ , pour certain  $\alpha > 0$ , alors  $h = \phi' |_{]0,1[}$  appartient

à  $L^2([0,1], r^2 dr)$ . En effet, on a :

$$\int_0^1 dr r^2 \left( \int_r^1 du |\phi''(u)| \right)^2 < \left( \int_0^1 du u^{3/2-\alpha} |\phi''(u)| \right)^2 \int_0^1 \frac{dr}{r^{1-2\alpha}} < \infty.$$

Finalement, l'intégrale stochastique obtenue à partir de (2.c) :

$$\int_0^t ds \int_s^t (dB_u ; \nabla F_\varepsilon(B_u - B_s)) = \int_0^t (dB_u ; \int_0^u ds \nabla F_\varepsilon(B_u - B_s))$$

converge bien en probabilité, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , vers l'intégrale stochastique qui figure en (2.a) (et lorsque  $\phi$  est à support compact, cette convergence a lieu dans  $L^2(\Omega)$ ).

Étape 3 : Il s'agit maintenant d'étudier la convergence, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , du dernier terme provenant de (2.c), qui est :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^t ds \int_s^t du \left\{ \frac{\phi'(\varepsilon+r)}{r} + \phi''(\varepsilon+r) \right\} \Big|_{r=|B_u - B_s - y|} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} dx \alpha(x ; T_t) \left\{ \frac{\phi'(\varepsilon+r)}{r} + \phi''(\varepsilon+r) \right\} \Big|_{r=|x-y|} \\ &= \pi \int_0^\infty dr r \left\{ \frac{\phi'(\varepsilon+r)}{r} + \phi''(\varepsilon+r) \right\} \bar{\alpha}(r ; T_t), \end{aligned}$$

$$\text{où } \bar{\alpha}(r ; T_t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \alpha(y + re^{i\theta} ; T_t).$$

$$\text{Posons } J_{(a,b)}(\varepsilon) = \int_a^b dr r \left\{ \frac{\phi'(\varepsilon+r)}{r} + \phi''(\varepsilon+r) \right\} \bar{\alpha}(r ; T_t).$$

La fonction :  $r \rightarrow \bar{\alpha}(r ; T_t)$  étant continue sur  $]0, \infty[$ , et à support borné, la convergence de  $J_{(1,\infty)}(\varepsilon)$ , lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ne pose pas de problème. En ce qui concerne  $J_{(0,1)}(\varepsilon)$ , on écrit :



$$(2.g) \quad J_{(0,1)}(\varepsilon) = \int_0^1 dr \, r \left\{ \frac{\phi'(\varepsilon+r)}{r} + \phi''(\varepsilon+r) \right\} [\bar{\alpha}(r; T_t) - \alpha(y; T_t)] \\ + \alpha(y; T_t) \int_0^1 dr \{ \phi'(\varepsilon+r) + r \phi''(\varepsilon+r) \}.$$

A l'aide de l'inégalité :  $|\bar{\alpha}(r; T_t) - \alpha(y; T_t)| < C_\omega r^{1/2-\alpha}$ , valable pour  $r$  suffisamment petit (d'après (1.i)), on montre aisément que la première intégrale qui figure en (2.g) converge, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , vers :

$$\int_0^1 dr \, r \left\{ \frac{\phi'(r)}{r} + \phi''(r) \right\} [\bar{\alpha}(r; T_t) - \alpha(y; T_t)],$$

intégrale qui est absolument convergente.

D'autre part, après intégration par parties, on voit que la seconde intégrale converge lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , vers  $\phi'(1)$ . Finalement, on a obtenu la convergence de

$J_{(0,\infty)}(\varepsilon)$ , lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , vers la quantité suivante :

$$J_{(0,\infty)}(0+) \equiv \int_1^\infty dr \, r \left\{ \frac{\phi'(r)}{r} + \phi''(r) \right\} \bar{\alpha}(r; T_t) \\ + \int_0^1 dr \, r \left\{ \frac{\phi'(r)}{r} + \phi''(r) \right\} [\bar{\alpha}(r; T_t) - \alpha(y; T_t)] + \alpha(y; T_t) \phi'(1).$$

Les mêmes arguments permettent de démontrer que  $\Phi_y(t) \equiv \pi J_{(0,\infty)}(0+)$ , ce qui termine la démonstration de la formule (2.a).

(2.2) Plutôt que de donner dès maintenant des exemples d'application des formules (2.a) et (2.b), nous comparons les comportements asymptotiques de  $\Phi_y(t)$  et  $\Phi^\delta(t)$ , lorsque  $y$  et  $\delta$  tendent vers 0. On a le :

Théorème 2 : Soit  $t > 0$ , et  $\phi : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , fonction de classe  $C^2$ , telle que :

- a) il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\int_{0+}^\infty dr \, r^{3/2-\alpha} |\phi''(r)| < \infty$   
 b) il existe  $\varepsilon > 0$  tel que :  $\int^\infty dr \, r \phi^2(r) e^{-r^2/2\varepsilon} < \infty$

Alors :

$$\lim_{|y| \rightarrow 0} \{ \Phi_y(t) + t \phi(|y|) \} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \{ \Phi^\delta(t) + t E[\phi(|B_\delta|)] \},$$

Les deux limites étant des limites en probabilité (1).

Démonstration : D'après le lemme dégagé dans l'étape 2, chacune des intégrales stochastiques qui figurent dans les formules (2.a) et (2.b) converge en probabilité, lorsque  $|y| \rightarrow 0$ , et  $\delta \rightarrow 0$ , vers la même limite. On a donc, d'après ces 2 formules:

$$\lim_{|y| \rightarrow 0} \{\Phi_y(t) + t \phi(|y|)\} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \{\Phi^\delta(t) + \int_0^{t-\delta} ds \phi(|B_{S+\delta} - B_S|)\}$$

Remarquons maintenant que, à l'aide de b), on a :

$$(2.h) \quad \delta E[\phi^2(|B_\delta|)] \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

En effet,  $\delta E[\phi^2(|B_\delta|)] = \int_0^\infty dr r \phi^2(r) e^{-r^2/2\delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ , par convergence dominée.

A l'aide de (2.h) principalement, on montre maintenant :

$$(2.i) \quad \int_0^{t-\delta} ds \phi(|B_{S+\delta} - B_S|) - t E[\phi(|B_\delta|)] \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

ce qui terminera la démonstration du théorème 2.

D'après (2.h), on peut remplacer, en (2.i),  $\int_0^{t-\delta} ds \phi(|B_{S+\delta} - B_S|)$  par

$$\int_0^t ds \phi(|B_{S+\delta} - B_S|). \text{ Posons maintenant } \bar{\phi}_\delta = E[\phi(|B_\delta|)], \text{ et } \tilde{\phi}_\delta(r) = \phi(r) - \bar{\phi}_\delta.$$

On a :

$$\begin{aligned} & E\left[\left(\int_0^t ds (\phi(|B_{S+\delta} - B_S|) - \bar{\phi}_\delta)\right)^2\right] \\ &= 2 \int_0^t ds \int_s^t ds' E[\tilde{\phi}_\delta(|B_{S+\delta} - B_S|) \tilde{\phi}_\delta(|B_{S'+\delta} - B_{S'}|)] \\ (*) &= 2 \int_0^t ds \int_s^{s \wedge (s+\delta)} ds' E[\tilde{\phi}_\delta(|B_{S+\delta} - B_S|) \tilde{\phi}_\delta(|B_{S'+\delta} - B_{S'}|)] \\ &< 2 \int_0^t ds \int_s^{s+\delta} ds' E[\phi^2(|B_\delta|)] = 2t\delta E[\phi^2(|B_\delta|)], \end{aligned}$$

---

(1) dans la suite, sauf précision contraire, toutes les limites de v.a sont des limites en probabilité.

et, d'après (2.h), cette dernière expression tend vers 0, lorsque  $\delta \rightarrow 0$ .  
 (Soulignons que l'identité (\*) provient de ce que les accroissements du mouvement Brownien sont indépendants).

(2.3) Nous donnons maintenant quelques exemples d'applications particulièrement intéressantes des théorèmes 1 et 2.

①  $\phi(r) = \log r$ . On a alors  $\Delta_\varepsilon \phi(r) = 0$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , et la formule (1.a) devient :

$$(2.j) \quad \int_0^t ds \{ \log |B_t - B_s - y| - \log |y| \}$$

$$= \int_0^t (dB_u ; \int_0^u ds \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|^2}) + \pi\alpha(y ; T_t).$$

De plus, d'après le théorème 2,  $\gamma(T_t) \equiv \lim_{|y| \rightarrow 0} [\pi\alpha(y ; T_t) - t \log \frac{1}{|y|}]$  existe, en probabilité, et l'on a :

$$(2.k) \quad \int_0^t ds \log |B_t - B_s| = \int_0^t (dB_u ; \int_0^u ds \frac{B_u - B_s}{|B_u - B_s|^2}) + \gamma(T_t).$$

Remarquons que la formule (2.j) permet également de donner une interprétation de  $\alpha(y ; T_t)$  comme limite de temps locaux. Pour cela, notons  $\lambda_t^a(z)$  le temps local au niveau  $a$  de la martingale locale  $\log |B_t - z|$ . On a alors la

Proposition : Les identités suivantes sont satisfaites :

$$1) \quad \pi\alpha(y ; T_t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^t ds \{ \lambda_t^{-N}(B_s + y) - \lambda_s^{-N}(B_s + y) \}$$

$$2) \quad \pi\alpha(0 ; T_t^\delta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^{t-\delta} ds \{ \lambda_t^{-N}(B_s) - \lambda_{s+\delta}^{-N}(B_s) \}.$$

Démonstration : Pour montrer 1), par exemple, on utilise la formule de Tanaka :

$$((\log |B_t - B_s - y|) + N)^+ - (\log |y| + N)^+ = \int_s^t (dB_u ; \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|^2}) 1_{(|B_u - B_s - y| > e^{-N})}$$

$$+ \frac{1}{2} (\lambda_t^{-N}(B_s - y) - \lambda_s^{-N}(B_s + y)).$$

On intègre ensuite les deux membres par rapport à  $(ds)$  sur  $(0, t)$ , puis on fait tendre  $N$  vers  $+\infty$ .

②  $\phi(r) = (\log r)^2$ . On a alors :  $\frac{1}{2} \Delta_\epsilon \phi(r) = 1_{(r > \epsilon)} / r^2$ , et, d'après les théorèmes 1 et 2,

$$\Phi_y(t) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t ds \int_s^t du \frac{1_{|B_u - B_s - y| > \epsilon}}{|B_u - B_s - y|^2} - 2\pi \left(\log \frac{1}{\epsilon}\right) \alpha(y; T_t)$$

existe, ainsi que :  $\lim_{y \rightarrow 0} \{\Phi_y(t) + t(\log|y|)^2\}$ .

③  $\phi(r) = r^{-\beta}$ . Lorsque  $0 < \beta < \frac{1}{2}$ ,  $\phi$  satisfait les hypothèses du théorème 1. On a alors :

$$\Phi_y(t) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_0^t ds \int_s^t du \frac{\beta^2}{2|B_u - B_s - y|^{\beta+2}} - \frac{\pi\beta}{\epsilon^\beta} \alpha(y; T_t) \right]$$

et  $\lim_{|y| \rightarrow 0} (\Phi_y(t) + t/|y|^\beta)$  existe.

### 3. Etude en dimension $n > 3$ :

(3.1) Le cas des dimensions  $n > 4$  pose beaucoup moins de problèmes que celui des dimensions  $n=2$ , ou 3, car la trajectoire Brownienne n'admet p.s. pas de points doubles (en fait, on utilise aussi la propriété : pour  $y \neq 0$ , il n'existe pas de réels  $s, u > 0$  tels que  $B_u - B_s = y$ ).

Soit donc  $\phi : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , fonction de classe  $C^2$ . On obtient alors sans difficulté les variantes suivantes des identités (1.a) et (1.b) :

$$\int_0^t ds \{ \phi(|B_t - B_s - y|) - \phi(|y|) \}$$

(3.a)

$$= \int_0^t (dB_u ; \int_0^u ds \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|} \phi'(|B_u - B_s - y|)) + \Phi_y(t), \quad (y \neq 0)$$

où  $\Phi_y(t) = \int_0^t ds \int_s^t du \frac{1}{2} \left\{ \frac{(n-1)\phi'(r)}{r} + \phi''(r) \right\} \Big|_{r=|B_u - B_s - y|}$  ainsi que :

$$\int_0^{t-\delta} ds \{ \phi(|B_t - B_s|) - \phi(|B_{s+\delta} - B_s|) \}$$

(3.b)

$$= \int_\delta^t (dB_u ; \int_0^{u-\delta} ds \frac{B_u - B_s}{|B_u - B_s|} \phi'(|B_u - B_s|)) + \Phi^\delta(t), \quad (\delta > 0)$$

$$\text{où } \Phi^\delta(t) = \int_0^{t-\delta} ds \int_{s+\delta}^t du \frac{1}{2} \left\{ \frac{(n-1)\phi'(r)}{r} + \phi''(r) \right\} \Big|_{r=|B_u - B_s|}.$$

Remarquons ensuite que le lemme qui figure dans l'étape 2 ci-dessus est encore valable, sous la même forme, et ceci même en dimension  $n = 3$ .

La démonstration est seulement modifiée par le fait que  $g'$  est maintenant solution de :

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{(n-1)}{r} g'(r) + g''(r) \right\} = h(r),$$

et l'on prend :

$$g'(r) = \frac{2}{r^{n-1}} \int_0^r du u^{n-1} h(u),$$

puis on utilise ensuite l'inégalité de Hardy dans  $L^2$ , sous une forme légèrement différente, pour obtenir l'inégalité voulue.

Le lemme étant donc toujours valable, on a la variante suivante du théorème 2.

Théorème 2': ( $n > 4$ ) : Soit  $t > 0$ , et  $\phi : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , fonction de classe  $C^2$  telle que

$$a') \int_{0+} dr r^2 (\phi'(r))^2 < \infty, \text{ et}$$

$$b') \text{ il existe } \varepsilon > 0 \text{ tel que } \int_0^\infty dr r^{n-1} \phi^2(r) e^{-r^2/2\varepsilon} < \infty.$$

Alors :  $\lim_{|y| \rightarrow 0} \{ \Phi_y(t) + t \phi(|y|) \} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \{ \Phi^\delta(t) + t E[\phi(|B_\delta|)] \}$ , les deux limites ayant lieu en probabilité.

(3.2) Le cas de la dimension  $n = 3$  est beaucoup plus semblable à celui de la dimension  $n = 2$ . Cependant, on peut, pour  $n = 3$ , aller "plus loin" qu'en dimension 2, en établissant la validité des identités (3.a) et (3.b) pour une classe de fonctions  $\phi$  telles que la singularité permise à  $\phi'$  au voisinage de  $r = 0$

soit de l'ordre de  $1/r^2$  (en dimension 2, la singularité permise à  $\phi'$  au voisinage de  $r = 0$  est, grosso modo, de l'ordre de  $1/r$ ). De façon précise, on a le

Théorème 3 : Soit  $\phi : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  fonction de classe  $C^2$ , telle que :

c) Soit : (c.1)  $\int_{0+} dr r^2 \phi'(r)^2 < \infty$ , soit : (c.2)  $|\phi'(r)| < \frac{C}{r^2}$ ,

dans un voisinage de 0.

et :

d) il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\int_{0+} dr r^{5/2-\alpha} |\phi''(r)| < \infty$ .

Alors, les formules (2.a) et (2.b) sont satisfaites avec :

$$\Phi_y(t) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t ds \int_s^t du \frac{1}{2} \Delta_\varepsilon \phi(|B_u - B_s - y|) + 2\pi\varepsilon^2 \phi'(\varepsilon) \alpha(y; T_t)$$

où :

$$\Delta_\varepsilon \phi = 1_{(r > \varepsilon)} \left\{ \frac{(n-1)\phi'(r)}{r} + \phi''(r) \right\},$$

et :

$$\Phi^\delta(t) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{t-\delta} ds \int_{s+\delta}^t du \frac{1}{2} \Delta_\varepsilon \phi(|B_u - B_s|) + 2\pi\varepsilon^2 \phi'(\alpha) \alpha(0; T_t^\delta)$$

En outre, sous les hypothèses (c.1) et (d), on a :

$$\lim_{|y| \rightarrow 0} \{ \Phi_y(t) + t \phi(|y|) \} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \{ \Phi^\delta(t) + t E \phi(|B_\delta|) \},$$

les deux limites ayant lieu en probabilité.

Démonstration : On utilise la même méthode qu'en dimension 2. Examinons comment les détails des arguments des 3 étapes sont modifiés :

- l'étape 1 ne nécessite pas de modification.

- pour l'étape 2, la validité du lemme, remarquée plus haut, permet de passer à la limite, dans l'intégrale stochastique, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , sous l'hypothèse (c.1). Sous l'hypothèse (c.2), on utilise un argument de convergence dominée, après avoir remarqué que, quitte à supposer :  $|\phi'(r)| < \frac{C}{r^2}$  sur tout  $\mathbb{R}_+$  (ce qui est possible par localisation), le crochet de la martingale locale

$$\int_0^t (dB_u ; \int_0^u ds \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|} \phi'(\varepsilon + |B_u - B_s - y|))$$

est majoré par :  $\int_0^t du \left( \int_0^u ds \frac{C}{|B_u - B_s - y|^2} \right)^2$ , expression dont l'espérance est

elle-même majorée par :

$$t C^2 E \left[ \left( \int_0^t \frac{ds}{|B_s - y|^2} \right)^2 \right] < \infty$$

(en fait, on montre aisément à l'aide de la formule :

$$\log |B_t - y| - \log |y| = \int_0^t \frac{dB_u}{|B_u - y|} + \nu \int_0^t \frac{du}{|B_u - y|^2}, \quad \text{où } \nu = \frac{n-2}{2},$$

que, pour  $y \neq 0$ ,  $\int_0^t \frac{ds}{|B_s - y|^2}$  possède des moments de tous ordres).

- pour l'étape 3, on passe, comme en dimension 2, en coordonnées polaires, d'où l'apparition de la mesure (sur  $\mathbb{R}_+$ )  $4\pi r^2 dr$ .

Enfin, une intégration par parties fournit le terme de correction  $2\pi \varepsilon^2 \phi'(\varepsilon) \alpha(y; T_t)$  dans l'expression de  $\Phi_y(t)$ .

(3.3) De même que pour la dimension 2, nous développons maintenant quelques exemples particulièrement importants.

①  $\phi(r) = \log r$ . En toute dimension  $n > 3$ , on a :

$$\Phi_y(t) \equiv \nu \int_0^t ds \int_s^t du \frac{1}{|B_u - B_s - y|^2}, \quad \text{où } \nu = \frac{n-2}{2},$$

et, d'après le théorème 2',

$$(3.c) \quad \lim_{|y| \rightarrow 0} \left\{ \Phi_y(t) - t \log \frac{1}{|y|} \right\} \text{ existe.}$$

Des résultats voisins ont été obtenus par Kusuoka en dimension 4 (voir [1]).

Soulignons ici que l'existence de la limite (3.c) est remarquable. En effet, on a, d'après la formule d'Itô :

$$(3.d) \quad \log |B_t - B_s - y| - \log |y| = \int_s^t (dB_u ; \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|^2}) + \nu \int_s^t \frac{du}{|B_u - B_s - y|^2}.$$

En divisant les 2 membres par  $\log \frac{1}{|y|}$ , on obtient sans difficulté la convergence en probabilité de  $\frac{\nu}{\log \frac{1}{|y|}} \int_s^t \frac{du}{|B_u - B_s - y|^2}$  vers 1, lorsque  $|y| \rightarrow 0$ . Mais, il

n'est pas vrai que  $\nu \int_s^t \frac{du}{|B_u - B_s - y|^2} - \log \frac{1}{|y|}$  converge.

En fait, on a, grâce à (3.d) :

$$(3.e) \quad \frac{1}{\sqrt{\log \frac{1}{|y|}}} \left( \nu \int_s^t \frac{du}{|B_u - B_s - y|^2} - \log \frac{1}{|y|} \right) \xrightarrow[|y| \rightarrow 0]{(d)} \nu^{-1/2} \cdot N,$$

où  $N$  est une variable gaussienne, centrée, réduite.

Ce résultat est à comparer avec (3.c), où la normalisation en  $\frac{1}{\log \frac{1}{|y|}}$  a disparu.

On peut expliquer partiellement cette disparition par la remarque suivante :

pour  $t > 0$  fixé, et  $s < t$ , notons  $X_s(y)$  le membre de gauche de (3.e).

En utilisant la propriété d'indépendance des accroissements du mouvement Brownien, il n'est pas difficile de renforcer (3.e) en :

$$(3.e') \quad (X_s(y), X_{s'}(y)) \xrightarrow[|y| \rightarrow 0]{(d)} \nu^{-1}(N, N')$$

où  $s \neq s'$ , et  $N$  et  $N'$  sont deux variables gaussiennes, centrées, réduites, indépendantes.

On en déduit aisément que :

$$\frac{1}{\sqrt{\log \frac{1}{|y|}}} (\Phi_y(t) - t \log \frac{1}{|y|}) \equiv \int_0^t ds X_s(y)$$

converge dans  $L^2$  vers 0, résultat qui est bien évidemment en accord avec (3.c).

②  $\phi(r) = (\log r)^2 - \frac{1}{\nu} (\log r)$ . En toute dimension  $n > 3$ , on a alors :

$$\Phi_y(t) = 2\nu \int_0^t ds \int_s^t du \frac{\log |B_u - B_s - y|}{|B_u - B_s - y|^2},$$

et  $\Phi_y(t) + t \{ (\log \frac{1}{|y|})^2 + \frac{1}{\nu} \log \frac{1}{|y|} \}$  converge en probabilité, lorsque  $y \rightarrow 0$ .



$$\textcircled{3} \quad \phi(r) = r^{-\beta}.$$

- Lorsque  $0 < \beta < \frac{1}{2}$ , on a, en toute dimension  $n > 3$  :

$$\phi_y(t) = \frac{\beta(\beta+2-n)}{2} \int_0^t ds \int_s^t du \frac{1}{|B_u - B_s - y|^{\beta+2}},$$

et  $\lim_{|y| \rightarrow 0} (\phi_y(t) + t/|y|^\beta)$  existe.

- Lorsque  $\frac{1}{2} < \beta < 1$ , et  $n = 3$ , les conditions (c.2) et d) du théorème 3 sont satisfaites, et on a :

$$\phi_y(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\beta(\beta-1)}{2} \int_0^t ds \int_s^t du \frac{1}{|B_u - B_s - y|^{\beta+2}} + \frac{2\pi}{\epsilon^{\beta-1}} \alpha(y ; T_t) \right].$$

Notons en particulier que, dans le cas  $\beta = 1$ , la formule (3.a) devient :

$$\int_0^t ds \left\{ \frac{1}{|B_t - B_u - y|} - \frac{1}{|y|} \right\}$$

(3.f)

$$= - \int_0^t (dB_u ; \int_0^u ds \frac{B_u - B_s - y}{|B_u - B_s - y|^3}) - 2\pi\alpha(y ; T_t),$$

ce qui complète la formule obtenue par J. Rosen en [6], où l'intégrand de  $(dB_u)$  n'était pas tout à fait explicité.

De même que pour la dimension 2, on déduit aisément de la formule (3.f) une approximation de  $\alpha(y ; T_t)$  à l'aide des temps locaux de  $(\frac{1}{|B_t - z|}, t > 0)$ .

Proposition : Pour tout  $z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , et tout  $a \in \mathbb{R}_+$ , notons  $\lambda_t^a(z)$  le temps local au niveau  $a$  de la martingale locale  $\frac{1}{|B_t - z|}$ . On a alors, pour tout  $\delta > 0$ , et  $t > 0$  :

$$1) \quad 2\pi\alpha(y ; T_t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^t ds \{ \lambda_t^N(B_s + y) - \lambda_s^N(B_s + y) \}$$

$$2) \quad 2\pi\alpha(0 ; T_t^\delta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_\delta^t ds \{ \lambda_t^N(B_s) - \lambda_{s+\delta}^N(B_s) \}.$$

On utilise, pour la démonstration de cette proposition, la formule de Tanaka qui permet de développer  $\{(\frac{1}{|B_t - B_s - y|} - N)^-, t \geq s\}$ , ce qui fournit la décomposition

canonique de la semi-martingale :

$$\int_0^t ds \left\{ \left( \frac{1}{|B_t - B_s - y|} - N \right)^- - \left( \frac{1}{|y|} - N \right)^- \right\}$$

puis on fait tendre  $N$  vers  $+\infty$ .

(3.4) Indiquons enfin que l'étude asymptotique de  $2\pi\alpha(y; T_t) - \frac{1}{|y|}$ ,

lorsque  $|y| \rightarrow 0$ , est menée en [12], à l'aide de (3.f). On utilise d'ailleurs dans la démonstration des arguments analogues à (3.e').

## REFERENCES :

- [1] S. ALBEVERIO, Ph. BLANCHARD, : Newtonian diffusions and planets, with a  
R. HØEGH-KROHN remark on non-standard Dirichlet forms and  
polymers.  
A paraître in Proc. L.M.S. Symposium,  
Swansea (1983). L.N. in Maths. (Springer).
- [2] M. FUKUSHIMA : A decomposition of additive functionals of  
of finite energy.  
Nagoya Math. J. 74 (1979), 137-168.
- [3] D. GEMAN, J. HOROWITZ, J. ROSEN : A local time analysis of intersections of  
Brownian paths in the plane. Annals of  
Proba., 12 (1984), 86-107.
- [4] J.F. LE GALL : Sur le temps local d'intersection du mou-  
vement Brownien plan et la méthode de re-  
normalisation de Varadhan. Dans ce volume.
- [5] J. ROSEN : A local time approach to the self-inter-  
sections of Brownian paths in space.  
Comm. Math. Phys. 88, 327-338 (1983).
- [6] J. ROSEN : A representation for the intersection local  
time of Brownian motion in space.  
Preprint (1984).
- [7] J. ROSEN : Tanaka's formula and renormalization for  
intersections of planar Brownian motion.  
Preprint (1984).
- [8] S. VARADHAN : Appendice à "Euclidean quantum field  
theory", par K. Symanzik, in : Local  
quantum theory, R. Jost (ed.), Academic  
Press (1969).
- [9] T. YAMADA : On some representations concerning sto-  
chastic integrals. A paraître dans Prob.  
Math. Stat. 4.
- [10] T. YAMADA, Y. OSHIMA : On some representations of continuous addi-  
tive functionals locally of finite energy.  
J. Math. Soc. Japan 36, n° 2, 1984.
- [11] M. YOR : Sur la transformée de Hilbert des temps  
locaux Browniens, et une extension de la  
formule d'Itô.  
Sém. Proba. XVI, Lect. Notes 920. Springer  
(1982).
- [12] M. YOR : Renormalisation et convergence en loi pour  
les temps locaux d'intersection du mouvement  
Brownien dans  $\mathbb{R}^3$ . Dans ce volume.

Je voudrais remercier J.Y. Calais, M. Génin et J.F. Le Gall pour de nombreuses discussions au sujet de cet article.