FRANÇOIS CHARLOT

Sur la démonstration des formules en théorie discrète du potentiel

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 612-613
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__612_0>

SUR LA DEMONSTRATION DES FORMULES EN THEORIE DISCRETE DU POTENTIEL

par F. Charlot

En théorie discrète du potentiel, on associe à un noyau N divers noyaux (noyau potentiel, noyaux de réduction, etc.), et on établit un certain nombre d'identités relatives à ces noyaux à l'aide de calculs plus ou moins aisés. Dans [1] Dellacherie et Meyer montrent que ces calculs se ramènent à des calculs sur des séries formelles à indéterminées non commutatives, ce qui permet d'opérer sans se soucier si les expressions manipulées ont réellement un sens. Mais, par ailleurs, beaucoup de ces identités ont, quand N est sousmarkovien, une interprétation probabiliste et une démonstration simple à l'aide de la propriété de Markov forte. Et le théorème que nous allons démontrer ici implique que deux séries formelles à coefficients positifs sont égales dès qu'elles fournissent les mêmes noyaux chaque fois qu'on remplace leurs indéterminées par des noyaux sousmarkoviens : ainsi, le calcul markovien permet tout aussi bien d'établir en toute généralité les identités envisagées, ce qui justifie une pratique heuristique bien établie.

Comme dans [1], on se contentera de considérer l'anneau $S(x,y,z)$ des séries formelles réelles à trois indéterminées non commutatives, et on désignera par $S^+(x,y,z)$ l'ensemble des séries à coefficients positifs. Pour $n \in \mathbf{N} = \{0,1,\dots\}$, on appellera <u>exposant d'ordre</u> n toute partition de $\{1,\dots,n\}$ en trois parties A,B,C, deux d'entre elles pouvant être vides (les trois étant vides pour $n=0$) ; on devine sans peine ce qu'est l'exposant d'un monôme de degré n : par exemple, l'exposant de y^2xyz^3x est $\{3,8\},\{1,2,4\},\{5,6,7\}$.

THEOREME.- <u>Deux éléments</u> α <u>et</u> β <u>de</u> $S^+(x,y,z)$ <u>sont égaux ssi il existe</u> $\delta \in]0,1]$ <u>tel que</u>, <u>pour tout exposant</u> A,B,C, <u>on ait</u>

$$\alpha(T\delta_A,T\delta_B,T\delta_C) = \beta(T\delta_A,T\delta_B,T\delta_C)$$

<u>où</u> T <u>est l'opérateur de translation sur</u> $\mathbf{N}$ (i.e. $Tf(n)=f(n+1)$) <u>et</u> δ_A (resp ...) <u>est l'opérateur de multiplication par</u> $\delta 1_A$ (resp ...).

La nécessité est claire. La suffisance va résulter aisément du lemme suivant

LEMME.- Soient γ un monôme de degré n et de coefficient unité, δ un élément de $]0,1]$ et ε_0 la masse de Dirac en O. Si A,B,C est un exposant d'ordre $m \leq n$, alors la mesure $\varepsilon_0\gamma(T\delta_A, T\delta_B, T\delta_C)$ est nulle si A,B,C est distinct de l'exposant de γ, et est égale à $\delta^n\varepsilon_n$ si A,B,C est égal à l'exposant de γ.

D/ Soit $\hat{A},\hat{B},\hat{C}$ l'exposant de γ : il n'y a qu'à suivre les n bonds d'une particule partant de O et se déplaçant suivant la stratégie $N_1,\ldots,N_n$ où N_i est le noyau $T\delta_H$, H étant égal à A,B,C resp. suivant que i appartient à $\hat{A},\hat{B},\hat{C}$ resp. .

On achève alors la démonstration du théorème par un raisonnement par récurrence : si α_n (resp β_n) désigne la somme des monômes de degré $\leq n$ de α (resp β), alors le lemme (et l'hypothèse faite sur α,β) permet de déduire $\alpha_n = \beta_n$ à partir de $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1}$.

COROLLAIRE.- Deux éléments α et β de $S^+(x,y,z)$ sont égaux ssi, pour tout espace mesurable $(E,\underline{\underline{E}})$, on a $\alpha(M,N,P) = \beta(M,N,P)$ pour tout triplet M,N,P de noyaux sousmarkoviens (et même de norme < 1) sur $(E,\underline{\underline{E}})$.

Ainsi, on peut par exemple obtenir des formules du type "entrée et sortie", qui mènent au principe du maximum (cf [2]), ou faire de la théorie de la R-récurrence (cf [3] et [4]), pour des noyaux positifs quelconques, avec des démonstrations probabilistes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DELLACHERIE (C.) et MEYER (P.A.) : Probabilités et Potentiels III. Théorie discrète du Potentiel (Hermann, Paris 1983)

[2] REVUZ (D.) : Markov Chains (North-Holland, Amsterdam 1975)

[3] CELLIER (D.) : Méthode de fission pour l'étude de la récurrence des chaines de Markov (Thèse de 3e cycle, Rouen 1980)

[4] TWEEDIE (R.L.) : R-Theory for chains on a general state space (Ann. Prob. 2, 840-878, 1974)

François CHARLOT

Cité 5 Juillet
Bat. 17, App. 10

Dar El Beida
Alger