Shiqi Song

Marc Yor

Inégalités pour les processus self-similaires arrêtés à un temps quelconque

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 230-245

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__230_0>

INEGALITES POUR LES PROCESSUS SELF-SIMILAIRES ARRÊTÉS A UN TEMPS QUELCONQUE

S. SONG et M. YOR

1. Ce travail a deux objets :

- le premier est de présenter de façon aussi simple que possible les inégalités entre processus arrêtés à un temps quelconque [2] dans le cas particulier des processus self-similaires ;

- le second est de dégager des relations spécifiques entre les lois de certaines variables aléatoires qui, dans le cas particulier des processus self-similaires, interviennent naturellement dans l'étude des inégalités entre processus arrêtés à un temps quelconque.

2. Dans tout ce travail, $(X_t, t \geq 0)$ désigne un processus continu, à valeurs positives, qui satisfait l'identité en loi :

(2.a) pour tout $\lambda > 0$, $(X_{\lambda t}, t \geq 0) \overset{(d)}{=} (\lambda X_t, t \geq 0)$.

Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonction de Young, et ψ la fonction de Young conjuguée.

Considèrons les deux quantités suivantes :

$$\|X\|_w^\psi = \inf\{C : \text{pour toute variable } L \geq 0,\ E(X_L) \leq C\|L\|_\phi\}$$

($\|\cdot\|_w^\psi$ est une sorte de semi-norme de Luxemburg faible)

$$\|X\|_{\sigma(\phi)} = \inf\{\mu : E\big[\sup_t (\tfrac{1}{\mu} X_t - \phi(t))^+\big] \leq 1\}.$$

On a alors, en particularisant les énoncés du théorème (2.1.1), et du corollaire (2.4.3) de [2] le :

Theorème 1 ([2]) : *Si X satisfait l'hypothèse de self-similarité (2.a), on a :*

(*i*) $\|X\|_{\sigma(\phi)} \leq \|X\|_w^\psi \leq 2\|X\|_{\sigma(\phi)}$

(*ii*) $\frac{1}{2}\|X_1^*\|_\psi \leq \|X\|_w^\psi \leq 20\,\|X_1^*\|_\psi$, *où* $X_1^* = \sup_{t\leq 1} X_t$.

Il apparaît plausible, à la simple lecture de cet énoncé, qu'il existe des relations d'intégrabilité entre les lois des variables

$$S_\phi = \sup_{t\geq 0} (X_t - \phi(t)) \quad \text{et} \quad X_1^*.$$

Il en est bien ainsi, comme le montre le :

Lemme 1 : *1) Pour tout* $a \geq 0$, $P(\psi(X_1^*) \geq a) \leq P(S_\phi \geq a)$

2) Soit $k > 1$. *Pour tout* $a \geq 0$,

$$P(S_\phi \geq a) \leq 2P(\psi(2k\, X_1^*) \geq a) + \sum_{n=1}^{\infty} P(\psi(2k\, X_1^*) \geq k^n a).$$

Démonstration :

1) (i) Rappelons que l'on a :

$$\psi(t) = \sup_{s\geq 0} (ts-\phi(s)), \text{ d'où l'on déduit : } \psi^{-1}(a) = \inf_{t>0} \left(\frac{a+\phi(t)}{t}\right)$$

(ii) Remarquons maintenant que :

$$\sup_{t\geq 0} (X_t - \phi(t)) = \sup_{t\geq 0} (X_t^* - \phi(t)),$$

d'où : $$P(\sup_t (X_t - \phi(t)) > a) \geq \sup_t P(X_t^* - \phi(t) > a)$$

$$= \sup_t P(t\, X_1^* - \phi(t) > a), \text{ à l'aide de } (2.a).$$

On a maintenant :

$$P(t\, X_1^* - \phi(t) > a) = P(X_1^* > \frac{a+\phi(t)}{t}),$$

et l'on déduit de (i) que :

$$\sup_t P(t\, X_1^* - \phi(t) > a) \geq P(X_1^* \geq \psi^{-1}(a)) = P(\psi(X_1^*) \geq a).$$

2) (i) Inversement, on a, à l'aide de la continuité du processus X :

$$P(\sup_t (X_t - \phi(t)) > a) \leq \sup_{L\, v.a \geq 0} P(X_L^* - \phi(L) \geq a).$$

Pour tout $x > 0$, et $k > 1$, on a : $\Omega = (L \leq x) \cup \bigcup_{n\geq 0} (k^n x \leq L < (k^{n+1} x)$, d'où l'on déduit :

$$P(X_L^* - \phi(L) \geq a) \leq P(X_x^* \geq a) + \sum_{n=0}^{\infty} P(X^*_{k^{n+1}x} \geq \phi(k^n x) + a)$$

$$\leq P(X_1^* \geq \frac{a}{x}) + \sum_{n=0}^{\infty} P\left(X_1^* \geq \frac{\phi(k^n x)+a}{k^{n+1} x}\right).$$

(ii) On prendra dorénavant $x = \phi^{-1}(a)$, et on utilisera l'inégalité :

$$(2.b) \qquad \psi\left(\frac{2a}{\phi^{-1}(a)}\right) \geq a.$$

On a ainsi :

$$P(X_L^* - \phi(L) \geq a) \leq P(\psi(2X_1^*) \geq a) + \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\psi(2k\, X_1^*) \geq \psi\left(\frac{2\,\phi(k^n x)}{\phi^{-1}(\phi(k^n x))}\right)\right)$$

Or, on a : $\psi\left(\frac{2\,\phi(k^n x)}{\phi^{-1}(\phi(k^n x))}\right) \geq \phi(k^n x) \geq k^n \phi(x) = k^n a,$

en utilisant successivement l'inégalité (2.*b*), la convexité de ϕ, et la définition de x.

On a ainsi démontré la seconde partie du lemme 1. □

On peut maintenant préciser les relations d'intégrabilité qui existent entre les variables S_ϕ et X_1^*. On a la :

<u>*Proposition 1*</u> *: Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonction convexe, nulle en 0. Alors :*

$$E[g(\psi(X_1^*))] \leq E[g(S_\phi)] \leq \left(2 + \frac{1}{k-1}\right) E[g(\psi(2k\, X_1^*))].$$

Cette double inégalité découle immédiatement du lemme 1, et de la remarque suivante : soient X et Y deux variables positives telles que :

$$P(X \geq a) \leq \sum_n \alpha_n\, P(Y \geq \beta_n a) \qquad (\alpha_n \geq 0\ ;\ \beta_n \geq 1).$$

On a alors :

$$E[g(X)] = \int_0^\infty dg(a)\, P(X \geq a) \leq \sum_n \int_0^\infty dg(a)\, \alpha_n\, P(Y \geq \beta_n a)$$

$$\leq \sum_n \alpha_n\, E\left[g\left(\frac{Y}{\beta_n}\right)\right] \leq \sum_n \frac{\alpha_n}{\beta_n} E[g(Y)].$$

3. Dans le cas particulier où $\phi(t) = t^p$ $(p > 1)$, on peut préciser de plusieurs manières les résultats du paragraphe précédent.

Remarquons tout d'abord l'identité en loi :

$$(3.a) \qquad \sup_{t\geq 0} (X_t - t^p) \overset{(d)}{=} \sup_{t\geq 0} \left(\frac{X_t}{1+t^p}\right)^q \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

<u>Démonstration</u> : Soit $a > 0$. On a les égalités (éventuellement en loi) entre les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}(\sup_{t\geq 0} (X_t - t^p) \leq a) &= (\forall t, X_t \leq a + t^p),\\ &= (\forall t,\ X_{\lambda t} \leq a + \lambda^p\, t^p), \text{ pour } \lambda > 0 \text{ arbitraire ;}\\ &\overset{(d)}{=} (\forall t, \lambda X_t \leq a + \lambda^p\, t^p), \text{ d'après } (2.a)\ ;\\ &\overset{(d)}{=} (\forall t,\ X_t \leq a^{1/q}(1 + t^p)), \text{ en prenant } \lambda = a^{1/p}\ ;\end{aligned}$$

$$\stackrel{(d)}{=} \left(\sup_{t\geq 0} \left(\frac{X_t}{1+t^p}\right)^q \leq a\right), \text{ ce qui entraîne } (3.a). \quad \square$$

Voici une application au mouvement brownien de l'identité en loi $(3.a)$: si $(B_t, t \geq 0)$ désigne le mouvement brownien réel, issu de 0, le processus $(X_t \equiv |B_{t^2}|, t \geq 0)$ possède la propriété de self-similarité $(2.a)$ (et, de plus, est positif). On a donc, d'après $(3.a)$, pour tout $p > 1$:

$$(3.b) \qquad \sup_{t\geq 0} (|B_t| - t^{p/2}) \stackrel{(d)}{=} \sup_{t\geq 0} \left(\frac{|B_t|}{1+t^{p/2}}\right)^q.$$

Le mouvement brownien pouvant être représenté à l'aide du pont brownien standard $(\rho(u) \; ; \; 0 \leq u \leq 1)$ au moyen de la formule : $B(t) = (1+t)\,\rho\left(\frac{1}{1+t}\right)$, on a aussi, d'après $(3.b)$, appliquée avec $p = 2$:

$$(3.b') \qquad \sup_{t\geq 0} (|B_t| - t) \stackrel{(d)}{=} \sup_{t\leq 1} \rho^2(t).$$

On déduit alors des résultats de grandes déviations sur les variables gaussiennes à valeurs banachiques ([1]) la :

<u>*Proposition 2*</u> : *Pour tout* $p > 1$, *on a* :

$$\frac{1}{a^{2/q}} \log P\{\sup_{t\geq 0} (|B_t| - t^{p/2}) \geq a\} \xrightarrow[(a\to\infty)]{} \left(-\frac{q^{2/q}\, p^{2/p}}{2}\right).$$

<u>Démonstration</u> : (i) D'après Azencott ([1], proposition 3.2, p. 61), si $(Y_s, s \in [0,1])$ est un processus gaussien centré, à trajectoires continues, et si $b \equiv \sup_{s\in[0,1]} E[Y_s^2]$, alors : $\frac{1}{a^2} \log P(\sup_s |Y_s| \geq a) \xrightarrow[a\to\infty]{} -\frac{1}{2b}$.

(ii) Le résultat de la proposition 2 découle alors de l'identité en loi $(3.b)$, et du calcul de b pour : $Y_s = \frac{B_{t(s)}}{1+(t(s))^{p/2}}$, avec $t(s) = \frac{s}{1-s}$, $s \in \,]0,1[$.
Ce processus se prolonge par continuité en $s = 0$ et $s = 1$, avec $Y_0 = Y_1 = 0$. On montre sans difficulté que $b = q^{-2/q}\, p^{-2/p}$, d'où le résultat. $\square$

4. Toujours dans le cas particulier où $\phi(t) = t^p$, on peut expliciter la meilleure constante C_p dans l'inégalité : $E(X_L) \leq C\,\|L\|_p$, pour toute variable $L \geq 0$, en fonction de la quantité :

$$\sigma_p = E\left[\sup_{t\geq 0} (X_t - t^p)\right] \qquad \text{supposée finie.}$$

Rappelons tout d'abord les résultats de [2] (théorème 2.5.2) concernant cette question. On a le

Théorème 2 ([2]) *1) Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) il existe une constante C *telle que :* $E(X_L) \leq C \|L\|_p$

(ii) $\sigma_p < \infty$.

2) Supposons dorénavant $\sigma_p < \infty$.

La meilleure constante C *qui puisse figurer en (i) est :* $C_p = p^{1/p}(q\sigma_p)^{1/q}$

3) Plus précisément, une variable positive L *satisfait*

$E(X_L) = C_p \|L\|_p > 0$ *si, et seulement si :*

il existe un réel positif λ *pour lequel* L *est l'unique instant* L_λ *auquel le processus* $(X_t - \lambda t^p, t \geq 0)$ *atteint son maximum.*

On a alors :

(4.a) $\quad E[X_{L_\lambda}] = q\sigma_p \lambda^{-q/p}$; (4.b) $\quad E[L_\lambda^p] = (q/_p)\sigma_p \lambda^{-q}$.

En fait, les égalités (4.a) et (4.b) peuvent être renforcées, comme le montre la

Proposition 3 : Supposons $\sigma_p < \infty$. *Soit* L_* *l'unique instant auquel le processus* $(X_t - t^p \,;\, t \geq 0)$ *atteint son maximum* Σ_p. *On a alors :*

(4.c) $\quad E[X_{L_*} \mid \Sigma_p] = q\, \Sigma_p$; (4.d) $\quad E[L_*^p | \Sigma_p] = \frac{q}{p} \Sigma_p$.

Démonstration : Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, fonction continue, à support compact. Posons $f(x) = \int_x^\infty du\, g(u)$. D'après (2.a), on a, pour tout $\lambda > 0$:

$$\sup_{t \geq 0} (X_t - t^p) \overset{(d)}{=} \sup_{t \geq 0} (\lambda X_t - \lambda^p t^p),$$

et, d'autre part : $\sup\limits_{t \geq 0} (\lambda X_t - \lambda^p t^p) \geq \lambda X_{L_*} - \lambda^p L_*^p$.

La fonction f étant décroissante, on a donc :

$$E[f(\sup_t (X_t - t^p))] \leq E[f(\lambda X_{L_*} - \lambda^p L_*^p)].$$

La fonction $h(\lambda) \equiv E[f(\lambda X_{L_*} - \lambda^p L_*^p)]$ $(\lambda > 0)$ atteint donc son minimum en $\lambda = 1$. De plus, cette fonction h est dérivable, et on peut dériver sous le signe espérance.

Il vient : $\quad E[g(X_{L_*} - L_*^p) \{X_{L_*} - p\, L_*^p\}] = 0$,

d'où l'on déduit : $\quad E[X_{L_*} - p\, L_*^p | \Sigma_p] = 0$.

Or, on a : $E[X_{L_*} - L_*^p | \Sigma_p] = \Sigma_p$.

On obtient (4.c) et (4.d) en résolvant ce système de deux équations à deux inconnues. □

Remarque : Si l'on remplace la fonction $\phi(t) = t^p$ par une fonction de Young générale ϕ, et que $L_{(\phi)}$ désigne un instant auquel $(X_t - \phi(t), t \geq 0)$ atteint son maximum absolu Σ_ϕ, les mêmes arguments que ci-dessus entraînent (en admettant que l'on puisse bien dériver sous le signe espérance) :

$$E[X_{L_{(\phi)}} - \phi'(L_{(\phi)})\, L_{(\phi)} | \Sigma_\phi] = 0.$$

Cependant, $\phi'(t)t$ n'étant pas un multiple de $\phi(t)$, on ne peut en déduire, par exemple, $E[X_{L_{(\phi)}} | \Sigma_\phi]$.

5. Les résultats du paragraphe précédent suggèrent, de manière naturelle, l'étude de la fonction de $p \in]1,\infty[$:

$$\sigma_p \equiv \sigma_p(X) = E\Big[\sup_{t\geq 0} (X_t - t^p)\Big].$$

Cependant, même lorsque $X_t = B^+_{t^2}$ $(t \geq 0)$, avec B mouvement brownien réel, issu de 0, auquel cas :

$$\sigma_p = E\Big[\sup_{t\geq 0} (B_t - t^{p/2})\Big],$$

on connait très peu de valeurs explicites de σ_p, et encore moins bien le comportement précis de cette fonction. Dressons toutefois une liste de résultats :

(5.a) la variable : $\sup_{t\geq 0} (B_t - t)$ suit une loi exponentielle, de paramètre 2 (voir, par exemple, D. Williams [4]). On a donc :

$$\sigma_2 = 1/2.$$

(5.a') P. Groenenboom [3] obtient la loi conjointe de $\Sigma_{(4)} = \sup_{t\geq 0} (B_t - t^2)$ et $L_{(4)}$, l'unique instant auquel $(B_t - t^2, t \geq 0)$ atteint son maximum absolu. En particulier, d'après [3], on a : $P(\Sigma_{(4)} \leq a) = \psi_a(0)$,
la transformée de Fourier de la fonction $\psi_a(\cdot)$ s'exprimant à l'aide des fonctions d'Airy Ai et Bi. On devrait pouvoir en déduire, au moins théoriquement, la valeur de $\sigma_4 \equiv E(\Sigma_{(4)})$.

(5.b) Il est aisé de montrer : $\sigma_p \xrightarrow[p\to\infty]{} E[\sup_{t\leq 1} B_t] = E(|B_1|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

(5.c) On a : $\log \sigma_p \simeq \frac{1}{2(p-1)} \log \frac{1}{p-1}$ $(p \downarrow 1)$.

Ce résultat découle, par exemple, de ce que la meilleure constante C_p, donnée par par le théorème 2, est : $C_p = p^{1/p}\,(q\sigma_p)^{1/q}$. D'autre part, cette constante est, d'après le théorème 1, comprise entre $c\,\|N\|_q$ et $C\,\|N\|_q$, avec N variable gaussienne, centrée, réduite, et c et C des constantes universelles. Or, on déduit de la formule de Stirling que : $\log \|N\|_q \simeq \frac{1}{2} \log \frac{1}{p-1}$ $(p \downarrow 1)$, et le résultat c) ci-dessus en découle.

(5.d) Des arguments élémentaires d'analyse, ayant peu à avoir avec le mouvement brownien nous permettront de démontrer, au paragraphe 7, la :

<u>*Proposition 4*</u> : *Pour tout $p \in]1,\infty[$, désignons par $L_{(p)}$ l'unique instant auquel $(B_t - t^{p/2})$ atteint son maximum. On a alors :*

$$\sigma'_p = -\frac{1}{2} E\left[t^{p/2}(\log t)\Big|_{t=L_{(p)}}\right].$$

(5.e) La décomposition de Williams du mouvement brownien avec drift $(B_t - t\ ;\ t \geq 0)$ en son maximum (Williams [4]) nous permet de calculer explicitement σ'_2.

Pour simplifier les notations, posons $\Sigma = \sup\limits_{t\geq 0} (B_t - t)$, et désignons par ρ l'unique instant auquel $(B_t - t, t \geq 0)$ atteint son maximum. Alors, d'après Williams [4], on a :

(i) $P(\Sigma \in dx) = 2e^{-2x}\,dx$

(ii) Conditionnellement à $\Sigma = x$,

$$(B_t - t, t \leq \rho) \overset{(d)}{=} (B_t + t, t \leq T_x), \text{ avec } T_x = \inf\{t : B_t + t = x\}.$$

On déduit alors du théorème de Girsanov et de la connaissance de la loi du premier temps d'atteinte de x par le mouvement Brownien la formule :

(iii) $P(T_x \in dt) = e^x\, e^{-t/2} \frac{x}{\sqrt{2\pi\, t^3}}\, e^{-x^2/2t}$.

On peut maintenant démontrer la

<u>*Proposition 5*</u> : *1) Pour tout $m \geq 0$,* $E[\rho^m] = \frac{2^m\, \Gamma(m+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\,(m+1)}$

2) En conséquence, $\sigma'_2 \equiv -\frac{1}{2} E[\rho \log \rho] = -\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - \log 2 - \gamma\right)$,

où γ désigne la constante d'Euler.

Démonstration : 1) On a, d'après (i) et (iii) :

$$E[\rho^m] = 2\int_0^\infty dx\, e^{-2x}\, E(T_x^m)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty dt\, t^{m-3/2}\, e^{-t/2}\int_0^\infty dx\, e^{-x}\, x e^{-x^2/2t}.$$

Notons $J(t)$ l'intégrale en dx que l'on vient de faire apparaître. On obtient, après une intégration par parties :

$$J(t) = t\{1-\sqrt{t}\, e^{+t/2}\,\Phi(\sqrt{t})\}\ ,\ \text{où}\quad \Phi(u) = \int_u^\infty dy\, e^{-y^2/2}.$$

En reportant cette expression dans l'intégrale en dt ci-dessus, il vient :

$$E[\rho^m] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty dt\,[t^{m-1/2}\, e^{-t/2} - t^m\,\Phi(\sqrt{t})]$$

Une seconde intégration par parties permettant de remplacer Φ par Φ' donne l'égalité :

$$E[\rho^m] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty dt\, e^{-t/2}\,(t^{m-1/2} - \frac{1}{2(m+1)}\, t^{m+1/2}),$$

ce qui entraîne aisément la première assertion de la proposition.

2) Posons $f(m) = \dfrac{2^m\,\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\,(m+1)}$.

On a alors : $$f'(m) = \frac{2^m\,\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\,(m+1)}\, g(m)$$

où $g(m) = \log 2 - \frac{1}{m+1} + (\frac{\Gamma'}{\Gamma})\,(m+\frac{1}{2})$.

En particulier :

$$f'(1) = \frac{1}{2}\, g(1),\quad \text{et}\quad g(1) = \log 2 - \frac{1}{2} + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\,(\frac{3}{2}).$$

Or, on a, pour $z > 1$, la représentation intégrale :

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\,(z) = -\gamma + \int_0^1 dx\,\frac{x^{z-1}-1}{x-1}\ ,\ \text{où}\ \gamma \text{ désigne la constante d'Euler.}$$

On en déduit :

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\,(\frac{3}{2}) = -\gamma + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = -\gamma + (2-2\log 2).$$

On obtient bien finalement : $f'(1) = \frac{1}{2}\, g(1) = \frac{1}{2}\,(\frac{3}{2} - \log 2 - \gamma)$, d'où la seconde assertion de la proposition.

6. Revenons à l'étude générale du processus $(X_t, t \geq 0)$ self-similaire d'indice 1, c'est-à-dire qui vérifie (2.a). On suppose toujours, en outre, que X est positif, et continu.

Soit $p > 1$. On a rappelé, au paragraphe 4, sous l'hypothèse $\sigma_p < \infty$, qu'il existe un unique instant $L_{(p)}$ auquel $(X_t - t^p ; t \geq 0)$ atteint son maximum.

Remarquons que le processus croissant $S_t = \sup_{s \leq t} X_s$ est également self-similaire d'indice 1, et que $L_{(p)}$ est aussi l'unique instant auquel $(S_t - t^p, t \geq 0)$ atteint son maximum.

Ce paragraphe est consacré à l'étude des propriétés d'intégrabilité de $L_{(p)}$.

Dans cette étude, l'identité en loi suivante, analogue à l'identité (3.a), nous sera très utile.

$$(6.a) \qquad L_{(p)} \overset{(d)}{=} \sup_{(t>1)} \inf_{(s<1)} \left(\frac{S_t - S_s}{t^p - s^p}\right)^{\frac{1}{p-1}} .$$

<u>Démonstration</u> : Pour tout $a > 0$, on a :

$$(L_{(p)} \geq a) = (\sup_{t>a} (X_t - t^p) \geq \sup_{t<a} X_t - t^p)$$

$$= (\exists t > a : \forall s < a, \ X_t - t^p \geq X_s - s^p)$$

$$= (\exists t > 1 : \forall s < 1, \ X_{at} - (at)^p \geq X_{as} - (as)^p)$$

$$\overset{(d)}{=} (\exists t > 1 : \forall s < 1, \ \frac{X_t - X_s}{t^p - s^p} \geq a^{p-1}), \text{ d'après } (2.a).$$

Cette identité en loi est valable pour tout $a \geq 0$; on en déduit l'identité (6.a).

<u>Remarque</u> : Le choix du paramètre de scaling (: a) fait au cours de la démonstration ne dépendant pas de p, l'identité (6.a) s'étend aux marginales de rang fini des deux membres de (6.a), considérés comme fonction aléatoires de p.

L'égalité (6.a) nous permet d'obtenir les inégalités suivantes entre fonctions de répartition.

<u>*Proposition 7*</u> *: Soient $p, q > 1$ tels que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Il existe une constante universelle $c > 0$, et une constante $c_p > 0$, ne dépendant que de p telles que, pour tout $a > 0$:

$$(6.b) \qquad P((S_1 - S_{1/2})^q > 2^p a) \underset{(i)}{\leq} P((L_{(p)})^p > a) \underset{(ii)}{\leq} P(\sup_{t \geq 0} (X_t - t^p) > \frac{a}{c_p})$$

Démonstration : De l'identité (*6.a*) , on déduit :

- d'une part,

(*6.c*) $$P(L_{(p)} > a) \leq \inf_{s<1} P(\sup_{t>1} \frac{S_t - S_s}{t^p - s^p} > a^{p-1}),$$

dont découlera (*6.b*), (ii) ;

- d'autre part,

(*6.d*) $$P(L_{(p)} > a) \geq \sup_{t>1} P(\inf_{s<1} \frac{S_t - S_s}{t^p - s^p} > a^{p-1}),$$

dont découlera (*6.b*), (i).

En effet, on a, d'après (*6.c*), et (*2.a*) :

$$P(L_{(p)} > a) \leq \inf_{s<1} P(\sup_{t>\frac{1}{s}} \frac{S_t - S_1}{t^p - 1} > (sa)^{p-1})$$

$$= \inf_{h>1} P(\sup_{t>h} \frac{S_t - S_1}{t^p - 1} > (\frac{a}{h})^{p-1})$$

Or, on a :

$$\sup_{t>h} \frac{S_t - S_1}{t^p - 1} \leq \sup_{t>h} \frac{S_t}{t^p - 1} \leq (\sup_{t>h} \frac{S_t}{1+t^p}) \times (\sup_{x>h^p} \frac{1+x}{x-1})$$

$$\leq (1 + \frac{2}{h^p - 1}) \sup_{t\geq 0} \frac{S_t}{1+t^p} .$$

On déduit alors de l'identité en loi (*3.a*) qu'il existe une constante c_p ne dépendant que de p (et pour laquelle les inégalités ci-dessus donnent des estimations) telle que :

$$P((L_{(p)})^p > a) \leq P(\sup_{t\geq 0} (X_t - t^p) > \frac{a}{c_p}),$$

c'est-à-dire (*6.b*) , (ii).

De même, on déduit de l'inégalité (*6.b*) que :

$$P(L_{(p)} > a) \geq \sup_{h>1} P(S_1 - S_h > (\frac{a}{h})^{p-1}),$$

et en particulier : $P((L_{(p)})^p > a) \geq P((S_1 - S_{1/2})^q > 2^p a)$, c'est-à-dire (*6.b*), (i).

Corollaire 7 : Il existe deux constantes universelles c_p *et* c'_p *telles que, pour toute fonction convexe* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, *nulle en* 0,

$$E[g(c_p(S_1 - S_{1/2})^q)] \leq E[g((L_{(p)})^p)] \leq 3\, E[g(c'_p S_1^q)].$$

Considérons maintenant le cas particulier où X désigne, soit le processus $(B^+_{t^2}, t \geq 0)$, soit $(|B_{t^2}|, t \geq 0)$, avec B mouvement brownien réel issu de 0. Soit $\lambda_{(p)}$ l'unique instant auquel $B_t - t^{p/2}$, resp : $|B_t| - t^{p/2}$, atteint son maximum. On a alors : $L_{(p)} = \sqrt{\lambda}_{(p)}$.

On déduit du Corollaire 7 la

<u>Proposition 8</u> : Soit $p > 1$.

Il existe deux constantes universelles γ et γ', et deux constantes c_p et c'_p, ne dépendant que de p, telles que, pour toute fonction convexe $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, nulle en 0,

$$(6.e) \qquad \gamma\, E[g(c_p|N|^q)] \underset{(i)}{\leq} E[g(\lambda_{(p)}^{p/2})] \underset{(ii)}{\leq} \gamma'\, E[g(c'_p|N|^q)]$$

où N désigne une variable gaussienne, centrée réduite.

<u>Démonstration</u> : 1) Considérons tout d'abord le cas où $X_t = B^+_{t^2}$, et notons $\tilde{S}_t = \sup_{s \leq t} B_s$. On a donc : $S_t = \tilde{S}_{t^2}$.

L'inégalité (6.e) (ii) découle alors du Corollaire 7, et de l'identité $\tilde{S}_1 \overset{(d)}{=} |N|$.

Pour montrer l'inégalité (6.e) (i), remarquons que :

$$S_1 - S_{1/2} = \tilde{S}_1 - \tilde{S}_{1/4} \geq \tilde{S}_1 - \tilde{S}_{1/2}.$$

Or, on a, en notant : $\hat{S}_{1/2} = \sup_{s \leq \frac{1}{2}} (B_{\frac{1}{2}+s} - B_{\frac{1}{2}})$:

$$\tilde{S}_1 - \tilde{S}_{1/2} = \tilde{S}_{1/2} \vee (B_{1/2} + \hat{S}_{1/2}) - \tilde{S}_{1/2})$$

$$= (\hat{S}_{1/2} - (\tilde{S}_{1/2} - B_{1/2}))^+ \overset{(d)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} (|N| - |N'|)^+$$

où N et N' désignent deux variables gaussiennes, centrées, réduites, indépendantes.

Or, on a, en posant $c = P(|N'| < 1)$:

$$P(|N| > x+1) = c\, P(|N| > x+1 \,;\, |N'| < 1) \leq c\, P(|N| - |N'| > x).$$

D'autre part, il existe une constante c' telle que :

$$P(|N| > 2x) \leq c'\, P(|N| > x+1),$$

si bien que : $P(|N| > 2x) \leq (cc')\, P(|N| - |N'| > x)$

L'inégalité (6.e) (i) en découle aisément.

2) Dans le cas où $X_t = |B_{t^2}|$, $t \geq 0)$, l'inégalité *(6.e)*, (ii) découle encore aisément du Corollaire 7, et de l'identité : $\sup_{s\leq 1} B_s \overset{(d)}{=} |N|$.

Il reste à démontrer l'inégalité *(6.e)*, (i) Posons $\tilde{S}_t = \sup_{s\leq t} |B_s|$.

On a alors, en notant : $\hat{S}_{1/2} = \sup_{s\leq 1/2} B_{\frac{1}{2}+s} - B_{1/2}$:

$$\tilde{S}_1 - \tilde{S}_{1/2} = \tilde{S}_{1/2} \vee \sup_{\frac{1}{2}\leq u\leq 1} |B_u| - S_{1/2}$$

$$\geq \tilde{S}_{1/2} \vee (B_{1/2} + \hat{S}_{1/2}) - \tilde{S}_{1/2} = (\hat{S}_{1/2} - (\tilde{S}_{1/2} - B_{1/2}))^+.$$

Les variables $\hat{S}_{1/2}$ et $\tilde{S}_{1/2} - B_{1/2}$ étant indépendantes, le raisonnement fait dans la première partie de la démonstration s'applique encore, et on en déduit l'inégalité *(6.b)*, (i).

7. Nous démontrons maintenant la proposition 4, en nous appuyant de manière essentielle sur l'identité en loi *(6.a)*.

$(X_t\ ;\ t \geq 0)$ désigne toujours un processus self-similaire, continu, nul en 0.

Posons $S_t = \sup_{s\leq t} X_s$. Nous supposons en outre :

(7.a) pour tout $k > 0$, $E(S_1^k) < \infty$;

(7.b) $P(S_1 = X_1) = 0$.

Sous l'hypothèse *(7.a)*, nous avons déjà vu (Proposition 1 et théorème 2), que, pour tout $p > 1$, il existe un unique instant $L_{(p)}$ auquel $(X_t - t^p\ ;\ t \geq 0)$ atteint son maximum. Nous pouvons maintenant démontrer la :

<u>*Proposition 4'*</u> *: Supposons les hypothèses (7.a) et (7.b) satisfaites.*

Alors, la fonction $\sigma : p \to \sigma_p \equiv E[\sup_t (X_t - t^p)]$ *est dérivable sur* $]1,\infty[$, *et on a :*

(7.c) $\sigma_p' = -E[(L_{(p)})^p \log L_{(p)}]$.

<u>Démonstration</u> : 1) Introduisons à nouveau la notation

$$C_p = \sup_{L\ v\cdot a\geq 0} \frac{E(X_L)}{\|L\|_p}.$$

On a, d'après le théorème 2 :

(7.d) $$C_p = p^{1/p}\,(q\sigma_p)^{1/q}.$$

Nous allons montrer :

- d'une part, que la fonction $C : p \to C_p$ est dérivable sur $]1,\infty[$; ceci entraînera la dérivabilité de la fonction σ, d'après la formule (7.d).

- d'autre part, la formule :

(7.e) $$C'_p = \frac{E[X_{L(p)}]}{\|L_{(p)}\|_p}\left(\frac{1}{p}\log \|L_{(p)}\|_p - \frac{E[(L_{(p)})^p \log L_{(p)}]}{p\,\|L_{(p)}\|_p^p}\right).$$

Or, en conséquence de (7.d), on a :

$$(\log C_p)' = \left(\frac{1}{p}\log p + \left(1-\frac{1}{p}\right)\log\frac{p}{p-1} + \left(1-\frac{1}{p}\right)\log\sigma_p\right)',$$

d'où l'on déduit :

(7.f) $$(\log C_p)' = \frac{1}{p^2}\left(\log\frac{1}{p-1} + \log\sigma_p\right) + \frac{\sigma'_p}{\frac{p}{p-1}\sigma_p}.$$

Par ailleurs, en conséquence de (7.d) et (7.e), et en s'appuyant sur les formules :

(4.a) $E[X_{L_{(p)}}] = q\sigma_p$; (4.b) $E[L^p_{(p)}] = \frac{q}{p}\sigma_p$,

on a :

$$(\log C_p)' = \frac{C'_p}{C_p} = \frac{1}{p}\log\|L_{(p)}\|_p - \frac{E[L^p_{(p)}\log L_{(p)}]}{p\,E(L^p_{(p)})},$$

d'où l'on déduit :

(7.g) $$(\log C_p)' = \frac{1}{p^2}\left(\log\frac{1}{p-1} + \log\sigma_p\right) - \frac{E[L^p_{(p)}\log L_{(p)}]}{\frac{p}{p-1}\sigma_p}.$$

En comparant (7.f) et (7.g), on obtient la formule (7.c).

2) Pour simplifier l'écriture, notons simplement ℓ pour L la v.a. positive générique, $\ell_{(p)}$ pour $L_{(p)}$, et posons :

$$h(\ell,r) = \frac{E[X_\ell]}{\|\ell\|_r}.$$

On a alors : $C_p = h(\ell_{(p)},p)$. Par définition de $\ell_{(p)}$, on a :

$$h(\ell_{(p+\varepsilon)},p+\varepsilon) - h(\ell_{(p+\varepsilon)},p) \geq C_{p+\varepsilon} - C_p \geq h(\ell_{(p)},p+\varepsilon) - h(\ell_{(p)},p).$$

Admettons provisoirement que la fonction : $(p,r) \to \frac{\partial}{\partial r}h(\ell_{(p)},r)$ soit continue sur

$(]1,\infty[)^2$. On déduit alors de la double inégalité précédente, et du théorème des accroissement finis, que la fonction $C : p \to C_p$ est continûment dérivable, et que, de plus : $C'_p = \frac{\partial}{\partial r} h(\ell_{(p)},p)$.

3) Pour une v.a. $\ell \geq 0$ admettant des moments de tous ordres, on a :

$$(7.h) \qquad \frac{\partial}{\partial r} h(\ell,r) = \frac{E[X_\ell]}{\|\ell\|_r}\left(\frac{1}{r}\log\|\ell\|_r + \frac{E[\ell^r \log(\ell)]}{r\,\|\ell\|_r^r}\right)$$

D'autre part, d'après (4.a) et (4.b), on a : $E[X_{\ell_{(p)}}] = p\,\|\ell_{(p)}\|_p^p$.

Il apparaît maintenant clairement, en conséquence de (7.h) que, pour montrer la continuité de la fonction : $(p,r) \to \frac{\partial}{\partial r} h(\ell_{(p)},r)$, il suffit de prouver que, pour tout $k > 1$, $p \to \ell_{(p)}$ est continue, en tant qu'application à valeurs dans L^k.

4) Ce dernier résultat va découler de l'identité en loi :

$$(6.a) \qquad \ell_{(p)} \overset{(d)}{=} \pi(p)^{\frac{1}{p-1}}, \quad \text{où} \quad \pi(p) \equiv \sup_{t>1}\inf_{s<1}\left(\frac{S_t-S_s}{t^p-s^p}\right).$$

En fait, nous allons prouver que :

- d'une part,

(7.i) $\qquad P(d\omega)$ p.s., <u>l'application</u> : $p \to \pi(p)(\omega)$ <u>est continue</u> ;

- d'autre part, pour tout $k > 1$, et tout intervalle borné $[a,b] \subset]1,\infty[$,

(7.j) $\qquad$ <u>la famille</u> $(\pi(p)^k \; ; \; p \in [a,b])$ <u>est uniformément intégrable</u>.

Ces deux propriétés, jointes à (6.a), assurent la continuité de l'application : $p \to \ell_{(p)}$ à valeurs dans L^k.

Le point (7.j) découle de la décroissance p.s. de l'application : $p \to \pi(p)(\omega)$

$$\left(\text{remarquer que : } \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{S_t-S_s}{t^p-s^p}\right) \leq 0\right),$$

de l'identité en loi (6.a), et de ce que, en conséquence de l'hypothèse (7.a), la variable $\ell_{(p)}$, pour $p > 1$, fixé, possède des moments de tous ordres.

Pour démontrer le point (7.i), remarquons tout d'abord que l'on peut remplacer $\pi(p)$ par $\pi_K(p)$, où K désigne un réel positif quelconque, et

$$\pi_K(p) \equiv \sup_{1<t<K}\inf_{s<1}\frac{S_t-S_s}{t^p-s^p}.$$

Ceci découle de ce que, pour tout $p > 1$, on a : $\frac{S_t}{t^p} \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} 0$.

En effet, on a : $\sum_n E\left[\frac{1}{2^{np}} S_{2^n}\right] = \sum_n \frac{1}{2^{n(p-1)}} E[S_1] < \infty$, d'où le résultat cherché.

Enfin, K étant fixé, il existe, à l'aide de l'hypothèse (7.b), pour presque tout ω, un réel $\varepsilon(\omega) > 0$ tel que :

$$\pi_K(p)(\omega) = \sup_{1+\varepsilon(\omega)<t<K} \; ; \; \inf_{s<1-\varepsilon(\omega)} \frac{S_t(\omega)-S_s(\omega)}{t^p-s^p} .$$

La continuité de : $p \to \pi_K(p)(\omega)$ est alors immédiate. □

Remarque : Nous ne savons pas sous quelles conditions minimales les hypothèses (7.a) et (7.b) sont satisfaites. Toutefois :

- il est bien connu que l'on peut estimer les moments de S_1 lorsque le lemme de Kolmogorov - ou celui, plus raffiné, de Garsia - Rodemich - Rumsey - est applicable ; voir Barlow - Yor [5] par exemple.

- O'Brien et Vervaat [6] montrent que, si Y est un processus self-similaire ayant des accroissements stationnaires, c'est-à-dire :
pour tout $b > 0$, $(Y_{t+b} - Y_b \; ; \; t \geq 0) \stackrel{(d)}{=} (Y_t \; ; \; t \geq 0)$,

$$P(Y_1 = 0) = P(Y \equiv 0). \quad \square$$

Remerciement et Commentaire final :

A l'aide d'arguments utilisant le théorème de Girsanov, D. Siegmund (Communication personnelle) a, pour la première fois, conjecturé la validité de la proposition 4 pour $p = 2$, c'est-à-dire la dérivabilité de σ_p en $p = 2$, dans le cas du mouvement brownien.
Nous remercions vivement D. Siegmund pour son aide et son intérêt dans cette question.
Il serait certainement très instructif d'obtenir une démonstration plus directe que la nôtre de la proposition 4'.

REFERENCES :

[1] *R. AZENCOTT* : Grandes déviations et applications. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour VIII - 1978. Lect. Notes Math. 774. Springer (1980).

[2] *M.T. BARLOW, S.D. JACKA, M. YOR* : Inequalities for a pair of processes stopped at a random time. Proc. London Math. Soc. (3), 52 (1986), 142-172.

[3] *P. GROENENBOOM* : Brownian motion with a parabolic drift and Airy functions. A paraître dans Probab. Th. Rel. Fields (1987).

[4] *D. WILLIAMS* : Path decomposition and continuity of local time for one-dimensional diffusions. Proc. London Math. Soc. (3), 28, 738-768, 1974.

[5] *M.T. BARLOW, M. YOR* : Semi-martingale inequalities via the Garsia - Rodemich - Rumsey Lemma and applications to local times. J. Funct. Anal. 49 (1982), 198-229.

[6] *G.L. O'BRIEN and W. VERVAAT* : Marginal distributions of self-similar processes with stationary increments. Zeitschrift für Wahr., 64, 1983, 129-138.