SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JIA-AN YAN

Développement des distributions suivant les chaos de Wiener et applications à l'analyse stochastique

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p. 27-33

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1987__21__27_0>

DEVELOPPEMENT DES DISTRIBUTIONS SUIVANT LES CHAOS DE WIENER
ET APPLICATIONS A L'ANALYSE STOCHASTIQUE

par J.A. YAN

I. INTRODUCTION

Dans [1] Meyer a remarqué que toute distribution au sens de Watanabe admet un développement formel suivant les chaos de Wiener. Cette note a pour but de montrer comment on peut appliquer ce résultat à l'analyse stochastique, et surtout de donner une démonstration simplifiée d'un résultat récent d'Ustunel.

Nous désignons par $(\Omega,\mathcal{F},P)$ l'espace de Wiener. Si E est un espace de Hilbert séparable, nous désignons par $D_{p,s}(E)$ l'espace de Sobolev de distributions à valeurs dans E avec la norme

$$\|\varphi\|_{p,s} = \|(I-L)^{s/2}\varphi\|_p \qquad (1<p<\infty \ , \ s\in\mathbb{R})$$

où L est l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck. On a $D_{p,s}(E)^* = D_{q,r}(E)$, où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $r=-s$. Posons

$$D_\infty(E) = \cap_{1<p<\infty, s\in\mathbb{R}} D_{p,s}(E) \ , \ D_{-\infty}(E) = \cup_{1<p<\infty, s\in\mathbb{R}} D_{p,s}(E)$$

$D_\infty(E)$ s'appelle l'espace des <u>fonctions-test</u> à valeurs dans E, et $D_{-\infty}(E)$ l'espace des <u>distributions</u> à valeurs dans E. On désigne toujours par $<\ ,\ >$ la forme bilinéaire canonique sur $D_\infty(E)\times D_{-\infty}(E)$. Si $E=\mathbb{R}$ nous écrivons simplement $D_{p,s}$, D_∞ , $D_{-\infty}$. Les espaces $D_\infty(E)$, $D_{-\infty}(E)$ peuvent être munis de topologies naturelles pour lesquelles $D_\infty(E)^*=D_{-\infty}(E)$.

Nous désignons par H l'espace $L^2(\mathbb{R}_+)$ et considérons le <u>gradient</u> D comme un opérateur défini sur $D_{-\infty}(E)$ à valeurs dans $D_{-\infty}(H\otimes E)$. Il est bien connu que D est continu de $D_{p,s}(E)$ dans $D_{p,s-1}(H\otimes E)$; on peut donc définir son adjoint, l'opérateur <u>divergence</u> $\delta : D_{-\infty}(H\otimes E) \to D_{-\infty}(E)$, qui est continu de $D_{q,r}(H\otimes E)$ dans $D_{q,r-1}(E)$. On a $L=-\delta D$.

Dans cette note, $\hat{L}^2(\mathbb{R}_+^n,E)$ désigne l'espace des fonctions symétriques g sur $\mathbb{R}_+^n$ à valeurs dans E, mesurables et telles que

$$\|g\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}_+^n} \|g(s_1,\dots,s_n)\|^2 ds_1\dots ds_n < \infty \ .$$

Si $E=\mathbb{R}$ on écrit simplement $\hat{L}^2(\mathbb{R}_+^n)$. Pour une telle fonction g , on peut définir l'intégrale stochastique multiple (qui est une v.a. à valeurs dans E)

$$I_n(g) = n! \int_{0<s_1<\dots<s_n} g(s_1,\dots,s_n)dB_{s_1}\dots dB_{s_n}$$

où (B_t) est le mouvement brownien. On a

$$\|I_n(g)\|_E^2 = n!\ \|g\|_2^2 \quad .$$

Si n=0 on interprète $\hat{L}^2(\mathbb{R}_+^0,E)$ comme E et $I_0(g)$ comme g. Dans cette note on considère seulement le cas où E=H ; alors $L^2(\mathbb{R}_+^n,H)$ peut s'identifier à $L^2(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $\hat{L}^2(\mathbb{R}_+^n,H)$ au sous-espace de $L^2(\mathbb{R}_+^{n+1})$ formé des fonctions symétriques par rapport aux n premières variables, et inversement $\hat{L}^2(\mathbb{R}_+^{n+1})$ s'identifie à un sous-espace de $L^2(\mathbb{R}_+^n,H)$.

Pour $h\in H$, on note $\tilde{h} = \int_0^\infty h_s dB_s$ et $\mathcal{E}(h) = \exp(\tilde{h}-\frac{1}{2}(h,h))$

Avec ces notations, la remarque de Meyer mentionnée au début s'énonce ainsi :

THEOREME 1.1. Soit $F\in D_{-\infty}(E)$. Pour tout $n\geqq 0$ il existe $f_n\in\hat{L}^2(\mathbb{R}_+^n,E)$ unique tel que l'on ait pour tout $g_n\in\hat{L}^2(\mathbb{R}_+^n,E)$

$$(1.1) \qquad < F,I_n(g_n) > = (f_n,g_n)$$

où $(\ ,\ )$ est le produit scalaire dans $\hat{L}^2(\mathbb{R}_+^n,E)$. En outre, pour tout $h\in H$ et tout $e\in E$, on a

$$(1.2) \qquad < F,\mathcal{E}(h)e > = (f_0,e) + \Sigma_{n\geqq 1}\ \frac{1}{n!}(f_n,h^{\otimes n}e)$$

où la série converge absolument.

Dans la suite, on note $F\sim(f_0,f_1,\ldots)$ et on écrit formellement

$$(1.3) \qquad F = f_0 + \Sigma_{n\geqq 1}\frac{1}{n!}I_n(f_n) \quad .$$

On dit que (1.3) est le développement formel de la distribution F suivant les chaos de Wiener. Il est évident que $F\in D_{2,0}(E)$ si et seulement si $\Sigma_n \frac{1}{n!}(f_n,f_n)<\infty$.

II. EXPRESSION EXPLICITE DES OPERATEURS D ET δ

Soit $g_n\in\hat{L}^2(\mathbb{R}_+^n,H)$. On pose

$$(2.1) \qquad \hat{g}_n(t,s_1,\ldots,s_n) = \frac{1}{n+1}[g_n(t,s_1,\ldots s_n)+\sum_{j=1}^n g_n(s_j,s_1\ldots s_{j-1},t,s_{j+1}\ldots s_n)]$$

$\hat{g}_n$ est la symétrisation de g_n considéré comme élément de $L^2(\mathbb{R}_+^{n+1})$.

Le lemme suivant est un cas particulier d'un résultat dû à Gaveau et Trauber [2].

LEMME 2.1. Soient $f_n\in\hat{L}^2(\mathbb{R}_+^n)$ et $g_n\in\hat{L}^2(\mathbb{R}_+^n,H)$. On a

$$(2.2) \qquad DI_n(f_n) = nI_{n-1}(f_n)$$

où f_n est considéré, du côté droit, comme élément de $\hat{L}^2(\mathbb{R}_+^{n-1},H)$, et

$$(2.3) \qquad \delta I_n(g_n) = I_{n+1}(\hat{g}_n) \quad .$$

Démonstration. (2.2) résulte très facilement de la définition de D .

Pour prouver (2.3) il suffit de prouver que l'on a pour tout $h \in H$ $<\delta I_n(g_n),\mathcal{E}(h)> = <I_{n+1}(\hat{g}_n),\mathcal{E}(h)>$. Or le côté gauche vaut

$$\begin{aligned} < I_n(g_n),D\mathcal{E}(h)> &= <I_n(g_n),\mathcal{E}(h)h> = (g_n,h^{\otimes n+1})_{\hat{L}^2(\mathbb{R}_+^n,H)} \\ &= (g_n,h^{\otimes n+1})_{L^2(\mathbb{R}_+^{n+1})} = (\hat{g}_n,h^{\otimes n+1})_{L^2(\mathbb{R}_+^{n+1})} \\ &= < I_{n+1}(\hat{g}_n),\mathcal{E}(h) > . \end{aligned}$$

Les deux théoremes suivants sont importants pour la suite. Ils signifient que les opérateurs D et δ commutent avec le développement formel des distributions.

THEOREME 2.1. Soit $F \in D_{-\infty}$ de développement formel $F=f_0+\Sigma_{n\geqq 1} \frac{1}{n!}I_n(f_n)$. Alors on a le développement formel

$$DF = f_1+\Sigma_{n\geqq 1} \frac{1}{n!} I_n(f_{n+1}) \tag{2.4}$$

où f_{n+1} est considéré comme élément de $\hat{L}^2(\mathbb{R}_+^n,H)$.

Démonstration. Pour tout $g_n \in \hat{L}^2(\mathbb{R}_+^n,H)$ on a d'après la définition de l'opérateur D sur les distributions (et (2.3), (1.1)).

$$\begin{aligned} < DF,I_n(g_n)> &= <F,\delta I_n(g_n)> = <F,I_{n+1}(\hat{g}_n)> = <f_{n+1},\hat{g}_n> = \\ &= < f_{n+1},g_n>_{L^2(\mathbb{R}_+^{n+1})} = <f_{n+1},g_n>_{\hat{L}^2(\mathbb{R}_+^n,H)} . \end{aligned}$$

D'où (2.4).

REMARQUE. Par définition de $D_{2,1}$, $F\in D_{2,1} \Longleftrightarrow DF\in D_{2,0}(H)$. Cela se voit aussi très clairement sur (2.4).

THEOREME 2.2. Soit $G\in D_{-\infty}(H)$ de développement formel $G=g_0+\Sigma_{n\geqq 1} \frac{1}{n!}I_n(g_n)$. Alors on a le développement formel

$$\delta G = \Sigma_{n\geqq 0} \frac{1}{n!}I_{n+1}(\hat{g}_n) . \tag{2.5}$$

Démonstration. Pour tout $f_n \in \hat{L}^2(\mathbb{R}_+^n)$ on a d'aprés (2.2) et (1.1)

$$\begin{aligned} <\delta G,I_n(f_n)> &= <G,DI_n(f_n)> = n<G,I_{n-1}(f_n)> = n(g_{n-1},f_n)_{\hat{L}^2(\mathbb{R}_+^{n-1},H)} \\ &= n(\hat{g}_{n-1},f_n)_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \end{aligned}$$

d'où (2.5).

REMARQUE 1. D'aprés (2.5) on voit que $\delta G\in D_{2,0}$ si et seulement si

$$\Sigma_n \frac{(n+1)!}{(n!)^2} (\hat{g}_n,\hat{g}_n) < \infty \quad , \text{ ou encore } \quad \Sigma_{n\geqq 1} \frac{1}{(n-1)!}(\hat{g}_n,\hat{g}_n) < \infty .$$

REMARQUE 2. Soit F comme dans l'énoncé du théorème 2.1. D'après les théorèmes 2.1 et 2.2 on a

$$LF = -\delta DF = - \Sigma_{n\geqq 0} \frac{1}{n!}I_{n+1}(f_{n+1}) .$$

On retrouve immédiatement sur ce développement le fait que $LF\in D_{2,0} \Longleftrightarrow F\in D_{2,2}$.

REMARQUE 3. D'après (2.4) et (2.5), on étend immédiatement aux distributions la relation de commutation $\delta L - L\delta = \delta$.

III. REPRESENTATION DES DISTRIBUTIONS COMME INTEGRALES D'ITO

Nous désignons par $(\mathcal{F}_t)$ la filtration naturelle du mouvement brownien (B_t), augmentée des ensembles de mesure nulle. Soit d'abord $G \in D_{2,0}(H)$: G peut aussi être considéré comme un processus mesurable défini sur Ω. Si l'on représente G sous la forme $g_0 + \Sigma \frac{1}{n!} I_n(g_n)$, il est évident que le processus correspondant est adapté si et seulement si, pour tout $n \geqq 1$, la fonction $g_n(s_1,\dots,s_n,t) \in \hat{L}^2(\mathbb{R}_+^n, H)$ admet une version satisfaisant à

(3.1) $$g_n(s_1,\dots,s_n,t)=0 \quad \text{pour } t \leqq \max_{1\leqq i \leqq n} s_i \ .$$

Nous dirons qu'une <u>distribution</u> G <u>à valeurs dans</u> H est <u>adaptée</u> si son développement formel satisfait à la condition (3.1). L'espace des distributions adaptées est noté $D_{-\infty}^{ad}(H)$, et l'on définit de manière évidente les espaces $D_{p,s}^{ad}(H) = D_{p,s}(H) \cap D_{-\infty}^{ad}(H)$: pour $s \geqq 0$, $D_{p,s}^{ad}(H)$ est l'ensemble des éléments de $D_{p,s}(H)$ qui (considérés comme processus) sont adaptés au sens usuel. On montre aisément que le dual de $D_{p,s}^{ad}(H)$ est $D_{q,-s}^{ad}(H)$.

Pour $G \in D_{2,0}^{ad}(H)$, on a $\delta G = \int_0^\infty G_s dB_s$ (intégrale d'Ito : cf. Gaveau et Trauber [2]). Par extension, pour $G \in D_{-\infty}^{ad}(H)$ on dit que $\delta G \in D_{-\infty}$ est l'<u>intégrale d'Ito généralisée</u> de G (si G n'est pas adaptée, on peut appeler δG l'intégrale de Skorohod généralisée de G).

Nous allons définir maintenant la <u>projection adaptée</u> d'une distribution $G \in D_{-\infty}(H)$, que nous noterons G^{ad}.

Commençons par le cas où $G \in D_{2,0}(H)$. On écrit alors

(3.2) $$G = g_0 + \Sigma_{n\geqq 1} \frac{1}{n!} I_n(g_n) \ , \quad G^{ad} = g_0 + \Sigma_{n \geqq 1} \frac{1}{n!} I_n(g_n^{\Delta})$$

avec

(3.3) $$g_n^{\Delta}(s_1,\dots,s_n,t) = g(s_1,\dots,s_n,t) I_{\{t > \max_i s_i\}} \ .$$

Il est immédiat de vérifier que $G^{ad}(.,t) = E[G(.,t) | \mathcal{F}_t]$. Il est clair que la même formule peut être appliquée pour étendre la projection adaptée aux distributions, à condition de justifier l'appartenance de G^{ad} à $D_{-\infty}^{ad}(H)$. C'est ce qu'à démontré Ustunel : tout d'abord, l'application $G \mapsto G^{ad}$ est continue de $D_{p,0}(H)$ dans $D_{p,0}^{ad}(H)$ $(p>1)$; comme elle commute avec L , elle est continue de $D_{p,s}(H)$ dans $D_{p,s}^{ad}(H)$ pour $s \geqq 0$, et par dualité pour $s<0$ aussi. Il est alors facile de voir qu'elle applique les fonctions-test dans les fonctions-test, et les distributions dans les distributions.

La projection adaptée G^{ad} de $G\in D_{-\infty}(H)$ est caractérisée par la propriété

(3.4) $$< G^{ad}, I_n(g_n)> = < G, I_n(g_n^{\Delta}) > \quad \text{pour } g_n\in L^2(\mathbb{R}_+^n, H) \ .$$

Le théorème de Clark [3] sur la représentation des v.a. comme intégrales d'Ito peut s'écrire dans notre langage de la manière suivante :

THEOREME 3.1. Soit $f\in D_{2,0}$. Alors $(Df)^{ad}\in D_{2,0}^{ad}(H)$ et l'on a

(3.5) $$f = E[f] + \int_0^{\infty} (Df)^{ad}(s)dB_s \ .$$

Démonstration. Nous commençons par le cas où f appartient à l'un des chaos de Wiener : le résultat est évident pour le chaos d'ordre 0, supposons donc que $f=\frac{1}{n!}\,I_n(f_n)$, $f_n\in\hat{L}^2(\mathbb{R}_+^n)$, $n\geq 1$. Alors on a $Df=nI_{n-1}(f_n)$, f_n étant considéré comme élément de $\hat{L}^2(\mathbb{R}_{n-1}, H)$ (voir (2.2)). Donc

$$\begin{aligned} f_n^{\Delta}(s_1,\dots,s_{n-1},t) &= f_n(s_1,\dots,s_{n-1},t) \text{ si } t>\max_i s_i \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Calculer l'intégrale d'Ito de $(Df)^{ad}$ revient à lui appliquer δ ; or d'après (2.3), le résultat est $I_n(n(f_n^{\Delta})\hat{}\,)$, et cela vaut $I_n(f_n)=f$.

Pour établir (3.5), il suffit de développer f suivant les chaos de Wiener, et de sommer dans L^2 les égalités relatives à chaque chaos.

Voici la forme qu'Ustunel a donnée au théorème de Clark dans le cas des distributions :

THEOREME 3.2. Soit $f\in D_{-\infty}$. Alors on a

(3.6) $$f = \langle f,1\rangle + \delta((Df)^{ad}) \ .$$

Démonstration. Les deux membres sont des distributions. Pour vérifier qu'ils sont égaux, il suffit de montrer qu'ils prennent la même valeur sur une fonction-test de la forme $I_n(h_n)$, $h_n\in\hat{L}^2(\mathbb{R}_+^n)$. Mais alors on est ramené à un problème sur les développements formels, identique à celui que nous avons traité pour démontrer le théorème 3.1.

REMARQUES (voir [4]). 1) Soit $G\in D_{-\infty}(H)$. Posons $G_1=(D\,\delta G)^{ad}$, $G_2=G-G_1$. Alors $G=G_1+G_2$ est l'unique décomposition de G telle que $G_1\in D_{-\infty}^{ad}(H)$ et $\delta G_2=0$.

2) En fait, le noyau de l'opérateur δ est exactement formé des distributions du type $G-(D\,\delta G)^{ad}$, avec $G\in D_{-\infty}(H)$.

IV. MARTINGALES GENERALISEES SUR L'ESPACE DE WIENER

Soit $f\in D_{2,0}$, admettant le développement $f=f_0+\Sigma_{n\geq 1} I_n(f_n)$. L'espérance conditionnelle $E[f|\mathcal{F}_t]$ admet le développement

(4.1) $$E[f|\mathcal{F}_t] = f_0 + \Sigma_{n\geq 1} \frac{1}{n!} I_n(f_n^t)$$

avec $f_n^t(s_1,\dots,s_n)=f_n(s_1,\dots,s_n)$ si $t>\max_i s_i$, et 0 sinon. Comme dans le cas de la projection, mais plus simplement, l'opérateur $E[.|\mathcal{F}_t]$ est continu de $D_{p,0}$ dans lui-même et commute à L , donc applique continûment $D_{p,s}$ dans lui-même, D_∞ dans D_∞ et $D_{-\infty}$ dans $D_{-\infty}$. Il est alors immédiat que la formule (4.1), appliquée au développement formel d'une distribution f , définit la distribution $E[f|\mathcal{F}_t]$.

On appelle <u>martingale généralisée</u> sur l'espace de Wiener une famille de distributions (f_t) telle que l'on ait $f_s=E[f_t|\mathcal{F}_s]$ pour $s<t$. Cela revient à dire que si l'on pose

$$f_t = f_0(t) + \Sigma_{n>1} \frac{1}{n!} I_n(f_n(.;t)) \tag{4.2}$$

les constantes $f_0(t)$ ne dépendent pas de t, et pour $s<t$

$$f_n(.;s) = f_n^s(.;t) \quad \text{pour tout } n . \tag{4.3}$$

Enfin, cela revient à dire que pour chaque n le processus ordinaire $I_n(f_n(.;t))$ est une martingale.

Plaçons nous sur un intervalle fini $[0,T]$; la distribution f_T appartient à un espace $D_{p,s}$ pour un $p>1$ et un s que l'on peut prendre de la forme $-2n$ (n entier assez grand), de sorte que f_T est de la forme $(I-L)^n\varphi$ avec $\varphi\in L^p(\mathcal{F}_T)$. Nous allons appliquer les résultats des paragraphes précédents, mais sur l'intervalle fini $[0,T]$: H désigne donc $L^2([0,T])$ et non $L^2(\mathbb{R}_+)$, etc.. La martingale ordinaire $(E[\varphi|\mathcal{F}_t])_{t\leq T}$ peut alors être considérée comme un élément Φ de $L^p(H)$. Posons $F=((I-L)^n\otimes I_H)\Phi$, qui appartient à $D_{-\infty}(H)$; les coefficients du développement formel de cette distribution à valeurs dans H sont les fonctions $f_n(.,t)$ de (4.2).

A partir de la représentation (3.6) des distributions en intégrales stochastiques, appliqué à la distribution f_T , on peut étendre aux martingales généralisées le théorème de représentation des martingales browniennes comme intégrales stochastiques par rapport au mouvement brownien.

REFERENCES

1. P.A.Meyer et J.A.Yan, A propos des distributions sur l'espace de Wiener. dans ce volume

2. B.Gaveau et P.Trauber, L'intégrale stochastique comme opérateur de divergence dans l'espace fonctionnel, J.Funct.Anal. Vol.46, 230-238(1982).

3. J.M.C.Clark, The Representation of Functionals of Brownian Motion by Stochastic Integrals,Ann.Math.Stat. 41(1970), p.1281-1295; 42(1971), p.1778.

4. A.S.Ustunel, Representation of the distributions on Wiener space and stochastic calculus of variation, Preprint

(Inst. of Applied Math., Academia Sinica, Beijing)

ELEMENTS DE PROBABILITES QUANTIQUES
exposés VI-VII-VIII

Ces exposés font suite à ceux du volume XX, et ne peuvent être lus indépendamment (surtout des exposés IV-V). Le premier reprend certains calculs sur les chaos de Wiener et les opérateurs donnés par des noyaux, améliorant plusieurs résultats présentés dans le volume XX. Le second est une initiation (assez sommaire) à l'important sujet des représentations des relations de commutation canoniques dites ≪ à température positive ≫. Enfin, le troisième présente des travaux tout récents de Parthasarathy-Sinha sur les temps d'arrêt sur l'espace de Fock.

Nous donnons enfin une liste d'erreurs relevées dans les exposés I-V.

Notre séminaire sur les probabilités quantiques devrait continuer en 1986/87, et nous poursuivrons la publication des exposés dans le volume suivant.

P.A. Meyer