Rolando Rebolledo

# Les « principes d'invariance » en probabilité sur l'espace de Wiener

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 26 (1992), p. 501-504
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__501_0>

# LES "PRINCIPES D'INVARIANCE" EN PROBABILITÉ SUR L'ESPACE DE WIENER

ROLANDO REBOLLEDO

La structure topologique de l'espace de Wiener a été l'objet de nombreux travaux. Dans cette note je voudrais attirer l'attention sur les "Principes d'Invariance au sens fort" (convergence en *probabilité* vers le Brownien) que l'on peut prouver sur ce type d'espace. Tout découle d'une remarque élémentaire contenue dans le Lemme ci-dessous. On se place sur l'espace canonique de Wiener: $\Omega = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, le processus canonique étant noté $W$ $(W_t(\omega) = \omega(t), t \geq 0)$ et l'on considère sa filtration naturelle, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t; t \geq 0)$, où $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s; s \leq t), t \geq 0$; $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$. Sur cet espace on introduit la mesure de Wiener $\mathbb{P}$ qui fait de $W$ un mouvement Brownien.

Etant donnée une transformation mesurable $V : \Omega \longrightarrow \Omega$, nous écrivons $V_t(\omega)$ la valeur prise par la fonction $V(\omega)$ au point $t \geq 0$.

**Lemme 1.** *Soient* $(V^n; n \in \mathbb{N})$ *une suite de transformations mesurables de* $\Omega$, *et* $V$ *une transformation continue de* $\Omega$ *telles que les processus*

$$X_t^n(\omega) = (V_t(\omega), V_t^n(\omega)), \tag{1}$$

$(\omega \in \Omega, t \geq 0)$, *à trajectoires dans* $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, *convergent en loi vers le processus,*

$$X_t(\omega) = (V_t(\omega), V_t(\omega)), \tag{2}$$

$(\omega \in \Omega, t \geq 0)$.

*Alors la suite* $(V^n; n \in \mathbb{N})$ *converge en probabilité uniformément sur tout compact de* $\mathbb{R}_+$ *vers* $V$.

*Proof.* Commençons par remarquer que la topologie de l'espace produit $\Omega \times \Omega$ est équivalente à celle de $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Ensuite, d'après l'hypothèse, étant donnée une fonction continue et bornée arbitraire, définie sur $\Omega \times \Omega$ et à valeurs réelles, on a la convergence

$$\int_\Omega f(X^n) d\mathbb{P} \longrightarrow \int_\Omega f(X) d\mathbb{P}. \tag{3}$$

En particulier, nous pouvons choisir $f(\omega, \omega') = g(V(\omega))g(\omega')$, où $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée et continue. Par conséquent,

Cette recherche a reçu l'appui du Programme de Recherche DIUC "Contributions analytiques à la Physique Mathématique" et du projet FONDECYT nr. 0807-91.

$$\int_{\Omega} g(V)g(V^n)d\mathbb{P} \longrightarrow \int_{\Omega} |g(V)|^2 d\mathbb{P}, \tag{4}$$

si $n \to \infty$.

De (4) on déduit la convergence

$$\int_{\Omega} |g(V^n) - g(V)|^2 d\mathbb{P} \longrightarrow 0. \tag{5}$$

C'est-à-dire, pour toute fonction continue et bornée $g : \Omega \to \mathbb{R}$, la suite $(g(V^n); n \in \mathbb{N})$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers $g(V)$, donc, en particulier, cette convergence a lieu en probabilité. Il s'ensuit la convergence en probabilité de $V^n$ vers $V$ au sens de la topologie de $\Omega$. En effet, soit $d$ une métrique pour la topologie de $\Omega$. Si $G$ est un ouvert quelconque de $\Omega$ et si $\epsilon > 0$ est arbitraire, alors il existe une fonction continue $g$ qui vaut 1 sur la fermeture $\overline{G}$ de $G$, et prend la valeur 0 sur le complémentaire du "grossi en $\epsilon$" $\overline{G}^\epsilon$, de sorte que $\mathbb{P}(V \in G, V^n \notin \overline{G}^\epsilon) \leq \mathbb{P}(g(V) = 1, g(V^n) = 0)$ et $\mathbb{P}(V \in G, V^n \notin \overline{G}^\epsilon) \to 0$ . Maintenant, si $\eta > 0$ est arbitraire, on peut choisir un compact $K_\eta$ de $\Omega$ tel que $\mathbb{P}(V \notin K_\eta) \leq \eta$. On recouvre ensuite ce compact par une famille finie $G_1, \ldots, G_N$ d'ouverts de diamètre $\leq \epsilon$. Il s'ensuit que

$$\mathbb{P}(d(V^n, V) > 2\epsilon) \leq \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}((V \in G_i, V^n \notin \overline{G_i}^\epsilon) + \eta, \tag{6}$$

et puisque $\epsilon, \eta$ sont arbitraires il en découle la convergence en probabilité.[1] □

Nous allons appliquer le lemme précédent à la transformation $V = W$. Tout d'abord nous allons démontrer un Principe d'Invariance pour des martingales locales définies sur l'espace de Wiener.

**Théorème 1.** *Une suite de martingales locales $(W^n; n \in \mathbb{N})$, définies sur l'espace de Wiener, convergent en probabilité vers le mouvement Brownien $W$, uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+$, si et seulement si les processus croissants associés vérifient la condition*

$$\langle W^n, W^n \rangle_t \xrightarrow{\mathbb{P}} t, \tag{7}$$

*pour tout $t \geq 0$, où " $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ " denote la convergence en probabilité.*

*Proof.* On remarquera d'abord que *toute martingale locale* définie sur l'espace de Wiener est à *trajectoires continues.* C'est une conséquence du Théorème de Représentation Prévisible. Ensuite, d'après un ancien résultat que j'ai prouvé en 1980 ([2], [3]), on obtient en particulier que des martingales locales continues convergent *en loi* vers le Brownien si et seulement si les crochets obliques satisfont la propriété (7). Il

[1] L'auteur remercie Albert Badrikian pour une remarque qui lui a permis d'améliorer une première version de cette preuve.

reste à établir que la convergence en loi de $W^n$ vers $W$ entraîne la convergence en probabilité annoncée. Or, cela est une conséquence facile du lemme 1, d'après ce qui suit.

La suite de processus $X^n = (W, W^n)$ est tendue. Soit $(X^{n'})$ une sous-suite convergente en loi, arbitraire. Sa limite s'écrit $(W, W)$, qui est par conséquent le point d'adhérence unique de toute la suite $(X^n)$. Donc $(X^n)$ converge en loi vers $(W, W)$. Il en résulte la convergence en probabilité, d'aprés le Lemme 1. $\square$

Les martingales locales $W^n$ du théorème précédent s'écrivent

$$W_t^n = \int_0^t u_s^n dW_s, \tag{8}$$

pour tout $t \geq 0$, où les processus $u^n$ sont prévisibles. La condition (7) est en particulier satisfaite si la suite $(u^n)$ vérifie les deux conditions suivantes

$$u_t^n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1, \tag{9}$$

pour tout $t \geq 0$ , et la suite de fonctions

$$t \mapsto \mathbb{E}(|u_t^n|^2), \tag{10}$$

est uniformément intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur tout intervalle borné. Ce type de propriété nous inspire pour traiter maintenant le cas non adapté.

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre de l'intégrale de Skorokhod. Le temps varie sur $[0, 1]$ et l'espace canonique est $\Omega = C([0, 1], \mathbb{R})$. Nous appliquons le Lemme 1 à la suite $V^n = W^n = u^n \bullet W$ et $V = W$, où la notation "$\bullet$" représente le *processus intégrale indéfinie* au sens de Skorokhod, chaque $u^n$ étant un élément de $\mathbb{L}^{1,2}$.

**Théorème 2.** *Etant donnée une suite $(u^n)$ dans $\mathbb{L}^{1,2}$, supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées:*

(1) *Les suites des fonctions $t \mapsto \mathbb{E}(|u_t^n|^2)$ et $(s, t) \mapsto \mathbb{E}(|D_s u_t^n|^2)$ sont uniformément intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ et sur $[0, 1]^2$ respectivement;*

(2) *La suite $(u_t^n)$ converge en probabilité vers 1, pour tout $0 \leq t \leq 1$.*

(3) *Il existe $p > 1$, tel que*

$$\sup_n \sup_{t \in [0,1]} \mathbb{E}((\int_0^1 |D_s u_t^n|^2 ds)^p) < \infty.$$

*Alors la suite $(u^n \bullet W)$ converge uniformément en probabilité vers $W$.*

*Proof.* On applique d'abord le Corollaire 2.1 de [1] pour en déduire la convergence en loi de $W^n = u^n \bullet W$ vers $W$ . Puis, on recopie l'argument de sous–suites utilisé dans la preuve du Théorème 1, pour obtenir la convergence en loi de la suite des processus $X^n = (W, W^n)$ vers $X = (W, W)$. Le Lemme 1 permet alors de compléter la démonstration. $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

1. Bobadilla,G.–Rebolledo,R.–Saavedra,E. (1991) *Sur la convergence d'intégrales anticipatives.* Dans ce même volume.
2. Rebolledo, R. (1980) *Semi-martingales et variations quadratiques. Conditions Nécessaires et Suffisantes de convergence en loi vers une Martingale Gaussienne.* C.R.Acad.Sci.Paris 290,sér.A,815–817.
3. Rebolledo, R. (1980) *The Central Limit Theorem for Semimartingales: Necessary and Sufficient Conditions.*Rapport interne num. 1, Univ. de Nice.

FACULTAD DE MATEMÁTICAS.PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE. CASILLA 306,CORREO 22,SANTIAGO