

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Les systèmes-produits et l'espace de Fock, d'après W. Arveson

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 106-113

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__106_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LES SYSTÈMES-PRODUITS ET L'ESPACE DE FOCK

exposé de P.A. Meyer, d'après W. Arveson

Cet exposé présente un extrait du grand travail d'Arveson [1]. Il fait suite à une introduction à cet article par Patrick Ion en Juin 1992, qui nous a tous persuadés de son intérêt. L'exposé essaye d'expliquer par quel chemin, en partant d'un objet de nature très générale (un semi-groupe d'endomorphismes de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$), on aboutit naturellement à un espace de Fock du type utilisé en calcul stochastique non commutatif. Nous donnons les grandes lignes des démonstrations, en renvoyant à l'original pour certains détails.

1. Endomorphismes de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable. Par endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ nous entendons toujours un $*$ -endomorphisme *normal*, c'est à dire continu pour la topologie faible de dualité avec les opérateurs à trace. Nous supposons aussi qu'un tel endomorphisme préserve l'identité.

La structure des endomorphismes de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est donnée par l'énoncé suivant. Voir Parthasarathy [2], Prop. 29.5 p. 253, qui utilise de manière étonnante le théorème de Stone-von Neumann.

THÉORÈME. Soit Θ un endomorphisme non nul de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Il existe une famille (finie ou dénombrable) d'isométries orthogonales V_n (i.e. $V_n^* V_n = I$) telle que

$$(1.1) \quad \Theta(A) = \sum_n V_n A V_n^* \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \quad .$$

Trois remarques : 1) $\Theta(I) = I \implies \sum_n V_n V_n^* = I$. 2) Θ est toujours injectif. 3) Θ est surjectif si et seulement si $\Theta(A) = U A U^*$ avec U unitaire.

La remarque 1) est évidente. La remarque 2) vient du fait que $A = V_1^* \Theta(A) V_1$. Quant à 3), si V_1 est dans l'image de Θ , soit $V_1 = \sum_n V_n A V_n^*$, on a $I = V_1^* V_1 = A V_1^*$, donc V_1^* est injectif; comme son noyau est l'orthogonal de l'image (fermée) de V_1 , V_1 est unitaire et il n'y a plus de place pour les autres.

Désormais, nous excluons le cas où Θ est surjectif.

2. Espace hilbertien d'opérateurs associé à un endomorphisme. Soit Θ un endomorphisme. On lui associe un espace d'opérateurs

$$(2.1) \quad \Phi(\Theta) = \{T : \forall A \quad \Theta(A) T = T A\} \quad .$$

Noter que les éléments de Φ^* sont caractérisés par la propriété $T\Theta(A) = AT$. Alors

THÉORÈME. 1) Si S, T appartiennent à $\Phi(\Theta)$, $S^* T$ est un multiple de l'identité, que nous noterons $\langle S, T \rangle I$.

2) L'application bilinéaire ainsi définie est un produit scalaire hilbertien sur $\Phi(\Theta)$.

3) Les isométries V_n de (1.1) constituent une base orthonormale de $\Phi(\Theta)$.

DÉMONSTRATION. 1) Soit A arbitraire. Alors $(S^*T)A = S^*(TA) = S^*(\Theta(A)T) = (S^*\Theta(A))T = (AS^*)T = A(S^*T)$, donc S^*T commute à tout opérateur, c'est un multiple de l'identité.

2) Il est clair que $\langle S, T \rangle$ est une forme hermitienne, et comme T^*T est positif, nul si et seulement si $T=0$, il est clair que $\Phi(\Theta)$ est préhilbertien séparé. Noter que tout élément de Φ de norme 1 est une isométrie. Ensuite, soit (X_n) une suite de Cauchy; les normes convergent, donc restent bornées, et il existe une suite extraite qui converge vers un opérateur X pour la topologie faible des opérateurs; on vérifie immédiatement que $X \in \Phi$. D'autre part, pour $S, T \in \Phi$ et $x, y \in \mathcal{H}$ on a $\langle Sx, Ty \rangle = \langle S, T \rangle \langle x, y \rangle$, donc supposant $\langle x, y \rangle \neq 0$ on voit que $\langle S, X_n \rangle \rightarrow \langle S, X \rangle$ pour tout $S \in \Phi$, et enfin la limite des X_n dans le complété de Φ ne peut être que $X \in \Phi$. Par conséquent, Φ est complet.

3) Que les V_n appartiennent à $\Phi(\Theta)$ est évident, et ils y sont orthogonaux. Si $W \in \Phi$ est orthogonal à tous les V_n , soit $V_n^*W = 0$ pour tout n , on a aussi $V_n V_n^*W = 0$, et $W = 0$ en sommant sur n . Inversement, on peut montrer que toute base orthonormale de Φ donne lieu à une représentation (1.1).

Si l'on remplace $\Theta(A)$ par $U\Theta(A)U^*$, Φ est remplacé par $U\Phi$.

THÉORÈME. Soient Θ et Ξ deux endomorphismes. Alors l'application $(S, T) \rightarrow ST$ envoie $\Phi(\Theta) \times \Phi(\Xi)$ dans $\Phi(\Theta\Xi)$. Comme elle est bilinéaire, elle définit une application linéaire de $\Phi(\Theta) \otimes \Phi(\Xi)$ dans $\Phi(\Theta\Xi)$, qui est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. Si $\Theta(A)S = SA$ et $\Xi(B)T = TB$ quels que soient A, B , il est immédiat de vérifier que $\Theta(\Xi(A))ST = STA$ pour tout A . Si $S_1^*S_2 = aI$ et $T_1^*T_2 = bI$ on a $(S_1T_1)^*(S_2T_2) = (ab)I$, donc la composition définit une isométrie de $\Phi(\Theta) \otimes \Phi(\Xi)$ dans $\Phi(\Theta\Xi)$. Il reste à démontrer que le produit tensoriel de deux bases orthonormales des deux espaces est une base orthonormale du dernier. Or si l'on a $\Theta(A) = \sum_n V_n A V_n^*$ et $\Xi(A) = \sum_i W_i A W_i^*$ on a $\Theta(\Xi(A)) = \sum_{in} (V_n W_i) A (V_n W_i)^*$.

REMARQUE. Il est peut être intéressant de noter que l'application $(S, x) \mapsto Sx$ de $\Phi(\Theta) \times \mathcal{H}$ dans \mathcal{H} donne aussi lieu à un isomorphisme entre $\Phi \otimes \mathcal{H}$ et \mathcal{H} .

3. Systèmes-produits. Nous considérons maintenant un *semi-groupe* Θ_t d'endomorphismes de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, que nous supposons continu au sens suivant : pour A fixe, $\Theta_t(A)$ est continu en t pour la topologie faible des opérateurs. Nous poserons $\Phi(\Theta_t) = \Phi_t$, et nous allons dégager quelques propriétés de ces sous-espaces de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ — qui deviendront les axiomes des systèmes-produits abstraits. Le but d'Arveson (qui ne nous concerne pas directement ici) est d'utiliser les systèmes-produits ainsi associés aux semi-groupes d'endomorphismes pour classer ceux-ci.

Voici le premier groupe de propriétés définissant les systèmes-produits :

1) Pour chaque $t > 0$, nous avons un espace de Hilbert Φ_t , et une "multiplication" (notée sans signe) de $\Phi_s \times \Phi_t$ dans Φ_{s+t} , qui est associative. L'application linéaire de $\Phi_s \otimes \Phi_t$ dans Φ_{s+t} qui lui correspond est un isomorphisme d'espaces de Hilbert.

On peut noter que la dimension de Φ_t est une fonction multiplicative, et ne peut donc prendre que les valeurs 1 et ∞ — mais par ailleurs le premier cas est exclu puisque les Θ_t ne sont pas surjectifs.

Le second groupe de propriétés est plus difficile à énoncer et à établir. Nous allons d'abord l'énoncer, puis expliquer la phrase, et l'établir pour le système associé à un semi-groupe.

2) La famille Φ_t est une famille mesurable d'espaces de Hilbert, et la multiplication est mesurable.

Cela signifie plusieurs choses : que l'ensemble somme des Φ_t , c'est à dire la réunion des $\{t\} \times \Phi_t$ est munie d'une bonne structure mesurable, pour laquelle la projection $(t, T) \mapsto T$ est mesurable, et (en un certain sens) le produit scalaire. Et d'autre part, qu'il existe des bases orthonormales de Φ_t dépendant mesurablement de t . Détaillons ces points.

Tout d'abord, la boule unité de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est compacte métrisable pour la topologie de dualité avec les opérateurs à trace — et pour la topologie faible des opérateurs, qui y induit la même topologie. Donc $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un \mathcal{K}_σ pour chacune de ces topologies, et admet une bonne structure borélienne (d'espace de Lusin), et il en est de même du produit $L =]0, \infty[\times \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Dans cet espace, l'ensemble somme des Φ_t peut s'écrire comme

$$E = \{(t, T) : \forall A \quad \Theta_t(A)T = TA\}.$$

Il est borélien, car il suffit de vérifier cette commutation sur les opérateurs de la forme $|x\rangle\langle y|$, x, y parcourant un ensemble dénombrable dense dans \mathcal{H} . On munira donc E de la structure mesurable induite.

Choisissons un couple de vecteurs (x, y) tel que $\langle x, y \rangle = 1$. La fonction sur $L \times L$

$$((s, S); (t, T)) \mapsto \langle Sx, Ty \rangle$$

est borélienne. Sa restriction à $E \times E$ induit sur $\Phi_t \times \Phi_t$ le produit scalaire $\langle S, T \rangle$, qui est donc borélien. De même, la fonction sur $L \times L$

$$((s, S); (t, T)) \mapsto ST$$

est borélienne, d'après la relation $\langle x, STy \rangle = \langle S^*x, Ty \rangle$ et le caractère borélien de l'opération $*$, et sa restriction à chaque Φ_t est la multiplication.

Cependant, il reste une condition délicate à vérifier dans la définition des familles mesurables d'espaces de Hilbert : l'existence de bases orthonormales de Φ_t dépendant mesurablement de t . Pour cela, Arveson démontre un lemme (non trivial) que nous admettrons ici :

LEMME. Il existe une famille fortement continue d'unitaires U_t telle que $\Theta_t(A) = U_t \Theta_1(A) U_t^*$.

Alors Φ_t est l'ensemble des opérateurs $U_t S$ avec $S \in \Phi_1$, et cela préserve le produit scalaire. Par conséquent, on construit alors une famille mesurable de bases orthonormales des Φ_t en promenant une base orthonormale de Φ_1 .

4. Un exemple : l'espace de Fock. Nous allons maintenant étudier un exemple fondamental de système-produit.

Soit \mathcal{K} un espace de Hilbert, et soit $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$. Soit Φ l'espace de Fock symétrique sur \mathcal{H} . Soient $\mathbf{1}$ le vecteur vide, et pour $s < t$ Φ_s^t l'espace de Fock

sur $L^2(]s, t], \mathcal{K})$; en particulier $\Phi_t = \Phi_t^0$, $\Phi^t = \Phi_\infty^t$. Il est bien connu que Φ est isomorphe à $\Phi_s \otimes \Phi^s$, ou plus généralement à $\Phi_s \otimes \Phi_t^s \otimes \Phi^t$. On identifie généralement les Φ_t^s (et en particulier Φ_t, Φ^t) à des sous-espaces de Φ , au moyen des applications $x \in \Phi_t^s \mapsto \mathbf{1}_s \otimes x \otimes \mathbf{1}^t \in \Phi$.

La translation est un isomorphisme de $[0, \infty[$ sur $[t, \infty[$, qui induit une isométrie $\theta_t : \Phi \mapsto \Phi^t$; nous définissons alors un semi-groupe Θ_t d'endomorphismes de $\mathcal{L}(\Phi)$ par

$$(4.1) \quad \Theta_t(A)(f_t \otimes \theta_t g) = f_t \otimes \theta_t(Ag).$$

Nous nous proposons de montrer que l'espace hilbertien d'opérateurs $\Phi(\Theta_t)$ s'identifie à Φ_t : précisément, tout opérateur $T \in \Phi(\Theta_t)$ est de la forme

$$(4.2) \quad Tg = \tau \otimes \theta_t g \quad \text{où } \tau \text{ est un élément fixe de } \Phi_t.$$

Nous remarquons d'abord qu'un opérateur de ce type appartient bien à $\Phi(\Theta_t)$, que l'adjoint d'un opérateur de ce type est de la forme

$$S^*(f_s \otimes \theta_t g) = \langle \sigma, f_s \rangle g$$

et que $S^*Tg = \langle \sigma, \tau \rangle g$ comme il convient. La réciproque est un peu moins évidente.

Considérons un vecteur normalisé g , et soit (e_n) une base orthonormale de Φ telle que $e_1 = g$. Soit (e'_m) une base orthonormale de Φ_t , et développons

$$Tg = \sum_{mn} \lambda_{mn} e'_m \otimes \theta_t e_n.$$

Nous avons alors, si A est un opérateur tel que $Ag = g$, $\Theta_t(A)Tg = TAG = Tg$, or

$$\Theta_t(A)Tg = \sum_{mn} \lambda_{mn} e'_m \otimes \theta_t Ae_n.$$

Par conséquent, en prenant pour A un opérateur de rang fini laissant fixe e_1 , on voit que tous les λ_{mn} avec $n \neq 1$ sont nuls. Autrement dit, Tg est de la forme $u \otimes \theta_t g$ avec $u \in \Phi_t$ — et cela, quel que soit le vecteur g . Or on a le petit résultat suivant d'algèbre linéaire: si E, F sont des espaces vectoriels, si tous les éléments d'un sous-espace $H \subset E \otimes F$ sont de la forme $f = a \otimes b$, alors ou bien a est fixe, ou bien b est fixe. Donc ici on a un opérateur de la forme $Tg = \tau \otimes \theta_t g$ avec un vecteur fixe $\tau \in \Phi_t$.

La multiplication d'Arveson, qui applique $\Phi_s \times \Phi_t$ dans Φ_{s+t} , est alors l'application $(f_s, g_t) \mapsto f_s \otimes \theta_s g_t$.

Le problème résolu par Arveson est de caractériser les systèmes-produits isomorphes au modèle de Fock.

Il faut souligner les propriétés spéciales du Fock rencontrées ci-dessus: en général, il n'y a aucune relation entre les Φ_t . Ici, en utilisant les vecteurs vide $\mathbf{1}_t$ des Φ_t , nous avons pu introduire une structure plus riche, comportant une relation d'inclusion entre les Φ_t .

5. Unités. Etant donné un système-produit abstrait (Φ_t) , Arveson appelle *unité* toute famille mesurable d'éléments $u_t \in \Phi_t$, non identiquement nulle et telle que $u_s u_t = u_{s+t}$. La fonction $t \mapsto \|u_t\|$ est une solution mesurable de l'équation

exponentielle, et donc de la forme $e^{t\lambda}$; remplaçant u_t par $e^{-t\lambda}u_t$, on pourrait se borner à considérer des unités de norme 1. Dans la situation des systèmes-produits associés aux semi-groupes Θ_t d'endomorphismes de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, une unité de norme 1 correspond à un semi-groupe d'isométries (U_t) tel que $\Theta_t(A)U_t = U_tA$ pour tout t et tout A .

Le nom d'unité peut sembler bizarre : on aimerait appeler "exponentielles" ces familles de vecteurs. En fait, cela créerait beaucoup de confusion avec les vecteurs exponentiels usuels du Fock, et Arveson a été très sage de créer un nouveau nom.

Le théorème principal d'Arveson dit qu'un système-produit est du type Fock si, et seulement s'il admet "suffisamment" d'unités. Arveson mentionne l'existence (établie par Powers), d'un système-produit associé à un semi-groupe d'endomorphismes et n'admettant aucune unité.

Le lemme suivant est très important.

LEMME 1. Soient (u_t) et (v_t) deux unités. Alors le produit scalaire $\langle u_t, v_t \rangle$ est une exponentielle $e^{t\gamma}$.

DÉMONSTRATION. Appelons $f(t)$ ce produit scalaire. Il est immédiat que f est mesurable et que $f(s+t) = f(s)f(t)$. Il suffit donc de démontrer que $f(0+) \neq 0$. On se ramène au cas où u, v sont des unités de norme hilbertienne égale à 1. Considérons l'espace de Hilbert \mathcal{G} des "processus mesurables adaptés" $\varphi_t \in \Phi_t$ tels que $\int_0^\infty \|\varphi_t\|^2 dt < \infty$. On peut montrer que \mathcal{G} est séparable. Nous faisons opérer $x \in \Phi_r$ sur le "processus" $\varphi = (\varphi_t)$ en posant

$$(T(x)\varphi)_t = 0 \quad \text{si } t \leq r, \quad x \cdot \varphi_{t-r} \quad \text{si } t > r.$$

On définit ainsi une représentation du système-produit, i.e. $T(x)T(y) = T(x \cdot y)$. De plus, si x est de norme 1 $T(x)$ est isométrique. En particulier posons $U_t = T(u_t)$; nous définissons ainsi un semi-groupe d'isométries de \mathcal{G} , qui est mesurable et donc fortement continu. Soit de même $V_t = T(v_t)$. Alors si φ est de norme 1, on vérifie que

$$\langle U_t \varphi, V_t \varphi \rangle = \langle u_t, v_t \rangle$$

tend lorsque $t \rightarrow 0$ vers $\langle \varphi, \varphi \rangle = 1$.

6. Unités du Fock. Rappelons la notation $\mathcal{E}(h)$ pour désigner le vecteur exponentiel du Fock associé à $h \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$. En particulier, pour $\xi \in \mathcal{K}$ le vecteur $\xi I_{[0,t[}$ (on a omis le signe \otimes) appartient à \mathcal{H} , et nous poserons

$$(6.1) \quad e_t(\xi) = \mathcal{E}(\xi I_{[0,t[}).$$

Cette famille est une unité du Fock, et pour $\xi = 0$ on trouve le vide, ou plutôt la famille $\mathbf{1} = \mathbf{1}_t$, qui a aussi une norme hilbertienne égale à 1. Pour alléger le langage, nous dirons que les unités du type (6.1) sont les unités spéciales du Fock. Ces unités sont normalisées, non pas au sens de la norme hilbertienne, mais au sens du produit scalaire $\langle \mathbf{1}_t, e_t(\xi) \rangle$ qui a la valeur 1 — cette notion est propre au Fock, puisqu'elle fait intervenir le vide.

Dans le cas de deux unités du Fock de la forme $u_t = e^{t\lambda}e_t(\xi)$, $v_t = e^{t\mu}e_t(\eta)$, on a

$$(6.2) \quad \langle v_t, u_t \rangle = e^{t(\bar{\mu} + \lambda + \langle \eta, \xi \rangle)}.$$

Arveson a démontré le théorème suivant, qui devrait être classique en théorie de l'espace de Fock (on devrait plus généralement savoir caractériser tous les "vecteurs multiplicatifs", homogènes ou non), mais qui ne l'est pas :

THÉOREME. Toute unité du Fock est de la forme

$$(6.3) \quad u_t = e^{ct} e_t(\xi), \quad (c \in \mathbb{C}, \xi \in \mathcal{K}).$$

Nous allons établir ce résultat par une démonstration probabiliste, différente de celle d'Arveson.

Nous nous plaçons dans l'interprétation brownienne de l'espace de Fock — autrement dit, $\Phi = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, l'espace probabilisé engendré par une famille dénombrable de mouvements browniens indépendants (X_t^α) , en bijection avec une base orthonormale e^α de \mathcal{K} . L'espace Φ_t devient $L^2(\mathcal{F}_t)$. Le vecteur vide devient la fonction 1, et la fonctionnelle $\langle 1, \cdot \rangle$ l'espérance $\mathbb{E}[\cdot]$. Dans ces conditions, soit (u_t) une unité normalisée. Chaque u_t se lit comme une v.a. de carré intégrable, \mathcal{F}_t -mesurable, et le processus (u_t) est un processus à accroissements multiplicatifs indépendants et homogènes par rapport à la filtration (\mathcal{F}_t) . La normalisation $\mathbb{E}[u_t] = 1$ entraîne que ce processus est une martingale. On peut donc en choisir une modification à trajectoires càdlàg. D'après le théorème de convergence des martingales, elle admet une limite p.s. en $t = 0$ qui (la tribu \mathcal{F}_{0+} étant dégénérée) ne peut être que 1. Un processus à accroissements multiplicatifs indépendants et homogènes est un processus de Markov dans la filtration (\mathcal{F}_t) , admettant 0 comme état absorbant : l'homogénéité multiplicative entraîne que la probabilité de transition $P_t(x, \{0\})$ ne dépend pas de x pour $x \neq 0$. Ensuite, la propriété de Markov entraîne que $\pi(s) = P_s(x, \{0\})$ satisfait à

$$\pi(s+t) = \pi(s) + (1 - \pi(s))\pi(t) \quad \text{d'où} \quad \pi(s) = 1 - e^{-\lambda s}.$$

Ensuite, si S est le temps de première rencontre de 0, on a

$$\mathbb{P}\{S \leq t | \mathcal{F}_s\} = I_{\{S \leq s\}} + I_{\{S > s\}} e^{-\lambda(t-s)}$$

donc S est un temps exponentiel dans la filtration brownienne, et il n'existe pas de tel temps d'arrêt. Donc le processus ne rencontre jamais 0. C'est donc un p.a.i. sur le groupe multiplicatif $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, dans la filtration (\mathcal{F}_t) . Or les sauts d'un p.a.i. sont totalement inaccessibles, et il n'y a pas de temps d'arrêt totalement inaccessibles dans la filtration (\mathcal{F}_t) — donc ce p.a.i. est continu, on peut prendre son logarithme, qui est un p.a.i. additif continu à valeurs dans \mathbb{C} , issu de 0, donc un processus gaussien, etc. Pour finir c'est un processus de la forme

$$ct + \sum_{\alpha} c_{\alpha} X_t^{\alpha} \quad \text{où les } c_{\alpha} \text{ sont des constantes.}$$

Mais alors il est clair que (u_t) est une unité spéciale.

7. Caractérisation de l'espace de Fock. Considérons n unités v^1, \dots, v^n , n indices s_1, \dots, s_n de somme t ; alors le produit $v_{s_1}^1 v_{s_2}^2 \dots v_{s_n}^n$ est un élément de Φ_t . Nous noterons Φ_t° l'espace vectoriel engendré par les produits de ce type. Sur le Fock et lorsque les v^i sont des vecteurs exponentiels homogènes, cela correspond à la valeur en t du vecteur exponentiel associé à une fonction étagée. Par conséquent,

LEMME 2. Dans le cas du Fock, Φ_t° est dense dans Φ_t .

Le théorème principal d'Arveson est la réciproque de ce résultat. Avec les notations précédentes :

THÉORÈME. Un système produit est isomorphe à l'espace de Fock si et seulement si Φ_t° est dense dans Φ_t (pour tout t).

REMARQUE. Il me semble clair (mais je n'ai pas vérifié les détails) qu'en général les adhérences $\Phi_t^* = \overline{\Phi_t^{\circ}}$ constituent un système-produit, qui admet les mêmes unités que le précédent, et qui est le plus grand système-produit du type Fock contenu dans Φ_t .

La démonstration de ce théorème est très ingénieuse, et pas du tout facile. Nous allons en indiquer les grandes lignes, en commençant par quelques constructions préparatoires.

a) Une première étape consiste à se donner une unité de norme hilbertienne $\mathbf{1}$, qui va jouer le rôle du vecteur vide. Aussi la noterons nous $\mathbf{1}_t \in \Phi_t$. Pour $s < t$ nous identifions $x_s \in \Phi_s$ à $x_s \cdot \mathbf{1}_{t-s} \in \Phi_t$. Ces identifications sont compatibles : cela signifie que $x_s \mathbf{1}_{t-s} \mathbf{1}_{u-t} = x_s \mathbf{1}_{u-s}$, i.e. la multiplicativité de $\mathbf{1}$.

On a construit ainsi une famille croissante d'espaces de Hilbert Φ_t . On peut si on le désire les plonger dans un gros espace Φ qui est le complété de leur réunion. On peut aussi considérer leur intersection Φ_0 , qui doit être triviale (mais cela ne semble pas évident).

L'introduction du vecteur vide permet de normaliser les unités.

b) On cherche à établir une correspondance biunivoque entre les unités (u_t) et les éléments (λ, ξ) de $\mathbb{C} \times \mathcal{K}$ (où \mathcal{K} est un certain espace de Hilbert) dans laquelle $u_t = e^{\lambda t} \mathcal{E}(\xi I_{[0, t[})$. L'idée naturelle de départ consiste à prendre pour \mathcal{K} l'ensemble \mathcal{U} des unités normalisées lui-même (le coefficient λ se lit sur la normalisation), le "produit scalaire" de deux unités normalisées (noté $\gamma(v, u)$ pour éviter des confusions) étant défini par

$$(7.1) \quad \langle v_t, u_t \rangle = e^{t\gamma(v, u)}.$$

Il est facile de voir que cette fonction est *conditionnellement de type positif* sur \mathcal{U} , et il est alors tout à fait classique qu'il existe une application canonique σ de \mathcal{U} dans un espace de Hilbert \mathcal{K} , tel que pour $u, v \in \mathcal{U}$ on ait $\gamma(v, u) = \langle \sigma(v), \sigma(u) \rangle_{\mathcal{K}}$. La normalisation fait que $\gamma(\mathbf{1}, u) = 0$ pour tout u , donc $\sigma(\mathbf{1}) = 0$. D'autre part, il résulte aisément de l'hypothèse de densité de Φ_t° dans Φ_t qu'une unité u est uniquement déterminée par la fonction $\gamma(\cdot, u)$; donc l'application σ est injective.

c) Le principal problème est maintenant de montrer qu'en fait σ est une bijection de \mathcal{U} sur \mathcal{K} . Pour cela, on voudrait savoir lire sur \mathcal{U} les opérations de \mathcal{K} , l'addition et la multiplication par un scalaire. Mais on ne sait pas "multiplier" les unités! Arveson est parvenu à donner aux unités au moins une structure *convexe*.

L'idée qui intervient est la suivante : considérons deux fonctions a, b de $L^2([0, 1])$ (par exemple). Considérons la n -ième partition dyadique de $[0, 1]$, et la fonction c_n égale à a sur les intervalles impairs, à b sur les intervalles pairs. Alors lorsque $n \rightarrow \infty$, c_n converge faiblement vers $(a+b)/2$. Plus généralement, si on partage chaque intervalle en deux dans le rapport $(p, 1-p)$ au lieu de $(1/2, 1/2)$, c_n converge faiblement vers $pa + (1-p)b$.

On prend alors deux unités u, v (non nécessairement normalisées), et on pose

$$(7.2) \quad w_n(t) = (u_{t/2^{n+1}} v_{t/2^{n+1}})^{2^n} \in \Phi_t.$$

On montre que $w_n(t)$ converge faiblement en vérifiant 1) qu'il reste borné en norme (ce qui est facile) 2) que le produit scalaire de $w_n(t)$ avec n'importe quel produit

$$(7.3) \quad \pi_t = u_{r_1 t}^1 u_{r_2 t}^2 \dots u_{r_k t}^k$$

admet une limite, où les u^i sont des unités arbitraires, et les s_i sont des éléments dyadiques de $[0, 1]$ de somme égale à 1 — en effet, le sous-espace fermé de Φ_t engendré par les produits (7.3) contient $w_n(t)$ pour tout t : il n'est pas nécessaire d'utiliser l'hypothèse de densité pour cela. Alors en utilisant la remarque ci dessus, on trouve que $\langle \pi_t, w_n(t) \rangle$ tend vers $\prod_i e^{s_i(\gamma(u^i, v) + \gamma(u^i, u))/2}$.

On montre alors sans problème que les limites w_t des $w_n(t)$ constituent une unité. Arveson note $[uv]$ l'unité w . Dans le cas du Fock, v et u étant de la forme $e^{\mu t} \mathcal{E}(\eta I_{[0, t]})$ et $e^{\lambda t} \mathcal{E}(\xi I_{[0, t]})$, les paramètres de w seraient $(\lambda + \mu)/2, (u + v)/2$.

d) On peut maintenant achever la démonstration : On construit l'espace de Fock sur \mathcal{K} , que nous notons Ψ , et le système produit correspondant. On a un homomorphisme injectif de Φ_t dans Ψ_t , et il s'agit de savoir si c'est un isomorphisme. On est donc ramené au problème suivant sur l'espace de Fock. On part d'un ensemble $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}$ qui contient 0, qui est convexe et engendre \mathcal{K} au sens hilbertien. Soit Σ_t l'espace hilbertien engendré par l'ensemble des vecteurs exponentiels de Ψ_t de la forme $\mathcal{E}(h)$, où h est sur $[0, t]$ une fonction étagée à valeurs dans \mathcal{U} . A-t-on alors $\Sigma_t = \Psi_t$?

On fait la remarque suivante : les coefficients du développement en chaos de $\mathcal{E}(h)$ se calculent au moyen des dérivées successives de $\mathcal{E}(rh)$ pour $r = 0$. Or la courbe $r \mapsto \mathcal{E}(rh)$ est tracée dans Σ_t pour $r \in [0, 1]$, et cela suffit pour calculer ces dérivées, qui appartiennent donc à Σ_t . Mais alors, en sommant la série exponentielle, on voit que $\mathcal{E}(rh)$ appartient à Σ_t pour tout $r \in \mathbb{C}$. Alors la convexité de \mathcal{U} entraîne que Σ_t contient les vecteurs $\mathcal{E}(h)$, où h parcourt une *espace vectoriel dense dans \mathcal{K}* . L'application exponentielle étant continue, la démonstration est finie.

RÉFÉRENCES

- [1] ARVESON (W.). *Continuous Analogues of Fock space, Memoirs A.M.S.* n° 409, vol. 80, 1989.
 [2] PARTHASARATHY (K.R.). *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*, Birkhäuser 1992.