

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL LESCOT

## **Un théorème de désintégration en analyse quasi-sûre**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 27 (1993), p. 256-275

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1993\\_\\_27\\_\\_256\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__256_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN THEOREME DE DESINTEGRATION EN ANALYSE QUASI-SURE

Paul L E S C O T

Université Paris VI  
ANALYSE COMPLEXE ET GEOMETRIE  
U.R.A. 213 du CNRS  
Tour 45-46 5<sup>e</sup> étage — Boite 172  
4, place Jussieu  
75252 PARIS CEDEX 05

§ 0. INTRODUCTION. Soit  $(X, H, \mu)$  l'espace de Wiener classique, et soit  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  une application indéfiniment différentiable au sens du calcul des variations stochastiques ([5]). L'objet de ce travail est d'étudier la désintégration de  $\mu$  par  $g$  sous une hypothèse plus générale que la "non-dégénérescence" de [1]; plus précisément, nous obtiendrons le résultat suivant :

THÉORÈME A : Soit  $g \in \mathcal{D}^\infty(X; \mathbb{R}^d)$  telle que  $(\det g^*)(x) \neq 0$  sauf sur un ensemble mince, et soit  $\nu = g_* \mu$  la mesure image de  $\mu$  par  $g$ . Alors :

(i)  $\nu(d\xi) = k(\xi)d\xi$ , où  $k : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  est une fonction semi-continue inférieurement

(ii)  $k(\xi) < +\infty$  d $\xi$ -presque sûrement en  $\xi$ .

(iii) Soit  $O = \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid k(\xi) > 0\}$ ; alors  $O$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\nu(\mathbb{R}^d \setminus O) = 0$  et, pour tout compact  $K \subset O$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $k(\xi) > \delta$  pour tout  $\xi \in K$ .

(iv)  $\text{supp}(\nu) = \overline{O}$ .

(v) Il existe une application  $\hat{\sigma}$  de  $O$  dans l'ensemble des mesures boréliennes sur  $X$  telle que, pour toute  $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ , toute  $\nu \in \mathcal{D}^\infty(X; \mathbb{R})$  et toute redéfinition  $\nu^*$  de  $\nu$ , on ait :

$$\int_X u(g(x)) \nu(x) d\mu(x) = \int_O u(\xi) \left( \int_X \nu^*(x) \hat{\sigma}(\xi)(dx) \right) d\xi$$

(vi) Pour tout  $\xi \in O$ ,  $\hat{\sigma}(\xi)(X) = k(\xi)$ .

(vii) Pour toute fonction  $\nu \in \mathcal{D}^\infty(X)$ ,  $\nu \geq 0$ , et toute redéfinition  $\nu^*$  de  $\nu$ , l'application  $\xi \mapsto \int_X \nu^*(x) \hat{\sigma}(\xi)(dx)$  est semi-continue inférieurement de  $O$  dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ .

Au passage nous obtenons le "principe de descente" :

THÉORÈME B : Soit  $B$  une partie mince de  $X$ ; alors, pour tout  $\xi \in O$ ,  $B$  est  $\hat{\sigma}(\xi)$ -négligeable.

Ce Théorème généralise le résultat de [1] d'après lequel la mesure d'aire ne charge pas les ensembles minces.

L'existence d'un  $\xi$  tel que  $\hat{\sigma}(\xi)$  soit de masse totale infinie est possible : nous donnons à la fin de cet article l'exemple d'une fonction  $g$  satisfaisant les hypothèses du Théorème A et telle que  $k$  prenne la valeur  $+\infty$ .

Nous commencerons par établir l'existence d'une densité indéfiniment différentiable pour des versions tronquées de la mesure  $\nu$ , au moyen d'une technique d'intégration par parties qui s'inspirera de [6]; notre construction fera intervenir une fonction arbitraire  $\psi$ . Par la suite un théorème de SUGITA ([9]), récemment généralisé par KAZUMI et SHIGEKAWA ([3]), nous fournira une "bonne désintégration" pour ces mesures tronquées. Après en avoir déduit les propriétés voulues, nous ferons voir que les différents objets construits  $(k, 0, \hat{\sigma})$  ne dépendent pas de  $\psi$ .

Ichiro SHIGEKAWA a bien voulu me communiquer le preprint de [3]; des conversations avec Johan van BIESEN ont été très suggestives. Qu'ils en soient ici remerciés.

### § 1. DÉFINITIONS, NOTATIONS ET RÉSULTATS ADMIS.

Nous nous placerons dans le cadre de [1]; en particulier  $X$  sera l'espace de Wiener classique (espace des fonctions continues réelles sur  $[0,1]$  nulles en 0),  $H$  son sous-espace de Cameron-Martin et  $\mu$  la mesure de Wiener sur  $X$ .  $\mathbb{W}^{p,r}(X)$  et  $\mathbb{W}^\infty(X)$  désigneront les analogues usuels sur  $X$  des classiques espaces de Sobolev. Pour  $f \in \mathbb{W}^{p,r}(X)$ , on posera  $\|f\|_{p,r} = \|(I - \mathcal{L})^{r/2} f\|_{L^p(X)}$ , où  $\mathcal{L}$  désigne l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck (cf. [7]).

Pour tout ouvert  $O$  de  $X$ , on pose

$C_{p,r}(O) = \inf\{\|f\|_{p,r}^p \mid f \in \mathbb{W}^{p,r}(X), f \geq 0, f \geq 1 \text{ } \mu\text{-p.p. sur } O\}$ ; on prolonge  $C_{p,r}$  à  $\mathcal{O}(X)$  en posant  $C_{p,r}(A) = \inf\{C_{p,r}(O) \mid O \text{ ouvert de } X \text{ et } A \subset O\}$  pour toute partie  $A$  de  $X$ . Un sous-ensemble  $Y$  de  $X$  sera dit mince si  $C_{p,r}(Y) = 0$  pour tout  $p \geq 1$  et tout  $r \in \mathbb{N}$ .

On notera  $\mathbb{W}^{q,-r}(X)$  le dual topologique de  $\mathbb{W}^{p,r}(X)$  ( $q$  est l'exposant conjugué de  $p$ , i.e. tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ) ; nous le munirons de sa norme naturelle :

$$\|F\|_{\mathbb{W}^{q,-r}(X)} = \sup_{\substack{f \in \mathbb{W}^{p,r}(X) \\ \|f\|_{p,r} \leq 1}} |F(f)| .$$

Soit  $g \in \mathbb{W}^\infty(X)$  ; alors on peut trouver une suite décroissante d'ouverts de  $X$ ,  $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et une suite  $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{W}^\infty(X)$  telles que :

- (i)  $g_m$  est continue sur  $O_r^c$ , pour tous  $m$  et  $r$ .
- (ii) Pour chaque  $r$ , la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $O_r^c$  vers la restriction à  $O_r^c$  d'une fonction  $g^* \in \mathbb{W}^\infty(X)$ .
- (iii)  $g_n \rightarrow g$  dans  $\mathbb{W}^\infty(X)$ .
- (iv)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_{n,n}(O_n) = 0$ .

Dans ces conditions, on appelle  $g^*$  une redéfinition de  $g$ . Toute redéfinition de  $g$  est quasi-borélienne, et deux quelconques coïncident en dehors d'un ensemble mince. Si  $\rho$  est une mesure borélienne sur  $X$  ne chargeant pas les ensembles minces, l'expression  $\int g^*(x) d\rho(x)$  est donc définie sans ambiguïté, pour toute  $g \in \mathbb{W}^\infty$ .

Soient  $p \geq 1$ ,  $r \in \mathbb{N}$  ; en vertu des résultats de [4], il existe une application continue

$$\delta : \mathbb{W}^{p,r+1}(X) \longrightarrow \mathbb{W}^{p,r}(X) \text{ telle que :}$$

$$\forall f \in \mathbb{W}^{p,r+1}(X) \quad \forall g \in \mathbb{W}^{q,1}(X) \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right) \quad \int_X (f(x) \{ \nabla g(x) \}) d\mu(x) = - \int_X \delta f(x) \cdot g(x) d\mu(x) ;$$

on l'appelle la divergence sur  $X$ .

D'après les inégalités de Meyer ([7]), la norme  $\| \cdot \|_{p,r}$  est équivalente à la norme  $\|f\|_{p,r}^1 = \sum_{j=0}^r \| \nabla^j f \|_{L^p(X; H^{\otimes j})}$  ; l'inégalité de Hölder implique alors la continuité de la multiplication de  $\mathbb{W}^{p,r}(X) \times \mathbb{W}^{p',r}(X)$  dans  $\mathbb{W}^{p'',r}(X)$  dès que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{p''}$ . En particulier la multiplication par un élément donné de  $\mathbb{W}^\infty(X)$  est continue de  $\mathbb{W}^{p,r}(X)$  dans  $\mathbb{W}^{p',r}(X)$  dès que  $1 \leq p' < p$  ; nous ferons constamment usage de cette remarque au second paragraphe.

Pour tout espace topologique  $N$ , on notera  $\mathcal{C}(N)$  (resp.  $\mathcal{C}_b(N)$ ,  $\mathcal{C}_c(N)$ ) l'espace des fonctions réelles continues sur  $N$  (resp. continues bornées, continues à support compact).

Un résultat classique d'analyse harmonique sera crucial :

LEMME 1.1 : Soit  $\nu$  une mesure de Radon finie sur  $\mathbb{R}^d$  telle qu'existe une suite  $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de réels vérifiant

$$\left| \int \frac{\partial^{|\alpha|} h}{\alpha_1 \dots \alpha_d} \nu(d\xi) \right| \leq \mu_n \|h\|_{C_b(\mathbb{R}^d)}$$

pour tout entier  $n$ , tout multi-indice  $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  avec  $\alpha_1 + \dots + \alpha_d = n$

et toute  $h \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Alors,  $\nu$  possède une densité indéfiniment différentiable

f par rapport à la mesure de Lebesgue  $d\xi$  sur  $\mathbb{R}$ , et

$$\|f\|_{C_b^k(\mathbb{R}^d)} \leq \lambda_{k,d} \max(\mu_0, \dots, \mu_{k+d+1}) \text{ pour tout } k, \text{ avec des } \lambda_{k,d} \text{ indépendants de } \nu.$$

Pour la démonstration, voir STROOCK ([9]), Lemma 3.1, p. 56.

## § 2. INTÉGRATION PAR PARTIES.

Dans toute la suite de cet article, nous fixerons  $g = (g_1, \dots, g_d) \in \mathbb{D}^\infty(X; \mathbb{R}^d)$  satisfaisant les hypothèses du Théorème A. On notera, pour tous  $1 \leq i, j \leq d$ ,  $\sigma_{i,j}(x) = (\nabla g_i(x) | \nabla g_j(x))$ , et  $a(x) = \det(\sigma_{i,j}(x))_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq d}}$  (i.e., avec les notations usuelles ([1]),  $a(x) = (\det g)^2(x)$ );  $\{x \in X | a^*(x) = 0\}$  est donc mince par hypothèse. On notera  $(H_{i,j}(x))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  la comatrice de  $\sigma_{i,j}(x)$ ; chaque  $H_{i,j}$  est un polynôme homogène de degré  $n-1$  en les  $\sigma_{i,j}$ , d'où, par calcul symbolique,  $H_{i,j} \in \mathbb{D}^\infty(X; \mathbb{R})$ . En outre, si l'on définit  $\gamma_{i,j}(x) = a(x)^{-1} H_{j,i}(x)$ , il est bien connu que  $\gamma(x)$  est l'inverse de  $\sigma(x)$ .

Nous allons établir le

THÉORÈME 2.1. : Soit  $\varphi \in L^1(X)$ ,  $\varphi \geq 0$  telle que pour tout  $k \geq 0$ ,

$$\varphi_k = \frac{\varphi}{a^k} \in \mathbb{D}^\infty(X; \mathbb{R}); \text{ alors, pour toute } f \in \mathbb{D}^{2,\infty}(X), \nu_{\varphi, f} = g_* (\varphi f \mu) \text{ possède}$$

une densité  $\mathcal{E}^\infty$   $k_{\varphi, f}(\xi)$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ , et on a

$$\|k_{\varphi, f}\|_{\mathcal{E}_b(\mathbb{R}^d)} \leq C(\varphi) \|f\|_{W^{2, d+1}(X)}.$$

Démonstration. Posons, pour chaque  $i \in \{1, \dots, d\}$  :

$$Z_i(x) = \sum_{j=1}^d H_{i,j}(x) \nabla g_j(x). \text{ Il est clair que } Z_i \in \mathcal{W}^\infty(X; H); \text{ en outre}$$

$(\nabla g_k(x) | Z_i(x)) = \delta_{ik} a(x)$  par définition même des  $H_{i,j}$ . Dans la terminologie du chapitre 3 de [6],  $Z_i$  n'est autre que le "canonical lift" à  $X$  du champ de vecteurs

$\frac{\partial}{\partial \xi_i}$  sur  $\mathbb{R}^d$ ; plus précisément on a le

LEMME 2.2 : Soit  $h \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$ ; alors :

$$\frac{\partial h}{\partial \xi_i}(g(x))a(x) = (\nabla(h \circ g)(x) | Z_i(x))$$

pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ .

Démonstration. On a

$$\nabla(h \circ g)(x) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial h}{\partial \xi_j}(g(x)) \nabla g_j(x),$$

d'où :

$$\begin{aligned} (\nabla(h \circ g)(x) | Z_i(x)) &= \sum_{j=1}^d \frac{\partial h}{\partial \xi_j}(g(x)) (\nabla g_j(x) | Z_i(x)) = \sum_{j=1}^d a(x) \delta_{ij} \frac{\partial h}{\partial \xi_j}(g(x)) \\ &= a(x) \frac{\partial h}{\partial \xi_i}(g(x)). \quad \square \end{aligned}$$

Nous allons maintenant définir, pour tout  $d$ -indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$  et tout

$k \in \mathbb{N}$ , des opérateurs  $R_{k, \alpha}$ . Leur construction procède par récurrence sur

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d :$$

on pose  $R_{k, (0, \dots, 0)}(f) = \varphi_k f$ . Supposons ensuite  $|\alpha| \geq 1$ , et soit  $j$  le plus petit des indices  $i$  tels que  $\alpha_i \neq 0$ ; écrivons  $\alpha' = (0, 0, \dots, 0, \alpha_j - 1, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n)$ .

On a  $|\alpha'| = |\alpha| - 1$ , donc, par hypothèse de récurrence, les  $R_{k, \alpha'}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) sont définis.

Posons alors :

$$R_{k, \alpha}(f) = - (k+1) R_{k+2, \alpha'}(f) (\nabla a | Z_j) - a \delta(R_{k+2, \alpha'}(f) Z_j).$$

LEMME 2.3 : Pour tous  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in (\mathbb{N}^+)^d$ , tout  $r \in \mathbb{N}$ , et tous  $p > p' \geq 1$ ,  $R_{k,\alpha}$  définit un opérateur continu de  $\mathbb{W}^{p,r+|\alpha|}(X)$  dans  $\mathbb{W}^{p',r}(X)$ .

Démonstration. Elle procède par récurrence sur  $|\alpha|$ .

Pour  $|\alpha| = 0$ ,  $R_{k,\alpha}$  n'est autre que la multiplication par  $\varphi_k$ , et la propriété résulte de la remarque faite au § 1 et de l'hypothèse  $\varphi_k \in \mathbb{W}^\infty(X)$ .

Supposons le résultat démontré pour  $|\alpha| \leq n$ , et soit  $\alpha$  tel que  $|\alpha| = n+1$ ; définissons  $\alpha'$  comme ci-dessus, et fixons  $p''$  et  $p'''$  de telle sorte que  $p' < p'' < p''' < p$ . On a  $(\forall a | Z_j) \in \mathbb{W}^\infty(X)$ ; or, par hypothèse de récurrence,  $f \rightarrow R_{k+2,\alpha'}(f)$  est bien définie et continue de  $\mathbb{W}^{p,r+n+1}(X)$  dans  $\mathbb{W}^{p'',r+1}(X)$ ;  $f \rightarrow (k+1)(\forall a | Z_j)R_{k+2,\alpha'}(f)$  est donc continue de  $\mathbb{W}^{p,r+n+1}(X)$  dans  $\mathbb{W}^{p',r+1}(X)$ , a fortiori de  $\mathbb{W}^{p,r+n+1}(X)$  dans  $\mathbb{W}^{p',r}(X)$ . En outre,  $f \rightarrow R_{k+2,\alpha'}(f)$  est bien définie et continue de  $\mathbb{W}^{p,r+n+1}(X)$  dans  $\mathbb{W}^{p''',r+1}(X)$ ;  $f \rightarrow R_{k+2,\alpha'}(f)Z_j$  est donc continue de  $\mathbb{W}^{p,r+n+1}(X)$  dans  $\mathbb{W}^{p'',r+1}(X;H)$ . On peut dès lors utiliser la continuité de la divergence, en vertu de laquelle  $f \rightarrow \delta(R_{k+2,\alpha'}(f)Z_j)$  est continue de  $\mathbb{W}^{p,r+n+1}(X)$  dans  $\mathbb{W}^{p'',r}(X)$ , et donc  $f \rightarrow a \cdot \delta(R_{k+2,\alpha'}(f)Z_j)$  l'est de  $\mathbb{W}^{p,r+n+1}(X)$  dans  $\mathbb{W}^{p',r}(X)$  (car  $a \in \mathbb{W}^\infty(X)$ ). On a donc bien établi le résultat au rang  $n+1$ .  $\square$

LEMME 2.4 : Pour tout  $\alpha \in (\mathbb{N}^+)^d$ ,  $R_{0,\alpha}$  définit un opérateur continu de  $\mathbb{W}^{2,|\alpha|}(X)$  dans  $L^1(X)$ .

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Lemme 2.3 en prenant  $p = 2$ ,  $p' = 1$ ,  $r = 0$ ,  $k = 0$ .

LEMME 2.5 : Pour tous  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in (\mathbb{N}^+)^d$ , toute  $h \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$  et toute  $f \in \mathbb{W}^{2,\infty}(X)$ , on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^{|\alpha|} h}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \dots \partial \xi_d^{\alpha_d}} v_{\varphi,f}(d\xi) = \int_X h(g(x)) a(x)^k R_{k,\alpha}(f)(x) du(x).$$

Démonstration. Une fois de plus elle procède par récurrence sur  $n = |\alpha|$ , la propriété pour  $n = 0$  résultant de la définition de  $v_{\varphi,f}$ .

Supposons la propriété établie au rang  $n$  ; on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \int_X h(g(x))a(x)^k R_{k,\alpha}(f)(x) d\mu(x) &= \int_X h(g(x))a(x)^k (-k+1)R_{k+2,\alpha}(f)(x) (\nabla a(x)|Z_j(x)) \dots \\ &- a(x) \delta(R_{k+2,\alpha}(f)Z_j)(x) d\mu(x) = - \int_X (h \circ g)(x) a(x)^{k+1} \delta(R_{k+2,\alpha}(f)Z_j)(x) d\mu(x) \dots \\ &- (k+1) \int_X h(g(x))R_{k+2,\alpha}(f)(x) a(x)^k (\nabla a(x)|Z_j(x)) d\mu(x) \\ &= \int_X R_{k+2,\alpha}(f)(x) (\nabla [(h \circ g)a^{k+1}](x)|Z_j(x)) d\mu(x) \dots \\ &- (k+1) \int_X h(g(x))R_{k+2,\alpha}(f)(x) (\nabla a(x)|Z_j(x)) a(x)^k d\mu(x) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la définition de la divergence  $\delta$ .

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \int_X h(g(x))a(x)^k R_{k,\alpha}(f)(x) d\mu(x) &= \int_X R_{k+2,\alpha}(f)(x) a(x)^{k+1} (\nabla(h \circ g)(x)|Z_j(x)) d\mu(x) \\ &+ (k+1) \int_X R_{k+2,\alpha}(f)(x) a(x)^k (h \circ g)(x) (\nabla a(x)|Z_j(x)) d\mu(x) \\ &- (k+1) \int_X h(g(x))R_{k+2,\alpha}(f)(x) (\nabla a(x)|Z_j(x)) a(x)^k d\mu(x) \\ &= \int_X R_{k+2,\alpha}(f)(x) a(x)^{k+1} (\nabla(h \circ g)(x)|Z_j(x)) d\mu(x) . \end{aligned}$$

Le Lemme 2.2 permet d'égaliser cette expression à :

$$\int_X \frac{\partial h}{\partial \xi_j} (g(x)) a(x)^{k+2} R_{k+2,\alpha}(f)(x) d\mu(x) .$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à la fonction  $\frac{\partial h}{\partial \xi_j}$  nous donne donc :

$$\begin{aligned} \int_X h(g(x))a(x)^k R_{k,\alpha}(f)(x) d\mu(x) &= \int \frac{\partial^{|\alpha'|} h}{\partial \xi_1^{\alpha'_1} \dots \partial \xi_d^{\alpha'_d}} \left( \frac{\partial h}{\partial \xi_j} \right) v_{\varphi,f}(d\xi) \\ &= \int \frac{\partial^{|\alpha|} h}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \dots \partial \xi_d^{\alpha_d}} (\xi) v_{\varphi,f}(d\xi) , \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$



Fin de la démonstration du Théorème A. Appliquons le Lemme 2.5 pour  $k = 0$ ; on obtient :

$$\left| \int \frac{\partial^{|\alpha|} h}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_d} (\xi) \nu_{\varphi, f}(d\xi) \right| = \left| \int_X h(g(x)) R_{0, \alpha}(f)(x) \, du(x) \right|$$

$$\leq \|h\|_{C_b(\mathbb{R}^d)} \int_X |R_{0, \alpha}(f)(x)| \, du(x) = \|h\|_{C_b(\mathbb{R}^d)} \|R_{0, \alpha}(f)\|_{L^1(X)} \leq R(\alpha) \|f\|_{\mathbb{W}^{2, |\alpha|}(X)} \|h\|_{C_b(\mathbb{R}^d)}$$

en vertu du Lemme 2.4 ; il suffit alors d'appliquer le Lemme 1.1 pour conclure.  $\square$

§ 3. CONSTRUCTION DE MESURES.

Soit  $\varphi$  satisfaisant les hypothèses du Théorème 2.1 ; on posera  $k_\varphi = k_{\varphi, 1}$  et  $O_\varphi = \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid k_\varphi(\xi) > 0\}$  : il s'agit d'un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ .

THÉORÈME 3.1 : Pour tout  $\xi \in O_\varphi$  il existe une mesure borélienne de probabilité  $\sigma^{\xi, \varphi}$  sur  $X$  telle que :  $k_{\varphi, f}(\xi) = k_\varphi(\xi) \int_X f^*(x) \sigma^{\xi, \varphi}(dx)$  pour toute  $f \in \mathbb{W}^\infty(X)$  et toute redéfinition  $f^*$  de  $f$  ;  $\sigma^{\xi, \varphi}$  ne charge aucun ensemble  $C_{2, d+1}$ -négligeable (en particulier, aucun ensemble mince).

Démonstration. Considérons la forme linéaire

$$\mathbb{W}^{2, \infty}(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lambda_{\varphi, \xi} : f \mapsto \frac{k_{\varphi, f}(\xi)}{k_\varphi(\xi)}.$$

Il résulte du Théorème 2.1 que  $|\lambda_{\varphi, \xi}(f)| \leq \frac{C(\varphi)}{k_\varphi(\xi)} \|f\|_{\mathbb{W}^{2, d+1}(X)}$  pour toute  $f \in \mathbb{W}^\infty(X)$  ; par densité, on peut donc prolonger  $\lambda_{\varphi, \xi}$  en une forme linéaire continue sur  $\mathbb{W}^{2, d+1}(X) : \tilde{\lambda}_{\varphi, \xi}$ .

Soit  $f \geq 0, f \in \mathbb{W}^{2, d+1}(X)$  ; on peut trouver une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{W}^{2, \infty}(X)$  telle que :

(i)  $f_n \geq 0$  et (ii)  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$  dans  $\mathbb{W}^{2, d+1}(X)$

(cela résulte par exemple de [3], Proposition 3.4) .

On a donc  $\tilde{\lambda}_{\varphi, \xi}(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\lambda}_{\varphi, \xi}(f_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{\varphi, \xi}(f_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_{\varphi, f_n}(\xi)}{k_\varphi(\xi)} \geq 0$  .

$\tilde{\lambda}_{\varphi, \xi}$  est donc une forme linéaire continue et positive sur  $\mathbb{W}^{2, d+1}(X)$  ; les résultats

des pages 422 et 423 de [3] entraînent l'existence d'une mesure borélienne  $\sigma^{\xi, \varphi}$  sur  $X$ , ne chargeant pas les ensembles  $C_{2, d+1}$ -négligeables, et telle que  $\tilde{\lambda}_{\varphi, \xi}(f) = \int_X \tilde{f}(x) \sigma^{\xi, \varphi}(dx)$  pour toute  $f \in \mathbb{D}^{2, d+1}(X)$  et toute modification quasi-continue  $\tilde{f}$  de  $f$ . Mais, pour  $f \in \mathbb{D}^{\infty}(X)$ , toute redéfinition  $f^*$  de  $f$  est une modification quasi-continue de  $f$ , d'où

$$\int_X f^*(x) \sigma^{\xi, \varphi}(dx) = \tilde{\lambda}_{\varphi, \xi}(f) = \lambda_{\varphi, \xi}(f) = \frac{k_{\varphi, f}(\xi)}{k_{\varphi}(\xi)}, \text{ soit :}$$

$$k_{\varphi, f}(\xi) = k_{\varphi}(\xi) \int_X f^*(x) \sigma^{\xi, \varphi}(dx). \quad (*)$$

Il suffit alors de montrer que  $\sigma^{\xi, \varphi}$  est de masse totale 1 ; pour cela, on prend  $f = f^* = 1$  dans  $(*)$ .  $\square$

Nous allons appliquer le théorème 3.1 dans deux cas particuliers :

Cas 1 :  $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{a(x)}}$ . Alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{\varphi}{a^k} = f_k(a)$ , où  $f_k(x) = \frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x}}$  ( $x \geq 0$ ). Le théorème de calcul symbolique ([5], p. 372) entraîne alors  $\frac{\varphi}{a^k} \in \mathbb{D}^{\infty}(X)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Les hypothèses du Théorème 3.1 sont donc satisfaites ; nous poserons dorénavant

$$\Omega = O_{\varphi} \text{ et } \sigma^{\xi, \varphi} = \sigma^{\xi} \text{ pour tout } \xi \in \Omega. \text{ On notera } k_{\varphi} \text{ la densité } k_{\varphi}.$$

Cas 2 : Fixons  $\psi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ , croissante, et telle que  $\psi(t) = 0$  pour  $t \leq 1$  et

$$\psi(t) = 1 \text{ pour } t \geq 2 \text{ et posons } \varphi_n(x) = \psi(n a(x)) \ (x \in X, n \in \mathbb{N}^*).$$

Il est clair que les  $\varphi_n$  vérifient les conditions du Théorème 3.1 ; on a donc une suite de mesures  $\sigma^{\xi, n} = \sigma^{\xi, \varphi_n}$ , chacune étant définie pour  $\xi \in O_n = O_{\varphi_n}$ . On posera  $O = \bigcup_{n \geq 1} O_n$  et on notera  $k_n(\xi) = k_{\varphi_n}(\xi)$ .

§ 4. CONSTRUCTION D'UNE VERSION S.C.I. DE LA DENSITÉ DE  $\nu$ .

LEMME 4.1 : Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,  $k_n(\xi) \leq k_{n+1}(\xi)$ .

Démonstration. Soit  $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ ,  $u \geq 0$ ; on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)(k_n(\xi) - k_{n+1}(\xi))d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)k_n(\xi)d\xi - \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)k_{n+1}(\xi)d\xi \\ &= \int_X u(g(x))\varphi_n(x)d\mu(x) - \int_X u(g(x))\varphi_{n+1}(x)d\mu(x) \\ &= \int_X u(g(x))(\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x))d\mu(x) = \int_X u(g(x))(\psi(na(x)) - \psi((n+1)a(x)))d\mu(x) \leq 0 \end{aligned}$$

(on a utilisé la définition des  $k_n$  et le caractère croissant de  $\psi$ ). Cela vaut pour toute  $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ ,  $u \geq 0$ ; mais  $k_n$  et  $k_{n+1}$  sont des fonctions continues (car  $\mathcal{C}^\infty$ ), d'où le résultat.  $\square$

LEMME 4.2 : Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $O_n \subset O_{n+1}$ .

Démonstration. Par définition,  $O_n = \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid k_n(\xi) > 0\}$ ; il suffit alors d'appliquer le Lemme 4.1.  $\square$

Posons  $k(\xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} k_n(\xi)$ ; en tant que limite croissante d'une suite de fonctions continues,  $k : \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$  est une fonction semi-continue inférieurement.

THÉORÈME 4.3 :  $\nu(d\xi) = k(\xi)d\xi$ .

Démonstration. Soit  $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ ,  $u \geq 0$ ; alors :

$\int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)\nu(d\xi) = \int_X u(g(x))d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X u(g(x))\varphi_n(x)d\mu(x)$  en vertu de la définition de  $\nu$  et du théorème de convergence dominée (  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = 1$  p.s. en  $x$  car tel sera le cas dès que  $a(x)$  sera non nul; or  $\{x \in X \mid a^*(x) \neq 0\}$  est mince, donc  $\mu$ -négligeable et  $a = a^*$  p.s. ). On a donc  $\int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)\nu(d\xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X u(g(x))\varphi_n(x)d\mu(x)$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)k_n(\xi)d\xi$ ; mais  $u(\xi)k_n(\xi)$  tend en croissant vers  $u(\xi)k(\xi)$ , d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)k_n(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)k(\xi)d\xi, \text{ soit } \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)\nu(d\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)k(\xi)d\xi.$$

Cela vaut pour toute  $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$  positive, donc pour toute  $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$  en vertu de la décomposition  $u = \frac{|u| + u}{2} - \frac{|u| - u}{2}$ . On a donc  $\nu(d\xi) = k(\xi)d\xi$ .  $\square$

Remarque. L'alinéa (i) du Théorème A est ainsi établi.

(ii) résulte de ce que  $\int_{\mathbb{R}} k(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} \nu(d\xi) = \nu(\mathbb{R}) = \mu(g^{-1}(\mathbb{R})) = \mu(X) = 1$  donc  $k(\xi)$  est fini  $d\xi$ -p.s.

§ 5. PROPRIÉTÉS DE  $k$  .

Il est clair que  $k(\xi) \neq 0$  si et seulement si  $k_n(\xi) \neq 0$  pour au moins un  $n$  .

On a donc  $\{\xi \in \mathbb{R}^d \mid k(\xi) \neq 0\} = \bigcup_{n \geq 1} O_n = O$  .

LEMME 5.1 :  $\nu(\mathbb{R}^d \setminus O) = 0$  .

Démonstration. Soit  $F_n = \{x \in X \mid a^*(x) \leq \frac{1}{n}\}$  ; les  $(F_n)_{n \geq 1}$  forment une suite décroissante de parties mesurables de  $X$  , et on a  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} F_n = \{x \in X \mid a^*(x) = 0\}$  ,

donc  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$  est mince , à fortiori de mesure nulle .

On peut écrire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(F_n) = \mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} F_n) = 0$  .

Soit  $x \in X \setminus F_n$  ; on a  $a^*(x) > \frac{1}{n}$  , d'où  $2n a^*(x) > 2$  et

$\varphi_{2n}^*(x) = \psi(2n a^*(x)) > 1$  . On peut donc écrire :

$\nu(\mathbb{R}^d \setminus O) = \mu(g^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus O)) = \mu(g^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus O) \cap F_n) + \mu(g^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus O) \cap (X \setminus F_n))$

$\leq \mu(F_n) + \int_{g^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus O) \cap (X \setminus F_n)} \varphi_{2n}(x) d\mu(x) \leq \mu(F_n) + \int_{g^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus O)} \varphi_{2n}(x) d\mu(x)$

$\leq \mu(F_n) + \int_{g^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus O)} \varphi_{2n}(x) d\mu(x) = \mu(F_n) + \int_{\mathbb{R}^d \setminus O} k_{2n}(\xi) d\xi = \mu(F_n)$  car  $k_{2n}$

est nulle sur  $\mathbb{R}^d \setminus O \subset \mathbb{R}^d \setminus O_{2n}$  .

On a donc  $\nu(\mathbb{R}^d \setminus O) \leq \mu(F_n)$  pour tout  $n \geq 1$  ; le résultat s'ensuit.  $\square$

LEMME 5.2 : Soit  $K$  un compact contenu dans  $O$  ; alors il existe  $\delta > 0$  tel que  $k(\xi) > \delta$  pour tout  $\xi \in K$  .

Démonstration. Soit  $\alpha > 0$  ; alors  $\{\xi \mid k(\xi) > \alpha\} = \bigcup_{n \geq 1} \{\xi \mid k_n(\xi) > \alpha\}$  est un ouvert (cette propriété n'est autre que la semi-continuité inférieure de  $k$ ) .

Par hypothèse,  $K$  est contenu dans  $O = \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid k(\xi) > 0\} = \bigcup \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid k(\xi) > \frac{1}{n}\}$  ;

par compacité on peut trouver  $m$  tel que  $K \subset \bigcup_{n=1}^m \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid k(\xi) > \frac{1}{n}\}$  d'où

$k(\xi) > \frac{1}{m}$  pour tout  $\xi \in K$  .  $\square$

La clause (iii) du Théorème A résulte des Lemmes 5.1 et 5.2.

§ 6. DIVERSES PROPRIÉTÉS DE  $\Omega$  ET DE  $\text{supp}(v)$  .

LEMME 6.1 :  $\text{supp}(v) = \bar{O}$  .

Démonstration. Soit  $A$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$   $v$ -négligeable, et soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé ;

on peut écrire :

$$0 \leq \int_A k_n(\xi) d\xi \leq \int_A k(\xi) d\xi = v(A) = 0 ,$$
d'où  $\int_A k_n(\xi) d\xi = 0$  . Mais  $A$  est ouvert et  $k_n$  continue positive, d'où  $k_n(\xi) = 0$  pour tout  $\xi \in A$  (et pas seulement pour presque tout  $\xi \in A$  ! ) . Cela est vrai pour tout  $n$  , donc  $k(\xi) = 0$  pour tout  $\xi \in A$  .

Réciproquement, un ouvert sur lequel  $k$  est nulle en tout point est évidemment  $v$ -négligeable ; le plus grand ouvert  $v$ -négligeable est donc

$$\{\xi | k(\xi) = 0\} = (\mathbb{R}^d \setminus O) = \mathbb{R}^d \setminus \bar{O} , \text{ c'est-à-dire que } \text{supp}(v) = \bar{O} . \square$$

LEMME 6.2 :  $k(\xi) \geq l(\xi)$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$  .

Démonstration. On peut supposer  $l(\xi) > 0$  , i.e.  $\xi \in \Omega$  .  $k_n(\xi)$  est l'unique densité  $\mathcal{C}^\infty$  de  $g_*(\varphi_n \mu)$  , i.e. de  $g_*(\varphi_n e^{\frac{1}{a}} \cdot e^{-\frac{1}{a}} \mu)$  . Mais  $\varphi_n \cdot e^{\frac{1}{a}} \in \mathcal{D}^\infty(X)$  par calcul symbolique, d'où  $k_n(\xi) = l(\xi) \int_X \varphi_n^*(x) e^{\frac{1}{a^*(x)}} \sigma^\xi(dx)$  .

On en tire  $k_n(\xi) \geq l(\xi) \int_X \varphi_n^*(x) \sigma^\xi(dx) = l(\xi) \int_X \psi(n a^*(x)) \sigma^\xi(dx) (*)$  . Comme ci-dessus on voit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi(n a^*(x)) = 1$  pour tout  $x$  n'appartenant pas à l'ensemble mince (donc  $\sigma^\xi$ -négligeable)  $\{y | a^*(y) = 0\}$  ; en outre  $0 \leq \psi(n a^*(x)) \leq 1$  pour tout  $n$  et tout  $x$  . Le théorème de convergence dominée donne alors

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \psi(n a^*(x)) \sigma^\xi(dx) = \int_X \sigma^\xi(dx) = 1$  ; en passant à la limite dans (\*) on obtient  $k(\xi) \geq l(\xi)$  .  $\square$

Remarque. Pour la première fois nous avons utilisé l'hypothèse  $a^* \neq 0$  q.s. et pas seulement l'hypothèse plus faible  $a \neq 0$  p.s.

LEMME 6.3 :  $\Omega \subset O$  .

Démonstration. Cela résulte du Lemme 6.2, de la définition de  $\Omega (= \{\xi \in \mathbb{R}^d | l(\xi) > 0\})$  et de celle de  $O (= \{\xi \in \mathbb{R}^d | k(\xi) > 0\})$  .  $\square$

LEMME 6.4 :  $v(\mathbb{R}^d \setminus \Omega) = 0$ .

Démonstration. On a :

$$\int_X \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega} (g(x)) e^{-\frac{1}{a(x)}} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega} (\xi) l(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega} l(\xi) d\xi = 0 ;$$

on en déduit  $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega} (g(x)) e^{-\frac{1}{a(x)}} = 0$   $\mu$ -p.s. en  $x$ , soit  $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega} (g(x)) = 0$   $\mu$ -p.s., i.e.  $v(\mathbb{R}^d \setminus \Omega) = 0$ .  $\square$

COROLLAIRE 6.5 :  $\text{Supp}(v) = \bar{\Omega} = \bar{O}$ .

Démonstration.  $v(\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}) = 0$  d'après le Lemme 6.4 ;  $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$  est donc un ouvert  $v$ -négligeable et  $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(v)$ , soit  $\text{Supp}(v) \subset \bar{\Omega}$ .

Mais  $\text{Supp}(v) = \bar{O}$  (Lemme 5.2) et  $\bar{\Omega} \subset \bar{O}$  (Lemme 6.3), d'où le résultat : l'alinéa (iv) du Théorème est démontré.  $\square$

Il nous est maintenant possible d'éliminer l'ouvert  $\Omega$ .

LEMME 6.6 :  $\Omega = O$ .

Démonstration. D'après le Lemme 6.3,  $\Omega \subset O$  ; il suffit donc d'établir que  $O \subset \Omega$ .

Soit  $m \geq 1$  ; dès que  $\varphi_m^*(x) \neq 0$  on a  $a^*(x) > \frac{1}{m}$ , d'où  $e^{\frac{1}{a^*(x)}} \leq e^m$  et  $e^{\frac{1}{a^*(x)}} \varphi_m^*(x) \leq e^m \varphi_m^*(x) \leq e^m$ .

On a donc  $e^{\frac{1}{a^*(x)}} \varphi_m^*(x) \leq e^m$  pour tout  $x \in X$ . Il en résulte, pour tout  $\xi \in \Omega$  :

$$k_m(\xi) = l(\xi) \int_X e^{\frac{1}{a^*(x)}} \varphi_m^*(x) d\mu(x) \leq l(\xi) \int_X e^m d\mu(x) = e^m l(\xi),$$

soit  $k_m(\xi) \leq e^m l(\xi)$ . Par continuité cette inégalité reste vraie pour tout  $\xi \in \bar{\Omega}$ .

Soit maintenant  $\xi_0 \in O$  ; on a  $\xi_0 \in \bar{O} = \bar{\Omega}$ , d'où  $k_m(\xi_0) \leq e^m l(\xi_0)$  pour tout  $m$ . Mais  $k(\xi_0) \neq 0$ , donc  $k_m(\xi_0) \neq 0$  pour un certain  $m$  et  $l(\xi_0) \neq 0$ , i.e.  $\xi_0 \in \Omega$ .  $\square$

§ 7. CONSTRUCTION DE  $\hat{\sigma}$  ET FORMULE DE DÉSINTÉGRATION.

Posons, pour tout  $\xi \in \Omega$  :

$\hat{\sigma}(\xi)(dx) = \ell(\xi) \exp\left(\frac{1}{a^*(x)}\right) \sigma^\xi(dx)$ . Cette mesure est bien définie et ne charge aucun ensemble mince car tel est le cas de  $\sigma^\xi$  et car  $\{x \in X \mid a^*(x) = 0\}$  est mince. Nous allons établir la formule de désintégration et l'égalité  $\hat{\sigma}(\xi)(X) = k(\xi)$ .

**THÉORÈME 7.1 :** Soient  $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ ,  $v \in \mathbb{W}^\infty(X)$ . Alors

$$\int_X u(g(x))v(x)d\mu(x) = \int_\Omega u(\xi) \left( \int_X v^*(x)\hat{\sigma}(\xi)(dx) \right) d\xi.$$

Démonstration.  $|u(g(x))v(x)\varphi_n(x)| \leq \|u\|_\infty |v(x)|$  ; d'après le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\int_X u(g(x))v(x)d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X u(g(x))v(x)\varphi_n(x)d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)k_{\varphi_n, v}(\xi)d\xi.$$

Observons alors que  $k_{\varphi_n, v}(\xi)d\xi = g_{\varphi_n}(\varphi_n \nu_\mu)$  est absolument continue par rapport à  $g_{\varphi_n} \mu = \nu$ , et donc ne charge pas  $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$  en vertu du Lemme 5.1. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)k_{\varphi_n, v}(\xi)d\xi &= \int_\Omega u(\xi)k_{\varphi_n, v}(\xi)d\xi = \int_\Omega u(\xi)\ell(\xi) \left( \int_X \varphi_n^*(x)v^*(x)\exp\left(\frac{1}{a^*(x)}\right)\sigma^\xi(dx) \right) d\xi \\ &= \int_\Omega u(\xi) \left( \int_X v^*(x)\varphi_n^*(x)\hat{\sigma}(\xi)(dx) \right) d\xi. \end{aligned}$$

Si  $u$  et  $v$  sont  $\geq 0$  p.s., on a  $v^* \geq 0$  q.s. (cf. [2], Lemme 3.2) soit  $v^* \geq 0$   $\hat{\sigma}(\xi)$  - p.s. et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X v^*(x)\varphi_n^*(x)\hat{\sigma}(\xi)(dx) = \int_X v^*(x)\hat{\sigma}(\xi)(dx)$ , d'où le résultat par convergence croissante. On se ramène à ce cas en écrivant  $u = \frac{|u| + u}{2} - \frac{|u| - u}{2}$  et  $v = v_1 - v_2$  avec  $v_i \in \mathbb{W}^\infty$ ,  $v_i \geq 0$  (cela est possible d'après [9]).  $\square$

Il nous reste à établir le

**COROLLAIRE 7.2 :** Pour tout  $\xi \in \Omega$ ,  $\hat{\sigma}(\xi)(X) = k(\xi)$ .

Démonstration.

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(\xi)(X) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \varphi_n^*(x)\hat{\sigma}(\xi)(dx) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell(\xi) \int_X \varphi_n^*(x) \exp\left(\frac{1}{a^*(x)}\right)\sigma^\xi(dx) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} k_n(\xi) = k(\xi). \quad \square \end{aligned}$$

§ 8. ÉLIMINATION DE  $\psi$  :

Les objets  $(k, 0, \hat{\sigma})$  que nous venons de construire dépendent a priori du choix d'une fonction de troncature  $\psi$  effectué au § 3 ; en fait nous allons faire voir que ce choix est indifférent. Soient  $\psi_1, \psi_2$  deux fonctions satisfaisant les conditions posées, et soient  $O_1, k_1, \hat{\sigma}_1, k_{n,1}$  et  $O_2, k_2, \hat{\sigma}_2, k_{n,2}$  associés respectivement à ces deux fonctions  $\psi_1, \psi_2$  par notre construction.

LEMME 8.1 : Pour tout entier  $n$ ,  $k_{n,1}(\xi) \leq k_{2n,2}(\xi)$ .

Démonstration. Supposons  $\psi_1(n a(x)) \neq 0$  ; on a  $n a(x) \geq 1$ , d'où  $2n a(x) \geq 2$  et  $\psi_2(2n a(x)) = 1$ .

On en déduit  $\psi_2(2n a(x)) \geq \psi_1(n a(x))$  pour tout  $x \in X$ , d'où

$$\psi_2(2n a(x)) d\mu(x) \geq \psi_1(n a(x)) d\mu(x) \text{ et } g_*(\psi_2(2n a(x)) d\mu(x)) \geq g_*(\psi_1(n a(x)) d\mu(x)).$$

Cela entraîne l'inégalité  $k_{2n,2}(\xi) \geq k_{n,1}(\xi)$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , en vertu de la continuité de  $k_{1,n}$  et  $k_{2,n}$ .  $\square$

LEMME 8.2 :  $k_1 = k_2$ .

Démonstration. En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans le Lemme 8.1, on obtient

$k_1(\xi) \leq k_2(\xi)$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , l'argument étant symétrique, on a aussi  $k_2(\xi) \leq k_1(\xi)$ , d'où le résultat.  $\square$

LEMME 8.3 :  $O_1 = O_2$ .

Démonstration. Il suffit de tenir compte du Lemme 8.2 en se rappelant que

$$O_1 = \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid k_1(\xi) > 0\} \text{ et } O_2 = \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid k_2(\xi) > 0\} . \square$$

L'unicité de  $\hat{\sigma}$  requiert un argument moins élémentaire.

LEMME 8.4 :  $\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_2$ .

Démonstration.  $l$  est définie de façon unique : c'est la densité continue de

$g_*(e^{-\frac{1}{a}} \mu)$  ; il suffit donc de montrer que  $\sigma_1 = \sigma_2$  ( $\sigma_i$  désigne la mesure notée



$\sigma$  au paragraphe 3, construite au moyen de la fonction de troncature  $\psi_1$ ). Par définition, pour toute  $f \in \mathbb{W}^{2,\infty}(X;\mathbb{R})$  et toute modification quasi-continue  $\tilde{f}$  de  $f$ , on a :

$$\int_X \tilde{f}(x) \sigma_1^\xi(dx) = \frac{k^{-\frac{1}{a}} f(\xi)}{\xi(\xi)} = \int_X \tilde{f}(x) \sigma_2^\xi(dx) \quad \text{pour tout}$$

$\xi \in O_1 = O_2$  (on s'est servi de l'unicité de la densité  $\mathcal{C}^\infty$  de  $g_*(e^{-\frac{1}{a}} f \mu)$ ). Mais  $\mathbb{W}^{2,\infty}(X;\mathbb{R})$  est dense dans  $\mathbb{W}^{2,d+1}(X;\mathbb{R})$ , d'où l'égalité

$$\int_X \tilde{f}(x) \sigma_1^\xi(dx) = \int_X \tilde{f}(x) \sigma_2^\xi(dx) \quad \text{pour toute } f \in \mathbb{W}^{2,d+1}(X;\mathbb{R}).$$

Le théorème principal de KAZUMI et SHIGEKAWA ([3]) affirme l'unicité de la mesure associée à une forme linéaire positive sur  $\mathbb{W}^{2,d+1}(X)$ , et permet donc de conclure que  $\sigma_1^\xi = \sigma_2^\xi$ .  $\square$

§ 9. UN CONTRE-EXEMPLE.

Suivant une suggestion de P.MALLIAVIN, nous allons donner dans ce paragraphe un exemple de fonction  $g \in \mathbb{W}^\infty(X;\mathbb{R})$  vérifiant les hypothèses du Théorème A et telle que  $k$  prenne la valeur  $+\infty$ . Il s'agit en réalité d'une application d'un espace  $\mathbb{R}^2$  gaussien dans  $\mathbb{R}$ , ce qui nous montre qu'il ne s'agit pas d'un phénomène spécifique à la dimension infinie. Nous conservons les notations générales de l'article ; soit  $(e_1, \dots, e_n, \dots)$  une base orthonormée de  $H$  contenue dans  $X^*$  ; nous définirons  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  par  $g(x) = (\langle e_1, x \rangle + \langle e_2, x \rangle) e^{-\langle e_2, x \rangle^2}$ . Par calcul symbolique, il est clair que  $g \in \mathbb{W}^\infty(X;\mathbb{R})$ . De plus on a

$$\nabla g(x) = e^{-\langle e_2, x \rangle^2} (e_1 + e_2) + (\langle e_1, x \rangle + \langle e_2, x \rangle) (-2\langle e_2, x \rangle e^{-\langle e_2, x \rangle^2}) e_2,$$

d'où :

$$a(x) = (\nabla g(x) | \nabla g(x)) = e^{-2\langle e_2, x \rangle^2} + e^{-2\langle e_2, x \rangle^2} (1 - 2\langle e_2, x \rangle \langle e_1 + e_2, x \rangle)^2 \geq e^{-2\langle e_2, x \rangle^2} > 0;$$

les conditions du Théorème sont bien remplies, d'où la définition de  $\hat{\sigma}$  et de  $k$ .

Posons  $\lambda_n(u, v) = \varphi_n(ue_1 + ve_2)$  ; il est clair que  $0 \leq \lambda_n \leq 1$  et que  $\lambda_n$  tend vers 1 en croissant.

LEMME 9.1 : Pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^*$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$k_n(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n(e^{\beta^2} \cdot \xi - \beta, \beta) e^{\xi\beta} e^{\beta} - \frac{1}{2} \xi^2 e^{2\beta^2} d\beta .$$

Démonstration. Nous utiliserons le fait bien connu suivant : l'application de  $X$  dans  $\mathbb{R}^2$   $x \mapsto \langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle$  transforme  $\mu$  en la mesure gaussienne canonique sur  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$  ; on a :

$$\int_{\mathbb{R}} u(\xi) k_n(\xi) d\xi = \int_X u(g(x)) \varphi_n(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^2} u((\alpha+\beta)e^{-\beta^2}) \lambda_n(\alpha, \beta) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\beta^2}{2}} d\alpha d\beta .$$

Posons  $\gamma = (\alpha+\beta)e^{-\beta^2}$  ; cette intégrale devient :

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(\gamma) \lambda_n(e^{\beta^2} \cdot \gamma - \beta, \beta) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\beta^2}{2}} e^{\beta^2} d\gamma d\beta$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} u(\gamma) \lambda_n(e^{\beta^2} \gamma - \beta, \beta) \frac{1}{2\pi} e^{\frac{1}{2}(\beta^2 - (e^{\beta^2} \cdot \gamma - \beta)^2)} d\gamma d\beta$$

$$= \int_{\mathbb{R}} u(\gamma) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \lambda_n(e^{\beta^2} \gamma - \beta, \beta) e^{\frac{1}{2} \gamma e^{\beta^2} (2\beta - e^{\beta^2} \cdot \gamma)} d\beta \right) d\gamma$$

$$\text{Soit } \theta_n(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \lambda_n(e^{\beta^2} \gamma - \beta, \beta) e^{\frac{1}{2} \gamma e^{\beta^2} (2\beta - \gamma e^{\beta^2})} d\beta ;$$

on a donc  $k_n(\gamma) = \theta_n(\gamma)$  p.s. en  $\gamma$ .

De plus  $\lambda_n(e^{\beta^2} \gamma - \beta, \beta) = \psi(n e^{-2\beta^2} (1 + (1-2\beta e^{\beta^2} \gamma)^2))$  d'où

$$|\lambda_n(e^{\beta^2} \cdot \gamma - \beta, \beta)| \leq 1 . \text{ Soit } \epsilon > 0 ; \text{ pour } A \geq |\gamma| \geq \epsilon , \text{ on a}$$

$$\frac{1}{2} \gamma e^{\beta^2} (2\beta - \gamma e^{\beta^2}) = \gamma \beta e^{\beta^2} - \frac{1}{2} \gamma^2 e^{2\beta^2} \leq A \beta e^{\beta^2} - \frac{1}{2} \epsilon^2 e^{2\beta^2}$$

lequel équivaut, pour  $|\beta|$  tendant vers  $+\infty$ , à  $-\frac{1}{2} \epsilon^2 e^{2\beta^2}$  ; l'intégrale qui définit

$\theta_n$  converge donc normalement sur  $[-A, -\epsilon] \cup [\epsilon, A]$  pour tous  $A \geq \epsilon > 0$ , donc  $\theta_n$  définit une fonction continue sur  $\mathbb{R}^*$ . Il en résulte que  $k_n = \theta_n$  sur  $\mathbb{R}^*$ . □

LEMME 9.2 : Pour tout  $n \geq 2$ ,  $k_n(0) \geq \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \log\left(\frac{n}{2}\right)}$ .

Démonstration. Soit  $|\beta| \leq \sqrt{\frac{1}{2} \log\left(\frac{n}{2}\right)}$  ; on a  $e^{-2\beta^2} \geq \frac{2}{n}$ , d'où  $a(\alpha e_1 + \beta e_2) \geq \frac{2}{n}$

pour tout  $\alpha$  et  $\lambda_n(\alpha, \beta) = \psi(n a(\alpha e_1 + \beta e_2)) = 1$  pour tout  $\alpha$ .

Pour tout  $\gamma \neq 0$  on peut écrire

$$\begin{aligned} k_n(\gamma) &= \theta_n(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n(e^{\beta^2} \gamma - \beta, \beta) e^{\frac{1}{2} \gamma e^{\beta^2} (2\beta - \gamma e^{\beta^2})} d\beta \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\sqrt{\frac{1}{2} \log(\frac{n}{2})}}^{\sqrt{\frac{1}{2} \log(\frac{n}{2})}} \lambda_n(e^{\beta^2} \gamma - \beta, \beta) e^{\frac{1}{2} \gamma e^{\beta^2} (2\beta - \gamma e^{\beta^2})} d\beta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\sqrt{\frac{1}{2} \log(\frac{n}{2})}}^{\sqrt{\frac{1}{2} \log(\frac{n}{2})}} e^{\frac{1}{2} \gamma e^{\beta^2} (2\beta - \gamma e^{\beta^2})} d\beta \end{aligned}$$

soit :

$$(\forall \gamma \neq 0) \quad k_n(\gamma) > \frac{1}{-2\pi} \int_{-\sqrt{\frac{1}{2} \log(\frac{n}{2})}}^{\sqrt{\frac{1}{2} \log(\frac{n}{2})}} e^{\frac{1}{2} \gamma e^{\beta^2} (2\beta - \gamma e^{\beta^2})} d\beta .$$

Faisant tendre  $\gamma$  vers 0, on peut conclure.  $\square$

Il est maintenant évident que  $k(0) = +\infty : k(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} k_n(0)$  par définition, et on applique le Lemme 9.2.

#### § 10. SEMI-CONTINUITÉ

On a vu au § 4 que  $\xi \rightarrow \hat{\sigma}(\xi)(X) = k(\xi)$  était une fonction semi-continue sur 0; de façon plus précise, on a le

**THÉORÈME 10.1 :** Soit  $v \in \mathbb{D}^\infty(X; \mathbb{R})$ ,  $v \geq 0$ , et soit  $v^*$  une redéfinition de  $v$ .

Alors  $\xi \rightarrow \int_X v^*(x) \hat{\sigma}(\xi)(dx)$  est une application semi-continue inférieurement de 0 dans  $\bar{\mathbb{R}}_+$ .

**Démonstration.** Par définition de  $\hat{\sigma}$ , on a :

$$\int_X v^*(x) \hat{\sigma}(\xi)(dx) = \ell(\xi) \int_X v^*(x) \exp\left(\frac{1}{a^*(x)}\right) \sigma^\xi(dx) .$$

Comme ci-dessus, le théorème de convergence croissante permet d'écrire :

$$\int_X v^*(x) \exp\left(\frac{1}{a^*(x)}\right) \sigma^\xi(dx) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X v^*(x) \exp\left(\frac{1}{a^*(x)}\right) \varphi_n^*(x) \sigma^\xi(dx)$$

(on utilise ici le Lemme 3.2 de [2], en vertu duquel  $v^* \geq 0$  quasi-sûrement, donc  $\sigma^\xi$ -presque sûrement).

On a donc :

$$\int_X v^*(x) \hat{\sigma}(\xi)(dx) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X v^*(x) \varphi_n^*(x) \exp\left(\frac{1}{a^*(x)}\right) \sigma^\xi(dx) = \lim_{n \rightarrow +\infty} k_{\varphi_n, v}(\xi)$$

d'après la définition même de  $\sigma$ . Mais les  $k_{\varphi_n, v}$  sont des fonctions continues (et même  $\mathcal{C}^\infty$ ), comme nous l'avons établi au Théorème 2.1, et on conclut de la même façon que plus haut. Cela établit la dernière assertion du Théorème.  $\square$

Le rapporteur de cet article a bien voulu attirer mon attention sur le travail de Feyel et de la Pradelle ([9']). Ces derniers construisent une "mesure d'aire" sur des espaces de Wiener lusiniens, qui généralise celle construite dans [1] sur l'espace de Wiener classique. La mesure en question est toujours de masse totale finie, et ne saurait donc pas coïncider avec  $\hat{\sigma}(\xi)$  dans le cas du contre-exemple du § 9 : nos résultats ne sont donc pas contenus dans ceux de [9'].

#### B I B L I O G R A P H I E

- [1] H.AIRAULT et P.MALLIAVIN. - Intégration géométrique sur l'espace de Wiener. Bulletin des Sciences Mathématiques 112, pp. 3-52, 1988.
- [2] H.AIRAULT et J. Van BIESEN. - Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck sur une sous-variété de l'espace de Wiener. Bulletin des Sciences Mathématiques 115, pp. 185-210, 1991.
- [3] T.KAZUMI et I.SHIGEKAWA. - Measures of finite  $(r,p)$ -energy and potentials on a separable metric space. Séminaire de Probabilités XXVI, Lecture Notes in Mathematics 1526, pp. 415-444.
- [4] P.KRÉE et M.KRÉE. - Continuité de la divergence dans les espaces de Sobolev relatifs à l'espace de Wiener. C.R. de l'Acad. Sc., t. 296, pp. 833-836, 1983.
- [5] P.MALLIAVIN. - Implicit functions in finite corank on the Wiener space. Proceedings of the Taniguchi Symposium on Stochastic Analysis, Katata, 1982 .
- [6] P.MALLIAVIN. - Stochastic analysis (ouvrage à paraître).
- [7] P.-A.MEYER. - Transformations de Riesz pour les lois gaussiennes. Séminaire de Probabilités XVIII , pp. 179-193 (1982/83), Lecture Notes in Mathematics 1059.
- [8] D.W.STROOCK. - The Malliavin Calculus and its applications to Second Order Parabolic Differential Equations: Part I. Mathematical Systems Theory 14, pp. 25-65, 1981.
- [9] H.SUGITA. - Positive generalized Wiener Functions and Potential Theory over abstract Wiener Spaces. Osaka Journal of Mathematics 25, pp. 665-696, 1988.
- [9'] D.FEYEL et A.de la PRADELLE. - Hausdorff measures on the Wiener space. Potential Analysis 1, pp. 177-189, 1992.