

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

FRANCIS HIRSCH

Représentation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n paramètres

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 302-303

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__302_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Représentation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n paramètres

Francis HIRSCH
Equipe d'Analyse et Probabilités
Université d'Evry Val d'Essonne
Boulevard des Coquibus
F-91025 EVRY CEDEX

Dans [2], S. Song introduit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n paramètres. Nous en donnons ici une description en termes du drap brownien.

Rappelons d'abord la construction de [2].

Soit E un espace de Fréchet séparable muni d'une mesure gaussienne centrée μ . Soit $E^{(n)}$ l'espace $C(\mathbf{R}_+^n; E)$ identifié à $C(\mathbf{R}_+; E^{(n-1)})$ en identifiant φ et $t_1 \rightarrow ((t_2, \dots, t_n) \rightarrow \varphi(t_1, t_2, \dots, t_n))$. On pose $m^{(0)} = \mu$, $E^{(0)} = E$, et on définit le processus d'Ornstein-Uhlenbeck $Z^{(n)}$ à valeurs dans $E^{(n-1)}$ de proche en proche pour $n \geq 1$ par:

$Z^{(1)}$ est le processus à valeurs dans $E^{(0)}$, admettant pour semi-groupe de transition $(T_t^{(0)})_{t \geq 0}$ défini par $T_t^{(0)} f(x) = \int f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) dm^{(0)}(y)$, et de loi initiale $m^{(0)}$.

Pour $n \geq 2$, on définit $m^{(n-1)}$ comme la loi de $Z^{(n-1)}$, et $Z^{(n)}$ est le processus à valeurs dans $E^{(n-1)}$ admettant pour semi-groupe de transition $(T_t^{(n-1)})_{t \geq 0}$ défini par $T_t^{(n-1)} f(x) = \int f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) dm^{(n-1)}(y)$, et de loi initiale $m^{(n-1)}$.

On suppose, pour fixer les idées, que E est l'espace de Wiener $C_0(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^d)$ des fonctions continues de \mathbf{R}_+ dans \mathbf{R}^d nulles en 0, μ est la mesure de Wiener, et on désigne par $W_{t_1, \dots, t_n, \tau}^{(n+1)}$ un drap brownien à $(n+1)$ indices à valeurs dans \mathbf{R}^d .

Proposition 1

$$Z_{t_1, \dots, t_n}^{(n)} = e^{-(t_1 + \dots + t_n)} W_{e^{2t_1}, \dots, e^{2t_n}, \tau}^{(n+1)}$$

(où τ désigne le paramètre de parcours des trajectoires dans l'espace de Wiener $C_0(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^d)$).

On fait la démonstration par récurrence.

On étudie d'abord le cas $n = 1$. Soit $\varphi \in E$,

$$Z_t^{(1), \varphi} = e^{-t}(\varphi(\tau) + W_{e^{2t}, -1, \tau}^{(2)}),$$

$\mathcal{F}_s^{(1)}$ la tribu sur E engendrée par $\{W_{e^{2t}-1, \tau}^{(2)}; t \leq s\}$.
Alors, si $t \geq s$ et f est borélienne bornée sur E ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(f(Z_t^{(1), \varphi}) | \mathcal{F}_s^{(1)}) &= \int f(e^{-t}(\varphi + W_{e^{2t}-1, \tau}^{(2)} + \sqrt{e^{2t} - e^{2s}}y))d\mu(y) \\ &= T_{t-s}^{(0)}f(Z_s^{(1), \varphi}). \end{aligned}$$

Donc $Z_t^{(1), \varphi}$ est le processus associé à $(T_t^{(0)})_{t \geq 0}$ et partant de φ . Par conséquent

$$Z_t^{(1)} = e^{-t}(W_\tau^{(1)} + W_{e^{2t}-1, \tau}^{(2)})$$

avec $W^{(1)}$ et $W^{(2)}$ indépendants, c'est à dire, $Z_t^{(1)} = e^{-t}W_{e^{2t}, \tau}^{(2)}$.

(Cette représentation de $Z^{(1)}$ est tout à fait classique (cf., par exemple, [1]).)

Supposons la propriété valable jusqu'à l'ordre $n-1$, $n \geq 2$. Si $\varphi \in E^{(n-1)}$, on pose

$$Z_t^{(n), \varphi} = e^{-t}(\varphi(t_2, \dots, t_n, \tau) + e^{-(t_2 + \dots + t_n)}W_{e^{2t}-1, e^{2t_2}, \dots, e^{2t_n}, \tau}^{(n+1)})$$

et $\mathcal{F}_s^{(n)}$ la tribu sur $E^{(n-1)}$ engendrée par $\{W_{e^{2t}-1, e^{2t_2}, \dots, e^{2t_n}, \tau}^{(n+1)}; t \leq s\}$.

Si $t \geq s$ et f borélienne bornée sur $E^{(n-1)}$,

$$\mathbf{E}(f(Z_t^{(n), \varphi}) | \mathcal{F}_s^{(n)}) = T_{t-s}^{(n-1)}f(Z_s^{(n), \varphi}).$$

Alors

$$Z_{t_1, \dots, t_n}^{(n)} = e^{-(t_1 + \dots + t_n)}(W_{e^{2t_2}, \dots, e^{2t_n}, \tau}^{(n)} + W_{e^{2t_1}-1, e^{2t_2}, \dots, e^{2t_n}, \tau}^{(n+1)})$$

avec $W^{(n)}$ et $W^{(n+1)}$ indépendants, d'où le résultat.

References

- [1] M. FUKUSHIMA Basic properties of Brownian motion and a capacity on the Wiener space, J. Math. Soc. Japan, 36-1 (1984), 161-175.
- [2] S. SONG Inégalités relatives aux processus d'Ornstein-Uhlenbeck à n paramètres et capacité gaussienne $c_{n,2}$, dans ce volume.