STÉPHANE ATTAL
MICHEL ÉMERY

Équations de structure pour des martingales vectorielles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 28 (1994), p. 256-278
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1994__28__256_0>

ÉQUATIONS DE STRUCTURE POUR DES MARTINGALES VECTORIELLES

S. Attal & M. Émery

Nous remercions G. Taviot pour ses remarques sur une version précédente.

Introduction

Le célèbre théorème de décomposition en chaos de Wiener fournit un isomorphisme entre l'espace de Fock de multiplicité d et $L^2(W)$, où W est l'espace de Wiener à d dimensions. Cette *interprétation brownienne* de l'espace de Fock est l'une des clés du calcul stochastique non commutatif. Il est bien connu que l'espace de Fock est aussi susceptible d'une *interprétation poissonnienne,* dans laquelle le mouvement brownien est remplacé par un système de d processus de Poisson compensés indépendants (voir Meyer [5] par exemple).

Dans [6], Meyer a remarqué que, plus généralement, toute martingale à d dimensions $X = (X^1, \ldots, X^d)$ *normale* (c'est-à-dire vérifiant $\langle X^i, X^j\rangle_t = \delta^{ij}t$) donne lieu à des intégrales itérées qui s'identifient aux éléments de l'espace de Fock, fournissant une injection isométrique canonique de l'espace de Fock dans $L^2(\Omega)$. Une question naturelle est celle de la propriété de représentation chaotique : pour quelles martingales normales cette injection est-elle surjective? Une condition nécessaire (et d'ailleurs déjà nécessaire pour avoir la propriété, plus faible, de représentation prévisible) est que les d^2 martingales $[X^i, X^j]_t - \delta^{ij}t$ soient des intégrales stochastiques par rapport à X. Lorsque $d = 1$, on est ainsi conduit à une *équation de structure* de la forme

$$[X,X]_t = t + \int_0^t \Phi_s \, dX_s$$

où Φ est un processus prévisible; en dimension quelconque, cette équation devient

$$[X^i, X^j]_t = \delta^{ij}t + \int_0^t \sum_k (\Phi_k^{ij})_s \, dX_s^k$$

où les Φ_k^{ij} sont d^3 processus prévisibles.

Sauf dans un cas très simple, nous n'allons pas ici résoudre de telles équations, encore moins rechercher quand les solutions ont la propriété de représentation chaotique; notre but est seulement de comprendre la nature algébrique du système de coefficients Φ_k^{ij} figurant dans ces équations. Il est en effet remarqué dans le chapitre 2, section I.5.6 de [1] qu'ils sont liés par des relations de symétrie; nous verrons que ces relations reviennent à dire qu'ils forment un tenseur diagonalisable dans une base orthonormée. Cette équivalence entre une condition de symétrie et la diagonalisabilité dans une base orthonormée (théorème 1 ci-dessous) est bien sûr l'analogue, pour ce type de tenseurs, du théorème classique selon lequel les matrices symétriques sont exactement celles qui se diagonalisent dans une base orthonormée. Il serait surprenant que ce théorème soit nouveau; nous ne sommes cependant pas parvenus à en trouver trace dans la littérature.

Passant ensuite aux martingales à temps discret, nous ferons une étude analogue : mise en évidence des conditions algébriques de symétrie satisfaites par les tenseurs figurant dans leurs équations de structure, interprétation géométrique de ces conditions. Comme dans le cas unidimensionnel, en temps discret les trois propriétés de représentation chaotique, de représentation prévisible et d'existence d'une équation de structure sont équivalentes.

Nous nous fixons dans toute la suite un espace vectoriel euclidien E (c'est-à-dire un espace de Hilbert réel de dimension finie); nous appellerons d sa dimension et nous noterons $<x,y>$ et $\|x\|$ le produit scalaire et la norme euclidiens sur E. La forme bilinéaire $(x,y) \mapsto <x,y>$ sera appelée g; c'est un élément du produit tensoriel $E^*\otimes E^*$ où E^* désigne le dual de E. À tout vecteur $x \in E$ on peut associer la forme linéaire $x^* \in E^*$ définie par $x^*(y) = <x,y>$; cet isomorphisme canonique de E sur E^* permet de munir E^* de la forme bilinéaire $g^* \in E\otimes E$ caractérisée par $g^*(x^*,y^*) = g(x,y)$. Lorsque nous emploierons des coordonnées sur E, elles seront notées $(x^i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ et le repère utilisé sera toujours orthonormé. Nous suivrons la convention de sommation d'Einstein sur les indices croisés.

Préliminaires algébriques

Pour $n \geqslant 1$, si T est une forme n-linéaire sur E, c'est-à-dire si $T \in (E^*)^{n\otimes}$, on peut définir une forme $(2n-2)$-linéaire $T{\cdot}T$ sur E par

$$T{\cdot}T(x_1,\ldots,x_{n-1},y_1,\ldots y_{n-1}) = \sum_{b\in B} T(x_1,\ldots,x_{n-1},b)\,T(b,y_1,\ldots y_{n-1})$$

où B est une base orthonormée de E; dans cette formule, le second membre, égal au produit scalaire dans E^* des deux formes linéaires $z \mapsto T(x_1,\ldots,x_{n-1},z)$ et $z \mapsto T(z,y_1,\ldots y_{n-1})$, ne dépend pas du choix de B et $T{\cdot}T$ est simplement le produit tensoriel contracté de T par lui-même.

DÉFINITION. — *Une forme multilinéaire T sur un espace vectoriel euclidien sera dite* doublement symétrique *si les deux formes multilinéaires T et $T{\cdot}T$ sont symétriques.*

THÉORÈME 1. — *Une forme multilinéaire sur un espace vectoriel euclidien se diagonalise dans une base orthonormée si et seulement si elle est doublement symétrique.*

Dire qu'une forme multilinéaire se diagonalise dans une base orthonormée B de E signifie qu'il existe une famille de réels $(\lambda_b\,,\ b \in B)$ tels que

$$T = \sum_{b\in B} \lambda_b\, (b^*)^{n\otimes}\ ;$$

ceci veut simplement dire que $T(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{b\in B} \lambda_b \prod_{i=1}^n {<}b, x_i{>}$ ou encore que toute composante non nulle de l'écriture de T dans la base B a tous ses n indices égaux.

Cette condition de diagonalisabilité dans une base orthonormée est toujours satisfaite pour $n = 1$; dans ce cas, la forme linéaire T et la forme 0-linéaire $T{\cdot}T$ (qui est un scalaire) sont trivialement symétriques. Pour $n = 2$, il est bien connu que la diagonalisabilité dans une base orthonormée équivaut à la symétrie de T seule. Mais ceci ne met pas le théorème en défaut, puisque la symétrie d'une forme bilinéaire T entraîne facilement celle de la forme bilinéaire $T{\cdot}T$.

En revanche, dès que $n \geqslant 3$ et que $d \geqslant 2$, la symétrie de T ne suffit plus à entraîner celle de $T{\cdot}T$: le théorème deviendrait faux si l'on en effaçait le mot "doublement". Par exemple, le tenseur à n indices

$$T_{ij\ldots k} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j = \ldots = k = 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

est symétrique mais non doublement symétrique puisque

$$(T{\cdot}T)_{1\ldots12\ldots2} = \sum_{p=1}^{d} T_{1\ldots1p}\, T_{p2\ldots2} = d - 1$$

alors que

$$(T{\cdot}T)_{21\ldots12\ldots21} = \sum_{p=1}^{d} T_{21\ldots1p}\, T_{p2\ldots21} = d\ .$$

Toujours dans le cas $n \geqslant 3$ et $d \geqslant 2$, l'ensemble des tenseurs doublement symétriques n'est pas un espace vectoriel, car le tenseur T ci-dessus s'écrit comme la différence $T' - T''$ de deux tenseurs doublement symétriques, en prenant $T'_{ij\ldots k} = 1$ pour tous $i, j, \ldots, k$. Cet ensemble est caractérisé, dans l'espace vectoriel des tenseurs symétriques, par les équations du second degré non dégénérées qui expriment la symétrie de $T{\cdot}T$ (ce n'est pas une sous-variété de cet espace vectoriel; sa structure sera précisée plus loin).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. — La condition nécessaire est facile. Si, en effet, $T = \sum_{b\in B} \lambda_b\, (b^*)^{n\otimes}$, T est symétrique (car chaque terme de cette somme l'est); en outre

$$T{\cdot}T = \sum_{b\in B} \sum_{\beta\in B} \lambda_b \lambda_\beta\, {<}b, \beta{>}\, (b^*)^{(n-1)\otimes} \otimes (\beta^*)^{(n-1)\otimes}$$

devient, puisque la base B est orthonormale, $T{\cdot}T = \sum_{b\in B} \lambda_b^2\, (b^*)^{(2n-2)\otimes}$ et montre que $T{\cdot}T$ est symétrique lui aussi.

Pour vérifier la réciproque, nous pouvons, grâce aux remarques qui précèdent la démonstration, nous restreindre au cas $n \geqslant 3$.

Supposons donc T doublement symétrique. Si $u, v_1, \ldots, v_\ell$ sont des vecteurs de E, nous écrirons $T(u^{n-\ell}, v_1, \ldots, v_\ell)$ au lieu de $T(u, \ldots, u, v_1, \ldots, v_\ell)$, où u figure $n - \ell$ fois (la notation $u^{(n-\ell)\otimes}$ serait plus rigoureuse que $u^{n-\ell}$, mais typographiquement plus lourde).

Pour établir le théorème, il suffit d'exhiber *un vecteur unitaire* $x \in E$ *possédant, pour tout entier* $\ell \in [1, n-1]$, *la propriété* (P_ℓ) *suivante : pour tous les vecteurs* $y_1, \ldots, y_\ell$ *orthogonaux à* x, *on a* $T(x^{n-\ell}, y_1, \ldots, y_\ell) = 0$.

Si en effet x est un tel vecteur, en écrivant tout vecteur z sous la forme $<z, x>x + y$ avec $y \perp x$, on aura

$$T(z_1, \ldots, z_n) = T(x^n) \prod_{k=1}^{n} <z_k, x> + T(y_1, \ldots, y_n)$$

car les propriétés (P_ℓ) annuleront tous les termes mixtes. Mais, en appelant U la restriction de T à l'hyperplan $x^\perp$, (P_{n-1}) entraînera que $U \cdot U$ sera la restriction de $T \cdot T$ à $x^\perp$ et U sera donc doublement symétrique lui aussi. La formule ci-dessus, réécrite

$$T(z_1, \ldots, z_n) = T(x^n)\, (x^*)^{n\otimes}(z_1, \ldots, z_n) + U(y_1, \ldots, y_n)$$

et jointe à la remarque que le cas $d = 1$ est trivial, permettra alors d'établir le théorème en toute généralité par récurrence sur la dimension de E.

La fonction $u \mapsto |T(u^n)|$ est continue sur la sphère unité; choisissons un vecteur unitaire x qui la maximise. Le reste de la démonstration va consister à vérifier que cet x possède les propriétés (P_ℓ) pour ℓ allant de 1 à $n-1$.

S'il se trouve que $T(x^n) = 0$, on a aussi $T(y^n) = 0$ pour tout vecteur y par définition de x. La formule de polarisation (valable pour tout tenseur symétrique)

$$(-1)^n n!\, T(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{I \subset \{1, \ldots, n\}} (-1)^{|I|}\, T\big((\textstyle\sum_{i \in I} z_i)^n\big)$$

montre que dans ce cas $T = 0$ et x vérifie les (P_ℓ).

Pour montrer que x vérifie les (P_ℓ), nous pouvons donc supposer que $T(x^n) \neq 0$ et, quitte à remplacer T par $-T$, que $T(x^n) > 0$. Posons $a = T(x^n) > 0$. Si u est un vecteur unitaire orthogonal à x, en posant $v(\theta) = x \cos\theta + u \sin\theta$, la fonction $f(\theta) = T\big(v(\theta)^n\big)$ est maximale pour $\theta = 0$. Puisque $f'(\theta) = nT\big(v(\theta)^{n-1}, v'(\theta)\big)$ et que $f''(\theta) = nT\big(v(\theta)^{n-1}, v''(\theta)\big) + n(n-1)T\big(v(\theta)^{n-2}, v'(\theta)^2\big)$, on obtient, en écrivant $f'(0) = 0$ et $f''(0) \leqslant 0$,

$$T(x^{n-1}, u) = 0$$

(cette formule s'étend à tout vecteur u orthogonal à x et établit donc (P_1)) et

$$T(x^{n-2}, u, u) \leqslant \frac{1}{n-1} T(x^n) = \frac{a}{n-1}\,.$$

Soit B' une base orthonormée de l'hyperplan $x^\perp$; $B = B' \cup \{x\}$ est une base orthonormée de E. La symétrie de $T \cdot T$ permet d'écrire

$$\sum_{b \in B} T(x^{n-1}, b)\, T(b, x^{n-3}, y, z) = \sum_{b \in B} T(x^{n-2}, y, b)\, T(b, x^{n-2}, z)\,.$$

Le facteur $T(x^{n-1}, b)$ au premier membre est nul pour $b \in B'$ en raison de (P_1). Pour y orthogonal à x, le facteur $T(x^{n-2}, y, b)$ au second membre est nul si $b = x$ pour la même raison et il reste

$$T(x^n)\, T(x^{n-2}, y, z) = \sum_{b \in B'} T(x^{n-2}, y, b)\, T(b, x^{n-2}, z)\,.$$

En désignant par R la restriction à l'hyperplan $x^\perp$ de la forme bilinéaire symétrique $(y,z) \mapsto T(x^{n-2},y,z)$, cette formule devient

$$a\,R(y,z) = \sum_{b\in B'} R(y,b)R(z,b)$$

et l'opérateur linéaire symétrique L défini sur $x^\perp$ par $\langle L(y),z\rangle = a^{-1}R(y,z)$ vérifie $\langle L(y),z\rangle = \sum_{b\in B'} \langle L(y),b\rangle\langle L(z),b\rangle = \langle L(y),L(z)\rangle = \langle L^2(y),z\rangle$. En conséquence, L est un projecteur et il existe donc une base orthogonale de $x^\perp$ dans laquelle R est représentée par une matrice diagonale

$$\mathrm{diag}\,(a,\dots,a,0,\dots,0)\,.$$

Mais aucun vecteur unitaire y de $x^\perp$ ne peut vérifier $R(y,y) = a$ puisque nous avons vu plus haut l'inégalité $R(y,y) \leqslant \dfrac{a}{n-1}$; il en résulte que $R = 0$, ce qui établit (P_2).

Si $n = 3$, la démonstration est terminée. Si $n \geqslant 4$, il reste à vérifier (P_ℓ) pour $3 \leqslant \ell \leqslant n-1$. Nous allons pour cela utiliser une seconde fois la symétrie de $T{\cdot}T$. Pour $y_1,\dots,y_\ell$ orthogonaux à x, écrivons

$$\sum_{b\in B} T(x^{n-1},b)\,T(b,x^{n-1-\ell},y_1,\dots,y_\ell) = \sum_{b\in B} T(x^{n-2},y_1,b)\,T(b,x^{n-\ell},y_2,\dots,y_\ell)\,.$$

Le facteur $T(x^{n-1},b)$ au premier membre est nul pour $b \in B'$ en raison de (P_1) ; le facteur $T(x^{n-2},y_1,b)$ au second membre est nul si $b = x$ à cause de (P_1) et si $b \in B'$ à cause de (P_2). Il reste

$$a\,T(x^{n-\ell},y_1,\dots,y_\ell) = 0$$

et (P_ℓ) est établie. ∎

DÉFINITION. — *Une partie d'un espace vectoriel euclidien est un* système droit *si ses éléments sont des vecteurs non nuls, deux-à-deux orthogonaux.*

PROPOSITION 1. — *Soit n un nombre impair supérieur à 2. Les formules*

$$\begin{cases} T = \sum_{s\in S} (s^*)^{n\otimes} \\ S = \{x \in E\backslash\{0\} \quad T(x,\dots) = \langle x,x\rangle\,(x^*)^{(n-1)\otimes}\} \end{cases}$$

établissent une bijection entre les formes n-linéaires T doublement symétriques sur E et les systèmes droits S de E. Il en va de même pour les formules

$$\begin{cases} T = \sum_{\sigma\in\Sigma} \|\sigma\|^{-2}\,(\sigma^*)^{n\otimes} \\ \Sigma = \{x \in E\backslash\{0\} \quad T(x,\dots) = (x^*)^{(n-1)\otimes}\} \end{cases}$$

(le système droit étant maintenant noté Σ).

La notation $T(x,\dots)$ utilisée dans cet énoncé représente bien sûr la forme $(n-1)$-linéaire obtenue en fixant la première variable à la valeur x.

Comme les équations de structure que nous verrons plus bas ne nécessitent que le cas $n = 3$, nous laissons au lecteur l'énoncé analogue pour n pair. Il n'est vrai que pour $n \geqslant 4$ (pour $n = 2$, la matrice identité par exemple se diagonalise dans n'importe quelle base orthonormée, et plusieurs S peuvent donc donner le même T) ; en outre, il fait intervenir des systèmes droits, non pas de vecteurs, mais d'éléments du produit cartésien de $\{-1,1\}$ par $(E-\{0\})/R$, où R est la relation d'équivalence

$$x\,R\,y \iff (x = y \text{ ou } x = -y) \iff x{\otimes}x = y{\otimes}y\,.$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1. — La bijection de $E\backslash\{0\}$ dans lui-même définie par

$$\sigma = \|s\|^{\frac{2}{n-2}}\, s \quad ; \qquad s = \|\sigma\|^{-\frac{2}{n}}\, \sigma$$

transforme un système droit S en un nouveau système droit Σ (tel que σ est dans Σ si et seulement si s est dans S) et réciproquement; en outre, on a $T(s,\ldots) = <s,s> (s^*)^{(n-1)\otimes}$ si et seulement si $T(\sigma,\ldots) = (\sigma^*)^{(n-1)\otimes}$. Les deux parties de l'énoncé se correspondent par cette bijection; il suffit donc de démontrer la deuxième et la première s'ensuivra.

Si Σ est un système droit, $T = \sum_{\sigma\in\Sigma} \|\sigma\|^{-2} (\sigma^*)^{n\otimes}$ est doublement symétrique; réciproquement, pour T doublement symétrique, le théorème 1 donne une base orthonormée B et des coefficients λ_b tels que

$$T = \sum_{b\in B} \lambda_b\, (b^*)^{n\otimes}$$

et il suffit de poser $\Sigma = \left\{\sqrt[n-2]{\lambda_b}\, b,\ b \in B\right\} \setminus \{0\}$ pour obtenir un système droit tel que $T = \sum_{\sigma\in\Sigma} \|\sigma\|^{-2} (\sigma^*)^{n\otimes}$. L'application qui à Σ associe ce tenseur est donc surjective; pour vérifier qu'elle est injective et d'inverse donnée par la formule de l'énoncé, il ne nous reste qu'à vérifier que si T est donné à partir de Σ par $T = \sum_{\sigma\in\Sigma} \|\sigma\|^{-2} (\sigma^*)^{n\otimes}$, l'ensemble

$$\Sigma' = \left\{x \in E\backslash\{0\} \quad T(x,\ldots) = (x^*)^{(n-1)\otimes}\right\} ,$$

qui ne dépend que de T, est égal à Σ.

Il est clair que $\Sigma' \supset \Sigma$. En outre, Σ' est un système droit. En effet, pour x et y dans Σ', puisque

$$T(x,y,\ldots) = <x,y> (x^*)^{(n-2)\otimes} ;$$
$$T(y,x,\ldots) = <y,x> (y^*)^{(n-2)\otimes} ,$$

la symétrie de T donne

$$<x,y> \left[(x^*)^{(n-2)\otimes} - (y^*)^{(n-2)\otimes}\right] = 0 ,$$

d'où l'on déduit que x et y sont orthogonaux ou égaux. Ainsi, Σ' est un système droit contenant Σ. Cela entraîne que tout $x \in \Sigma' \setminus \Sigma$, étant orthogonal à Σ, vérifie $T(x,\ldots) = 0$, donc $(x^*)^{(n-1)\otimes} = 0$ par définition de Σ', donc $x = 0$, ce qui contredit la définition de Σ' et établit par l'absurde $\Sigma' = \Sigma$. ∎

L'isomorphisme canonique entre l'espace vectoriel euclidien E et son dual E^* s'étend à tous les tenseurs et permet en particulier d'identifier canoniquement avec les formes n-linéaires les applications linéaires de E dans $E^{(n-1)\otimes}$, c'est-à-dire les tenseurs une fois covariants et $n-1$ fois contravariants $T \in E^* \otimes E^{(n-1)\otimes}$. Nous dirons qu'un tel tenseur est doublement symétrique si la forme n-linéaire qui lui est canoniquement associée l'est. Cela permet d'allonger à peu de frais la liste des énoncés (dans cet ordre d'idées, on pourrait aussi jouer avec les tenseurs ℓ fois covariants et $n-\ell$ fois contravariants...); voici ce que devient dans ce cadre la seconde partie de la proposition 1.

COROLLAIRE 1. — *Soit m un entier pair non nul. Les formules*

$$\begin{cases} T = \sum_{\sigma\in\Sigma} \|\sigma\|^{-2}\, \sigma^* \otimes \sigma^{m\otimes} \\ \Sigma = \left\{x \in E\backslash\{0\} \quad T(x) = x^{m\otimes}\right\} \end{cases}$$

mettent en bijection les systèmes droits Σ de E avec les applications linéaires doublement symétriques T de E dans $E^{m\otimes}$.

La proposition qui suit, énoncée pour n impair, subsiste pour n pair plus grand que 3; comme pour la proposition 1, ce cas est laissé au lecteur.

PROPOSITION 2. — *Soit n un nombre impair plus grand que 2. Il existe une application borélienne B de l'ensemble des tenseurs $T \in (E^*)^{n\otimes}$ doublement symétriques dans l'ensemble des bases orthonormées de E telle que $B(T)$ soit, pour chaque T, une base dans laquelle T est diagonal.*

[Nous n'aurons pas besoin de plus de régularité que la mesurabilité affirmée ci-dessus; avec un peu de soin, la démonstration qui suit fournirait une application B de première classe de Baire (limite simple d'applications continues).]

DÉMONSTRATION. — Remarquons d'abord que, en utilisant les notations de la proposition 1, l'application $T \mapsto \operatorname{card} S$ est semi-continue inférieurement (donc borélienne). En effet, puisque $T(x,\ldots) = \sum_{s\in S} <s,x>(s^*)^{(n-1)\otimes}$, $S^\perp$ est exactement l'ensemble des $x \in E$ tels que $T(x,\ldots) = 0$, donc S engendre le même sous-espace de E que les d^{n-1} vecteurs $V_{j\ldots k} = (T_{ij\ldots k})_{1\leqslant i\leqslant d}$ et $\operatorname{card} S$ est égal au rang de ce système de d^{n-1} vecteurs.

Observons ensuite que l'application $T \mapsto S$ est elle aussi borélienne. Plus précisément, pour chaque $\ell \leqslant d$, cette application est un difféomorphisme C^∞ entre d'une part l'ensemble des tenseurs doublement symétriques tels que $\operatorname{card} S = \ell$, qui est une sous-variété de l'espace vectoriel $(E^*)^{n\otimes}$, et d'autre part l'ensemble des systèmes droits à ℓ éléments. Tout ceci résulte facilement du théorème des fonctions implicites : la bijection inverse $S \mapsto T = \sum_{s\in S}(s^*)^{n\otimes}$ est évidemment C^∞ et il suffit de voir qu'elle est immersive. Fixons pour cela un système droit S_0 possédant ℓ éléments; il suffit de voir que l'application $S \mapsto T = \sum_{s\in S}(s^*)^{n\otimes}$ de l'ensemble de tous les systèmes de ℓ vecteurs non nuls, orthogonaux ou non, dans $(E^*)^{n\otimes}$ est une immersion au point S_0. Choisissons un repère orthonormé $(e_1,\ldots,e_d)$ tel que $S_0 = \{\lambda_1 e_1,\ldots,\lambda_\ell e_\ell\}$. Dans ce repère, la formule

$$T_{pq\ldots r} = \sum_{i=1}^{\ell} s_i^p s_i^q \ldots s_i^r$$

donne au point S_0 (pour lequel $s_i^p = \lambda_i \delta_i^p$)

$$\frac{\partial T_{pp\ldots p}}{\partial s_i^j} = n\,\lambda_i^{n-1}\,\delta_{ip}\delta_{jp}$$

$$\frac{\partial T_{qp\ldots p}}{\partial s_i^j} = \lambda_i^{n-1}\,\delta_{ip}\delta_{jq} \qquad \text{pour } p \neq q$$

et la matrice de l'application linéaire tangente à $S \mapsto T$, qui contient une matrice carrée diagonale sans zéros sur la diagonale, est de rang maximal.

L'application $T \mapsto S$ étant mesurable, il ne reste plus qu'à normer les éléments de S et à les compléter par une base orthonormée de $S^\perp$ dépendant mesurablement de T pour obtenir une base orthonormée de E, qui dépend mesurablement de T et qui diagonalise T. ∎

REMARQUE. — Nous appelons bases les *parties* libres et génératrices de E. Le même résultat subsiste pour les repères, c'est-à-dire les *familles* $(e_i)_{i\in[1,d]}$ libres et génératrices d'éléments de E. Cela se voit immédiatement au moyen d'un relèvement borélien des parties finies de E dans les familles finies d'éléments de E, c'est-à-dire un choix mesurable d'une numérotation de chacune de ces parties (utiliser par exemple l'ordre lexicographique des coordonnées dans un repère fixé).

Ce distinguo entre bases et repères pourra paraître pédantesque; il apparaît naturellement dans les questions d'équations de structure. Nous rencontrerons plus bas, dans le cas des martingales à temps discret, un ensemble aléatoire $S(\omega)$, mesurable pour $\mathcal{F}_{n-1}$, qui est le support de la loi conditionnelle de X_n sachant $\mathcal{F}_{n-1}$, c'est-à-dire l'ensemble, connu à l'instant $n-1$, des valeurs (futures) possibles de X_n ; ce que l'on connaît est bien un ensemble, démocratiquement formé de points qui jouent tous le même rôle, et non une famille, dans laquelle chacun porte un dossard avec un numero différent. L'accroissement d'information entre les instants $n-1$ et n résultera précisément du choix d'un point, X_n, dans cet ensemble.

Équations de structure en temps continu

DÉFINITION. — *Une martingale* $X = (X^1,\dots,X^d)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *est dite* normale *si* $X_0 = 0$ *et si, pour tous* i *et* j, *le processus* $X^i_tX^j_t - \delta^{ij}t$ *est une martingale.*

Cela revient à dire que $[X^i,X^j]_t - \delta^{ij}t$ est une martingale, ou encore que $\langle X^i,X^j\rangle_t = \delta^{ij}t$. Il est clair que le groupe orthogonal $O(d)$ opère sur les martingales normales; plus généralement, si X est une martingale normale dans $\mathbb{R}^d$ et H un processus prévisible matriciel à valeurs dans $O(d)$, l'intégrale stochastique $\int H\,dX$ est encore une martingale normale. Ceci permet de définir intrinsèquement les martingales normales à valeurs dans un espace vectoriel euclidien (E,g) en demandant que le processus $[X,X]_t - g^*\,t$, à valeurs dans $E\otimes E$, soit une martingale.

Dans la suite, nous supposerons implicitement E muni d'un repère orthonormé; ceci nous permettra de travailler indifféremment dans E ou dans $\mathbb{R}^d$, en mélangeant sans précautions notations intrinsèques et notations en coordonnées.

DÉFINITION. — *Une martingale normale* $X = (X^1,\dots,X^d)$ *vérifie une* équation de structure *si chacune des* d^2 *martingales* $[X^i,X^j]_t - \delta^{ij}t$ *est une intégrale stochastique par rapport à* X.

L'équation de structure est dans ce cas

$$[X^i,X^j]_t = \delta^{ij}t + \int_0^t (\Phi^{ij}_k)_s\,dX^k_s\ ,$$

où les Φ^{ij}_k sont des processus prévisibles, bien définis presque partout pour la mesure $dt\otimes\mathbb{P}(d\omega)$ sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ (car si $I = \int H_k\,dX^k = 0$, on a aussi $\int \|H\|^2\,dt = \langle I,I\rangle = 0$). Pris ensemble, ces coefficients forment les composantes d'un tenseur $\Phi \in E^*\otimes E\otimes E$ (c'est-à-dire une application linéaire de E dans $E\otimes E$) qui dépend prévisiblement de (t,ω). Intrinsèquement, l'équation s'écrit

$$[X,X]_t = g^*\,t + \int_0^t \Phi_s\,dX_s\ .$$

PROPOSITION 3. — *Soit X une martingale normale à valeurs dans E, vérifiant une équation de structure*

$$[X,X]_t = g^* t + \int_0^t \Phi_s \, dX_s \ ,$$

où Φ est un processus prévisible à valeurs dans $E^*\otimes E\otimes E$.

Pour presque tout (t,ω), $\Phi_t(\omega)$ est doublement symétrique. Si $\Sigma_t(\omega)$ désigne le système droit qui lui est associé par le corollaire 1 et $\Pi_t(\omega)$ la projection orthogonale sur le sous-espace $\big(\Sigma_t(\omega)\big)^{\perp}$, la partie martingale continue de X est

$$X^c = \int_0^t \Pi_s(dX_s) \ ;$$

les sauts de X ne peuvent avoir lieu qu'à des instants totalement inaccessibles et, lorsqu'ils ont lieu, doivent vérifier

$$\Delta X_t(\omega) \in \Sigma_t(\omega) \ .$$

DÉMONSTRATION. — Puisque $d[X^i,X^j] = \delta^{ij}dt + \Phi^{ij}_\ell dX^\ell$, on doit avoir

$$\begin{aligned} d\big[[X^i,X^j],X^k\big] &= \delta^{ij}d[t,X^k] + \Phi^{ij}_\ell d[X^\ell,X^k] \\ &= \Phi^{ij}_\ell \left(\delta^{\ell k}dt + \Phi^{\ell k}_m \, dX^m\right) = \Phi^{ij}_k dt + \Phi^{ij}_\ell \Phi^{\ell k}_m \, dX^m \ . \end{aligned}$$

Comme $\big[[X^i,X^j],X^k\big]_t = \sum_{s\leqslant t} \Delta X^i_s \, \Delta X^j_s \, \Delta X^k_s$ est symétrique en i, j et k et son écriture en intégrales par rapport à dX et dt essentiellement unique, les quantités Φ^{ij}_k et $\Phi^{ij}_\ell \Phi^{\ell k}_m$ dépendent symétriquement de i, j et k. Il en résulte que la dernière dépend symétriquement de i, j, k et m; ceci montre que Φ est doublement symétrique.

En posant $C = \int \Pi \, dX$, on a

$$d[C,C] = (\Pi\otimes\Pi)\, d[X,X] = (\Pi\otimes\Pi)\, g^* dt + (\Pi\otimes\Pi)\, \Phi \, dX \ .$$

Mais le tenseur $(\Pi\otimes\Pi)\,\Phi \in E^*\otimes(E\otimes E)$ est identiquement nul, puisque les valeurs prises par Φ sont des combinaisons de $\sigma\otimes\sigma$ où σ décrit Σ. Donc $[C,C]$ est continu et la martingale C est continue. D'autre part, $\Phi \, dX = d[X,X] - g^*dt$ est à variation finie, donc $\Phi \, dX^c = 0$. Or, en définissant $\Gamma_t(\omega) : E\otimes E \to E$ par $\Gamma = \sum_{\sigma\in\Sigma} \|\sigma\|^{-4} \sigma^*\otimes\sigma^*\otimes\sigma$, on a $\mathrm{I}-\Pi = \Gamma \circ \Phi$; donc $(\mathrm{I}-\Pi)dX^c = \Gamma \, \Phi \, dX^c = 0$ et la martingale $X - C = \int (\mathrm{I}-\Pi)\, dX$ est purement discontinue. En conséquence, C est la partie martingale continue de X.

Si T est un temps d'arrêt,

$$\Delta X_T \otimes \Delta X_T = \Delta[X,X]_T = \Phi_T \, \Delta X_T \ ,$$

d'où $\Delta X_T \in \{0\} \cup \Sigma_T$ par définition de Σ; ainsi les sauts, lorsqu'ils ont lieu, sont dans Σ.

Enfin, si T est un temps d'arrêt prévisible borné,

$$\mathbb{E}[\Delta X_T \otimes \Delta X_T | \mathcal{F}_{T-}] = \mathbb{E}[\Phi_T \, \Delta X_T | \mathcal{F}_{T-}] = \Phi_T \, \mathbb{E}[\Delta X_T | \mathcal{F}_{T-}] = 0$$

donc $\Delta X_T = 0$ et X est quasi-continue à gauche. ∎

Dans l'énoncé ci-dessous, nous convenons que, dans un espace vectoriel euclidien de dimension 0 (donc réduit au seul vecteur nul), le processus nul est un mouvement brownien. (Remarquer que ceci est compatible avec la formule $\mathrm{Tr}\,[X,X]_t = td$, selon laquelle la variation quadratique euclidienne des mouvements browniens est proportionnelle à la dimension de l'espace!)

PROPOSITION 4. — *Soient $\Phi \in E^*\otimes E\otimes E$ un tenseur doublement symétrique et Σ le système droit que lui associe le corollaire 1.*

Soient B un mouvement brownien à valeurs dans l'espace vectoriel euclidien $\Sigma^\perp$ et, pour chaque $\sigma \in \Sigma$, N^σ un processus de Poisson d'intensité $\|\sigma\|^{-2}$; on suppose B et tous les N^σ indépendants. La martingale

$$X_t = B_t + \sum_{\sigma\in\Sigma} \left(N_t^\sigma - \|\sigma\|^{-2}t\right) \sigma$$

vérifie l'équation de structure à coefficients constants

$$[X,X]_t = g^* t + \Phi X_t ;$$

réciproquement, toute martingale vérifiant cette équation a même loi que X.

L'unicité en loi signifie que, pour des processus de Poisson et des mouvements browniens, l'orthogonalité implique l'indépendance. C. Stricker et M. Yor nous ont fait observer que, plus généralement, cette implication a lieu pour toutes les martingales ayant, chacune dans sa propre filtration, la propriété de représentation prévisible.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4. — Dans un repère orthonormé de E formé d'un repère orthonormé de $\Sigma^\perp$ et des vecteurs unitaires $\|\sigma\|^{-1}\sigma$, où σ décrit Σ, la martingale $X = B + \sum_{\sigma\in\Sigma} \left(N^\sigma - \|\sigma\|^{-2}t\right) \sigma$ vérifie $[X^i, X^j] = 0$ pour $i \neq j$, $[X^i, X^i]_t = t$ pour les indices i correspondant à $\Sigma^\perp$ et $[X^i, X^i]_t = t + \|\sigma\|\, X_t^i$ pour l'indice i correspondant à un vecteur $\sigma \in \Sigma$. D'autre part, dans ce même repère, les composantes de Φ sont toutes nulles sauf les Φ_i^{ii} pour les indices i correspondant à des $\sigma \in \Sigma$, qui valent $\Phi_i^{ii} = \|\sigma\|^2/\|\sigma\| = \|\sigma\|$. On vérifie ainsi par inspection directe des coefficients que $[X,X] = g^*t + \Phi X$.

La réciproque (unicité en loi de la solution) est un cas particulier du résultat d'unicité dans la proposition 5 ci-dessous; plutôt que de répéter deux fois le même argument, nous remettons à plus tard la fin de la démonstration, en laissant le lecteur vérifier l'absence de cercle vicieux.

COROLLAIRE 2. — *Dans $E^*\otimes E\otimes E$, le sous-ensemble des tenseurs doublement symétriques est le seul sous-ensemble $\mathcal{D}$ tel que*

(i) *pour tout $\Phi \in \mathcal{D}$, l'équation de structure dans E à coefficients constants $d[X,X]_t = g^*dt + \Phi\, dX_t$ a une solution;*

(ii) *pour toute martingale X à valeurs dans E vérifiant une équation de structure $d[X,X]_t = g^*dt + \Phi_t\, dX_t$, le processus prévisible Φ (défini à ensemble négligeable près pour $dt\otimes\mathbb{P}(d\omega)$ et à valeurs dans $E^*\otimes E\otimes E$) prend ses valeurs dans $\mathcal{D}$.*

DÉMONSTRATION. — La proposition 3 (respectivement 4) dit que les tenseurs doublement symétriques vérifient la propriété (ii) (respectivement (i)); il ne reste qu'à vérifier l'unicité. Si $\mathcal{D}$ vérifie (i), la proposition 3 dit que le processus (constant) Φ est à valeurs dans les tenseurs doublement symétriques, donc $\mathcal{D}$ est inclus dans les tenseurs doublement symétriques; si $\mathcal{D}$ vérifie (ii) et si Φ est un tenseur doublement symétrique, la propriété (ii) appliquée à la martingale construite à partir de Φ par la proposition 4 établit que $\Phi \in \mathcal{D}$. ∎

Terminons par le cas à accroissements indépendants, pour lequel nous plagions la proposition 4 de [3].

PROPOSITION 5. — *Soit* $\Phi : \mathbb{R}_+ \to E^*\otimes E\otimes E$ *une fonction borélienne telle que, pour chaque* t, *le tenseur* $\Phi(t)$ *soit doublement symétrique. L'équation de structure dans* E

$$d[X,X]_t = g^* dt + \Phi(t)\, dX_t$$

admet une solution.

Cette solution est unique en loi et à accroissements indépendants. De façon plus précise, si une martingale X, *définie sur un espace filtré* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0})$ *est une solution et si* $s \in \mathbb{R}_+$, *le processus* $(X_{s+t} - X_s)_{t\geqslant 0}$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_s$ *et sa loi ne dépend que de la fonction* $t \mapsto \Phi(s+t)$ *sur* $\mathbb{R}_+$.

En outre, la solution possède la propriété de représentation chaotique : en appelant C_p *le cône* $\{(t_1,\dots,t_p) \in \mathbb{R}_+^p \ : \ 0 < t_1 < \dots < t_p\}$ *et en désignant par* $\mathcal{B}$ *la sous-tribu de* $\mathcal{A}$ *engendrée par* X, *les intégrales multiples*

$$\int_{C_p} f(t_1,\dots,t_p)\, dX_{t_1}\dots dX_{t_p}$$

forment une partie totale de l'espace $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P})$ *lorsque* p *décrit* $\mathbb{N}$ *et que* f *décrit* $\mathrm{L}^2(C_p;(E^*)^{p\otimes})$.

DÉMONSTRATION. — Soient U une fonction borélienne de $\mathbb{R}_+$ dans les matrices orthogonales et, pour chaque $t \geqslant 0$, $V(t)$ la matrice inverse de $U(t)$. Le changement de variable

$$Y_t^p = \int_0^t U_i^p(s)\, dX_s^i\,, \quad X_t^i = \int_0^t V_p^i(s)\, dY_s^p$$

transforme l'équation de structure en $d[Y,Y]_t = g^* dt + \Psi(t)\, dY_t$, dans laquelle $\Psi_r^{pq} = U_i^p\, U_j^q\, \Phi_k^{ij}\, V_r^k$. Il suffit de démontrer la proposition pour cette nouvelle équation de structure, car les conclusions (existence, unicité, accroissements indépendants, représentation chaotique) se transfèreront immédiatement de Y à X. Mais la remarque qui suit la proposition 2 permet de choisir la matrice $U(t)$ telle que les composantes non diagonales de Ψ soient toutes nulles. Abandonnant dorénavant la convention de sommation et réécrivant X au lieu de Y pour l'inconnue, nous sommes ramenés au cas où l'équation de structure est du type

$$\begin{cases} d[X^j,X^j]_t = dt + \phi_j(t)\, dX_t^j \\ d[X^j,X^k]_t = 0 \qquad\qquad \text{pour } j \neq k, \end{cases}$$

ce que nous supposons dans la suite.

L'assertion d'existence peut se déduire du résultat analogue à une dimension (proposition 4 de [3]). Il suffit pour cela de construire séparément pour chaque j une solution de $d[X^j,X^j]_t = dt + \phi_j(t)\, dX_t^j$ comme somme d'un terme brownien et d'un terme poissonnien; en prenant ces ingrédients indépendants, la nullité des crochets mixtes résultera de ce que $[M,N] = 0$ si M et N sont deux browniens indépendants, ou un brownien et une martingale purement discontinue, ou deux martingales purement discontinues sans temps de sauts communs.

Supposons maintenant que X est une solution. Si u est une fonction borélienne de $\mathbb{R}_+$ dans E^*, bornée et à support compact, de composantes u_j, introduisons, comme dans la démonstration de la proposition 4 de [3], les fonctions complexes, bornées et à support compact

$$h_j(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{iu_j(t)\phi_j(t)} - 1}{\phi_j(t)} & \text{si } \phi_j(t) \neq 0 \\ iu_j(t) & \text{si } \phi_j(t) = 0, \end{cases}$$

$$\kappa_j(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{iu_j(t)\phi_j(t)} - 1 - iu_j(t)\phi_j(t)}{\phi_j(t)^2} & \text{si } \phi_j(t) \neq 0 \\ -\frac{1}{2}u_j(t)^2 & \text{si } \phi_j(t) = 0 \end{cases}$$

et $\kappa(t) = \sum_{j=1}^d \kappa_j(t)$, ainsi que les semimartingales

$$Z_t^j = \exp\left[i \int_0^t u_j(s)\, dX_s^j - \int_0^t \kappa_j(s)\, ds\right] .$$

Il est établi en page 75 de [3] que Z^j vérifie l'équation

$$Z_t^j = 1 + \int_0^t Z_{s-}^j h_j(s)\, dX_s^j .$$

Il en résulte que $d[Z^j, Z^k]$ est absolument continu par rapport à $d[X^j, X^k]$ et en particulier nul pour $j \neq k$. Cette orthogonalité des Z^j entraîne, par récurrence sur d, que le produit $R = \prod_{j=1}^d Z^j$ vérifie

$$dR_t = \sum_{j=1}^d \left(\prod_{k\neq j} Z_{t-}^k\right) dZ_t^j ;$$

remplaçant dZ_t^j par $Z_{t-}^j h_j(t)\, dX_t^j$ et appelant h la forme linéaire sur E ayant pour composantes les h_j, on voit que R est la martingale locale solution de l'équation exponentielle

$$R_t = 1 + \int_0^t R_{s-}\, h(s)\, dX_s .$$

Mais par ailleurs $R_t = \prod_j Z_t^j = \exp\left[i \int_0^t u(s)\, dX_s - \int_0^t \kappa(s)\, ds\right]$ est borné (c'est donc une martingale) et d'inverse borné. La démonstration s'achève comme dans [3], pp. 75–76 : D'abord, puisque $\mathbb{E}[R_\infty / R_s \,|\, \mathcal{F}_s] = 1$, on a

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(i \int_s^\infty u(t)\, dX_t\right) \middle|\, \mathcal{F}_s\right] = \exp\left[\int_s^\infty \kappa(t)\, dt\right] .$$

Par un choix convenable de u, cette formule permet d'exprimer les fonctions caractéristiques conditionnelles du processus $(X_{s+t} - X_s)_{t\geqslant 0}$ étant donnée $\mathcal{F}_s$ comme des quantités du type $\exp\left[\int_s^\infty \kappa(t)\, dt\right]$, déterministes et ne dépendant que des fonctions $t \mapsto \phi_j(s+t)$; ceci entraîne l'unicité en loi et l'indépendance des accroissements. Ensuite, les variables aléatoires $\exp\left[i \int_0^\infty u(t)\, dX_t\right]$ sont proportionnelles aux variables aléatoires exponentielles $R_\infty = \exp\left[i \int_0^\infty u(t)\, dX_t - \int_0^\infty \kappa(t)\, dt\right]$ et admettent donc un développement en série d'intégrales multiples ; comme elles sont totales dans $L^2(\mathcal{B})$ en raison de l'injectivité de la transformation de Fourier, X a la propriété de représentation chaotique. ∎

Équations de structure en temps discret

Comme lors de l'étude en temps continu, nous allons nous intéresser d'abord aux aspects algébrico-géométriques de la question, pour introduire seulement ensuite les probabilités et les équations de structure.

DÉFINITION. — *Nous dirons qu'une application linéaire T de l'espace vectoriel euclidien E dans $E\otimes E$ est un* tenseur sesqui-symétrique *si chacun des deux tenseurs $T \in E^*\otimes E\otimes E$ et $T{\cdot}T+\mathrm{Id}\otimes\mathrm{g}^* \in \mathrm{E}^*\otimes\mathrm{E}\otimes\mathrm{E}\otimes\mathrm{E}$ est symétrique* (comme plus haut, $T{\cdot}T$ désigne le produit contracté obtenu en contractant le dernier argument du premier T avec le premier argument du second; les symétries s'entendent par rapport à tous les arguments, après identification de E et E^*; le tenseur $\mathrm{Id} \in E^*\otimes E$ est l'application identique de E dans lui-même).

DÉFINITION. — *Une partie S de E est un* système obtus *si elle a exactement $d+1$ éléments et si, pour tous r et s de S tels que $r \neq s$, on a $<r,s> = -1$.*

Cette définition est analogue à celle des systèmes droits qui interviennent en temps continu; l'analogie serait encore plus frappante si les systèmes droits avaient été définis comme composés d'exactement d vecteurs deux-à-deux orthogonaux, nuls ou non, le vecteur nul pouvant être répété plusieurs fois (cela reviendrait bien sûr au même, au prix d'une modification des énoncés).

Les systèmes obtus jouissent de propriétés géométriques; par exemple, tout vecteur d'un système obtus est orthogonal au sous-espace affine engendré par les autres points; plus généralement, le sous-espace vectoriel engendré par une partie d'un système obtus est orthogonal au sous-espace affine engendré par le reste du système. En particulier, les sous-espaces affines respectivement engendrés par deux parties disjointes d'un même système obtus sont orthogonaux.

THÉORÈME 2. — a) *Les systèmes obtus de E forment une variété de dimension $d(d+1)/2$; tout système obtus est un simplexe (ses points sont affinement indépendants).*

b) *Un sous-ensemble S de E tel que* $\operatorname{card} S \leqslant d+1$ *est un système obtus si et seulement si il porte une probabilité $\pi = \sum_{s\in S} p_s\,\delta_s$ de moyenne nulle ($\sum_{s\in S} p_s\, s = 0$) et de covariance identité ($\sum_{s\in S} p_s\, s\otimes s = g^*$). Lorsque tel est le cas, π est unique et donnée par $p_s = 1/(1+\|s\|^2)$. Inversement, étant donnée, sur un ensemble I à $d+1$ éléments, une probabilité $q = (q_i)_{i\in I}$ chargeant tous les éléments de I, il existe une famille $(x_i)_{i\in I}$ de points de E telle que l'ensemble $\{x_i, i \in I\}$ soit un système obtus dont la probabilité π soit donnée par $p_{x_i} = q_i$ pour chaque i.*

c) *Les formules*

$$\begin{cases} S = \{x \in E \,:\, x\otimes x = g^* + T(x)\} \\ T = \displaystyle\sum_{s\in S} p_s\, s^*\otimes s\otimes s \end{cases}$$

mettent en bijection les tenseurs sesqui-symétriques T et les systèmes obtus S de E. En outre, étant donné un système obtus S de E, il existe un unique tenseur $T \in E^*\otimes E\otimes E$ tel que $x\otimes x = g^* + T(x)$ pour tout x de S et ce tenseur est le tenseur sesqui-symétrique lié à S par les formules ci-dessus.

DÉMONSTRATION. — Nous allons agrandir l'espace et plonger isométriquement E dans un espace vectoriel euclidien $\tilde{E}$ de dimension $d+1$ dont E sera un hyperplan; nous appellerons u un vecteur unitaire de $\tilde{E}$ orthogonal à E; tout élément $\tilde{x}$ de $\tilde{E}$ s'écrit sous la forme (que nous dirons *canonique*) $\tilde{x} = x+\xi u$, où $x \in E$ et $\xi \in \mathbb{R}$. Le tenseur de $\tilde{E}\otimes\tilde{E}$ induisant la structure euclidienne de $\tilde{E}$ est $g^* + u\otimes u$. Le produit scalaire de deux vecteurs $\tilde{x} = x+\xi u$ et $\tilde{y} = y+\eta u$ de $\tilde{E}$ donnés sous forme canonique vaut $<\tilde{x},\tilde{y}> = <x,y>+\xi\eta$ (comme les deux produits scalaires coïncident sur E, utiliser la même notation ne créera pas de confusion). Nous appellerons H l'hyperplan affine $E + u$ de $\tilde{E}$; c'est l'ensemble des $\tilde{x} \in \tilde{E}$ tels que $<\tilde{x},u> = 1$. Nous désignerons par j l'injection (affine, mais non linéaire) de E dans $\tilde{E}$ définie par $j(x) = x+u$; $j(E)$ n'est autre que H.

a) Puisque $<j(x),j(y)> = <x,y> + 1$, une partie S de E est un système obtus si et seulement si $j(S)$ est un système droit de $d+1$ points de $\tilde{E}$, c'est-à-dire une base orthogonale de $\tilde{E}$. Il en résulte d'une part que les systèmes obtus de E se paramètrent par les systèmes de $d+1$ droites de $\tilde{E}$ non parallèles à H et deux-à-deux orthogonales, formant ainsi une variété de dimension $d(d+1)/2$, et d'autre part que les $d+1$ points d'un système obtus sont affinement indépendants (toute liaison affine entre ces points se traduirait par une liaison linéaire entre leurs images par j).

b) Si S est un système obtus, $j(S)$ est une base orthogonale de $\tilde{E}$ et les coefficients positifs $p_s = 1/(1+\|s\|^2) = \|j(s)\|^{-2}$ vérifient, pour tout $r \in S$,

$$<\textstyle\sum_{s\in S} p_s\, j(s), j(r)> = p_r\|j(r)\|^2 = 1 = <u, j(r)> ;$$

cela entraîne $\sum_{s\in S} p_s\, j(s) = u$. Remplaçant $j(s)$ par $s+u$, on obtient $\sum_{s\in S} p_s = 1$ et $\sum_{s\in S} p_s\, s = 0$. Enfin, puisque les vecteurs $k(s) = j(s)/\|j(s)\| = \sqrt{p_s}\, j(s)$ forment, quand s décrit S, une base orthonormée de $\tilde{E}$, on doit avoir

$$\begin{aligned} g^* + u\otimes u &= \sum_{s\in S} k(s)\otimes k(s) = \sum_{s\in S} p_s\,(s+u)\otimes(s+u) \\ &= \sum_{s\in S} p_s\, s\otimes s + u \otimes \left[\textstyle\sum_{s\in S} p_s\, s\right] + \left[\textstyle\sum_{s\in S} p_s\, s\right] \otimes u + \left[\textstyle\sum_{s\in S} p_s\right] u\otimes u \\ &= \sum_{s\in S} p_s\, s\otimes s + u\otimes u\ , \end{aligned}$$

d'où $\sum_{s\in S} p_s\, s\otimes s = g^*$.

Réciproquement, étant donné un système $S \subset E$ tel que $\operatorname{card} S \leqslant d+1$ et portant une probabilité π centrée et de covariance identité, les trois relations

$$\sum_{s\in S} p_s = 1 \quad , \qquad \sum_{s\in S} p_s\, s = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{s\in S} p_s\, s\otimes s = g^*$$

entraînent, par le même calcul, $\sum_{s\in S} p_s\, j(s)\otimes j(s) = g^* + u\otimes u$; il en résulte que les vecteurs $\sqrt{p_s}\, j(s)$ sont au nombre de $d+1$ exactement et forment une base orthonormée de $\tilde{E}$; l'orthogonalité de $j(S)$ signifie que S est un système obtus et la condition de norme donne $p_s = \|j(s)\|^{-2} = 1/(1+\|s\|^2)$, d'où l'unicité de π.

Si l'on se donne arbitrairement $d+1$ nombres q_i strictement positifs et de somme 1, on peut construire $d+1$ vecteurs deux-à-deux orthogonaux $v'_i \in \tilde{E}$ de normes $\|v'_i\| = 1/\sqrt{q_i}$ et le vecteur unitaire $u' = \sum_i q_i\, v'_i$; les v'_i sont dans l'hyperplan H' formé des x tels que $<x,u'> = 1$. Il existe une transformation orthogonale de $\tilde{E}$

qui envoie u' sur u, et donc H' sur H; les images v_i des v'_i par cette transformation sont un système droit inclus dans H; leurs images inverses par j forment un système obtus de E dont la probabilité π a pour coefficients les q_i.

c) À tout tenseur $T \in E^*\otimes E\otimes E$, on peut associer le tenseur $\tilde{T} \in \tilde{E}^*\otimes\tilde{E}\otimes\tilde{E}$ donné par

$$\tilde{T}(x) = T(x) + x\otimes u + u\otimes x \qquad \text{si } x \in E$$
$$\tilde{T}(u) = g^* + u\otimes u\ ,$$

de sorte que, si $\tilde{x} = x+\xi u$, $\tilde{y} = y+\eta u$ et $\tilde{z} = z+\zeta u$ sont trois vecteurs de $\tilde{E}$ mis sous forme canonique, on a

$$(*) \qquad \tilde{T}(\tilde{x},\tilde{y}^*,\tilde{z}^*) = T(x,y^*,z^*) + \zeta<x,y> + \eta<x,z> + \xi<y,z> + \xi\eta\zeta\ .$$

La clé de la démonstration réside dans les quatre propriétés suivantes de $\tilde{T}$.

α) *La restriction de $\tilde{T}$ à $E^*\otimes E\otimes E$ est T.*

Cela se voit immédiatement en prenant $\xi = \eta = \zeta = 0$ dans $(*)$.

β) *Un vecteur non nul $\tilde{x} = x+\xi u$ (forme canonique) vérifie $\tilde{T}(\tilde{x}) = \tilde{x}\otimes\tilde{x}$ si et seulement si $\tilde{x} \in H$ et $x\otimes x = g^* + T(x)$.*

En effet, l'équation $\tilde{T}(\tilde{x}) = \tilde{x}\otimes\tilde{x}$ équivaut à

$$T(x) + x\otimes u + u\otimes x + \xi(g^*+u\otimes u) = x\otimes x + \xi(x\otimes u + u\otimes x) + \xi^2 u\otimes u\ .$$

En identifiant la composante sur $E\otimes u$, on trouve $\xi = 1$ (ou $x = 0$, mais ceci impliquerait $\xi g^* = 0$ donc $\xi = 0$ et $\tilde{x} = 0$ et est exclu par hypothèse), ce qui entraîne $x\otimes x = g^* + T(x)$; la réciproque est immédiate.

γ) *Le noyau* $\operatorname{Ker}\tilde{T}$ *est nul.*

Si en effet un vecteur $\tilde{x} = x+\xi u$ annule $\tilde{T}$, on a

$$T(x) + x\otimes u + u\otimes x + \xi(g^*+u\otimes u) = 0\ ;$$

la nullité du coefficient de $u\otimes u$ implique $\xi = 0$ et celle de la composante dans $E\otimes u$ donne $x\otimes u = 0$, donc $x = 0$.

δ) *Pour que T soit sesqui-symétrique, il faut et il suffit que $\tilde{T}$ soit doublement symétrique.*

La formule $(*)$ montre en effet que $\tilde{T}(\tilde{x},\tilde{y}^*,\tilde{z}^*) - T(x,y^*,z^*)$ dépend symétriquement des trois arguments $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ et $\tilde{z}$; ceci entraîne que $\tilde{T}$ est symétrique si et seulement si T l'est. Introduisant un quatrième vecteur $\tilde{t} = t+\tau u \in \tilde{E}$, nous allons vérifier que, lorsque T et $\tilde{T}$ sont symétriques, le tenseur

$$R(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},\tilde{t}) = \tilde{T}\cdot\tilde{T}(\tilde{x},\tilde{y}^*,\tilde{z}^*,\tilde{t}^*) - (T\cdot T+\mathrm{Id}\otimes g^*)(x,y^*,z^*,t^*)$$

est symétrique en les quatre arguments; l'assertion sera ainsi établie. En utilisant une base orthonormée B de E (de sorte que $\tilde{B} = B\cup\{u\}$ est une base orthonormée de $\tilde{E}$), on peut écrire

$$\begin{aligned}
\tilde{T}\cdot\tilde{T}(\tilde{x},\tilde{y}^*,\tilde{z}^*,\tilde{t}^*) &= \sum_{b\in\tilde{B}} T(\tilde{x},\tilde{y}^*,\tilde{b}^*)\,T(\tilde{b},\tilde{z}^*,\tilde{t}^*)\\
&= T(\tilde{x},\tilde{y}^*,\tilde{u}^*)\,T(\tilde{u},\tilde{z}^*,\tilde{t}^*) + \sum_{b\in B} T(\tilde{x},\tilde{y}^*,\tilde{b}^*)\,T(\tilde{b},\tilde{z}^*,\tilde{t}^*)\\
&= \big(<x,y> + \xi\eta\big)\big(<z,t> + \zeta\tau\big)\\
&\qquad + \sum_{b\in B} \big(T(x,y^*,b^*) + \eta<x,b> + \xi<y,b>\big)\\
&\qquad\qquad \big(T(b,z^*,t^*) + \zeta<b,t> + \tau<b,z>\big)\ .
\end{aligned}$$

Effectuant les produits, on obtient 4 termes et 9 sommes sur B. La première de ces 9 sommes est $T{\cdot}T(x,y^*,z^*,t^*)$; gardons-la en réserve. Les 8 autres se calculent en remplaçant $\sum_b <x,b>b$ par x et se partagent en deux groupes de 4 termes : On a d'abord

$$\eta T(x,z^*,t^*)+\xi T(y,z^*,t^*)+\zeta T(x,y^*,t^*)+\tau T(x,y^*,z^*)$$

compte tenu de la symétrie de T, ce groupe est symétrique en (x,y,z,t) et nous pouvons l'ignorer. On a ensuite les quatre termes

$$\eta\zeta<x,t>+\xi\zeta<y,t>+\eta\tau<x,z>+\xi\tau<y,z>$$

qui donnent un tenseur symétrique lorsqu'on les regroupe avec les deux termes $\xi\eta<z,t>$ et $\zeta\tau<x,y>$ provenant de la ligne du dessus. De cette ligne du haut, il nous reste encore $\xi\eta\zeta\tau$, que nous écartons aussi, et $<x,y><z,t> = (\mathrm{Id}\otimes g^*)(x,y^*,z^*,t^*)$, seul terme, avec $T{\cdot}T$, que nous ayons à garder.

Ainsi, modulo les tenseurs symétriques, il y a bien égalité entre $\tilde T{\cdot}\tilde T$ et $T{\cdot}T + \mathrm{Id}\otimes g^*$; l'équivalence δ) est établie.

Pour montrer que les formules

$$\begin{cases}\Phi(T)=\{x\in E\ :\ x\otimes x=g^*+T(x)\}\\ \Psi(S)=\sum_{s\in S}p_s\, s^*\otimes s\otimes s\end{cases}$$

mettent en correspondance biunivoque les systèmes obtus avec les tenseurs sesqui-symétriques, nous allons vérifier deux choses : premièrement, si l'on part de T sesqui-symétrique, l'ensemble $\Phi(T)$ est un système obtus, et $\Psi(\Phi(T))=T$; deuxièmement, étant donné un système obtus S, $\Psi(S)$ est sesqui-symétrique et $\Phi(\Psi(S))=S$.

Commençons par fixer un tenseur sesqui-symétrique T et l'ensemble $S=\Phi(T)$. L'équivalence δ) entraîne que le tenseur $\tilde T$ construit à l'aide de T est doublement symétrique. Le corollaire 1 lui associe un système droit Σ ; puisque, par la propriété γ), $\mathrm{Ker}\,\tilde T=0$, Σ est formé de $d+1$ vecteurs, deux-à-deux orthogonaux. La propriété β) dit que $\Sigma=j(S)$; ceci nous apprend que S est un système obtus. Le corollaire 1 donne aussi $\tilde T=\sum_{s\in S}\|j(s)\|^{-2}j(s)^*\otimes j(s)\otimes j(s)$; puisque $\|j(s)\|^{-2}=p_s$ et que la restriction de $\tilde T$ à $E^*\otimes E\otimes E$ est T, on obtient $T=\Psi(S)$.

Réciproquement, soient S un système obtus et $T=\Psi(S)=\sum_{s\in S}p_s\, s^*\otimes s\otimes s$. Puisque $p_s=\|j(s)\|^{-2}$, le corollaire 1 associe au système droit $j(S)$ le tenseur doublement symétrique $Q=\sum_{s\in S}p_s\, j(s)^*\otimes j(s)\otimes j(s)\in\tilde E^*\otimes\tilde E\otimes\tilde E$. Nous allons calculer ce tenseur ; puisqu'il est symétrique, il suffit de calculer $Q(\tilde x,\tilde x^*,\tilde x^*)$ pour $\tilde x=x+\xi u\in\tilde E$.

$$\begin{aligned}Q(\tilde x,\tilde x^*,\tilde x^*)&=\sum_{s\in S}p_s<j(s),\tilde x>^3=\sum_{s\in S}p_s\,(<s,x>+\xi)^3\\&=\sum_{s\in S}p_s\,[<s,x>^3+3\xi(s\otimes s)(x^*,x^*)+3\xi^2<s,x>+\xi^3]\\&=T(x,x^*,x^*)+3\xi<x,x>+\xi^3\ .\end{aligned}$$

(La dernière ligne a utilisé $\sum_{s\in S}p_s\, s\otimes s=g^*$, $\sum_{s\in S}p_s\, s=0$ et $\sum_{s\in S}p_s=1$.) La comparaison de cette formule avec $(*)$ montre que Q n'est autre que $\tilde T$; $\tilde T$ est donc le tenseur doublement symétrique associé au système droit $j(S)$. Il en résulte par δ) que T est sesqui-symétrique. Le corollaire 1, toujours lui, indique que $j(S)$ est l'ensemble des vecteurs non nuls $\tilde{x} \in \tilde{E}$ qui vérifient $\tilde{T}(\tilde{x}) = \tilde{x}\otimes\tilde{x}$; la propriété β) traduit ceci en $S = \Phi(T)$.

Enfin, la dernière assertion de l'énoncé découle de ce qui précède et de ce que, un système obtus S étant donné, il existe au plus un tenseur T tel que $T(x) = x\otimes x - g^*$ pour tout x de S; ceci est une conséquence immédiate de ce que S, qui n'est contenu dans aucun hyperplan, engendre linéairement E. ∎

Si $T \in E^*\otimes E\otimes E$ est sesqui-symétrique, le système obtus qui lui correspond par le théorème 2 sera appelé $S(T)$ et la loi de probabilité $\sum_{s\in S(T)} p_s\,\delta_s$ que le théorème lui associe sera notée $\pi(T)$.

En raccourci, on peut retenir du théorème 2 que les lois des vecteurs aléatoires centrés Y à valeurs dans E, prenant au maximum $d+1$ valeurs et vérifiant $\mathbb{E}[Y\otimes Y] = g^*$ peuvent être décrites comme les probabilités $\pi(T)$, où T décrit les tenseurs sesqui-symétriques.

REMARQUE (non utilisée dans la suite). — Portées par des simplexes, ces probabilités sont exactement celles des lois centrées et réduites qui sont extrémales parmi les lois centrées. Elles sont a fortiori extrémales dans l'ensemble $cr(E)$ des lois centrées et de covariance g^*, mais ce ne sont pas les seules. Le théorème de Douglas (théorème V.4.4 de [7]) montre en effet facilement que les points extrémaux de $cr(E)$ sont toutes les lois de $cr(E)$ dont le support est fini et vérifie les deux conditions suivantes : Il est constitué de ℓ points, où ℓ est tel que $d+1 \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{2}(d+1)(d+2)$; et l'espace (projectif) de toutes les hyperquadriques passant par ces ℓ points a pour dimension au plus $\frac{1}{2}d(d+3) - \ell$ (cet espace doit être vide si $\ell = \frac{1}{2}(d+1)(d+2)$). Par exemple, si $d = 1$, ce sont les lois de $cr(E)$ portées par 2 ou 3 points. Si $d = 2$, ce sont les lois de $cr(E)$ portées par 3 points, ou 4 points, ou 5 points dont 4 ne sont jamais alignés, ou enfin 6 points non tous situés sur une même conique (propre ou dégénérée).

Pour les équations de structure à temps discret, les tenseurs sesqui-symétriques vont jouer un rôle analogue à celui des tenseurs doublement symétriques pour les équations de structure à temps continu.

DÉFINITION. — *Une martingale à temps discret $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans l'espace vectoriel euclidien E est dite* normale *si $X_0 = 0$ et si, à tout instant $n > 0$, l'accroissement $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$ vérifie*

$$\mathbb{E}[\Delta X_n\otimes\Delta X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = g^*\,.$$

Cette condition est l'analogue de la formule $d\langle X,X\rangle_t = g^*dt$ en temps continu; elle signifie que les processus $\sum_{m=1}^n \Delta X_m\otimes\Delta X_m - n\,g^*$ et $X_n\otimes X_n - n\,g^*$ (tous deux à valeurs dans $E\otimes E$) sont des martingales. Dans un repère orthonormé, elle se traduit par les relations $\mathbb{E}[\Delta X_n^i\Delta X_n^j|\mathcal{F}_{n-1}] = \delta^{ij}$.

DÉFINITION. — *Une martingale normale $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ dans E vérifie une* équation de structure *s'il existe un processus prévisible $(\Phi_n)_{n>0}$ à valeurs dans $E^*\otimes E\otimes E$ tel que l'on ait pour tout $n > 0$*

$$\Delta X_n\otimes\Delta X_n = g^* + \Phi_n(\Delta X_n)\,.$$

Cette équation signifie que la martingale $\sum_{m=1}^{n} \Delta X_m \otimes \Delta X_m - n\,g^*$ est une intégrale stochastique par rapport à X; elle est automatiquement satisfaite dès lors que X possède la propriété de représentation prévisible. Nous verrons plus bas la réciproque : en temps discret, l'équation de structure entraîne la propriété de représentation prévisible, et même la propriété de représentation chaotique.

PROPOSITION 6. — *Si une martingale normale X vérifie une équation de structure*

$$\Delta X_n \otimes \Delta X_n = g^* + \Phi_n(\Delta X_n)\ ,$$

le processus prévisible Φ est à valeurs dans l'ensemble des tenseurs sesqui-symétriques; on a $\Delta X_n \in S(\Phi_n)$ et la loi conditionnelle de ΔX_n sachant $\mathcal{F}_{n-1}$ est $\pi(\Phi_n)$ en ce sens que, pour toute fonction borélienne f sur E,

$$\mathbb{E}[f(\Delta X_n)|\mathcal{F}_{n-1}] = \pi(\Phi_n)(f) \quad p.\ s.$$

DÉMONSTRATION. — L'ensemble $A(E)$ des fonctions affines sur E est un espace vectoriel à $d+1$ dimensions. Pour $n > 0$ fixé, l'ensemble des variables aléatoires de la forme $\alpha(\Delta X_n)$, où α est une variable aléatoire mesurable pour $\mathcal{F}_{n-1}$ et à valeurs dans $A(E)$, est stable par multiplication; en effet, vérifier que $\alpha'(\Delta X_n)\,\alpha''(\Delta X_n)$ est de la forme $\alpha(\Delta X_n)$ se ramène facilement au cas où α' et α'' sont des formes linéaires, et il suffit dans ce cas d'écrire

$$\alpha'(\Delta X_n)\,\alpha''(\Delta X_n) = (\alpha' \otimes \alpha'')(\Delta X_n \otimes \Delta X_n) = (\alpha' \otimes \alpha'')\big(g^* + \Phi_n(\Delta X_n)\big)$$

et de remarquer que les tenseurs α', α'' et Φ_n sont mesurables pour $\mathcal{F}_{n-1}$.

En conséquence, pour $\ell \in E^*$, il existe pour tout $k \geqslant 1$ une fonction affine A_k sur E, aléatoire mais mesurable pour $\mathcal{F}_{n-1}$, telle que l'on ait $\ell(\Delta X_n)^k = A_k(\Delta X_n)$; nous poserons $A_0 = 1$ (fonction constante sur E). Mais $d+2$ éléments quelconques de $A(E)$ sont toujours linéairement liés; plus précisément, il existe une application borélienne de $\big(A(E)\big)^{d+2}$ dans $\mathbb{R}^{d+2} \setminus \{0\}$ fournissant les coefficients de cette liaison linéaire. Nous avons donc des variables aléatoires non simultanément nulles $B_0, \ldots, B_{d+1}$, mesurables pour $\mathcal{F}_{n-1}$, telles que $\sum_{k=0}^{d+1} B_k\,A_k = 0$; ceci entraîne que la variable aléatoire $\ell(\Delta X_n)$ est solution d'une équation de degré au plus $d+1$, à coefficients B_k mesurables pour $\mathcal{F}_{n-1}$ et est donc presque sûrement à valeurs dans un ensemble aléatoire S_ℓ mesurable pour $\mathcal{F}_{n-1}$ et de cardinal au plus $d+1$. Gardant n fixé mais faisant varier ℓ dans une partie D dénombrable dense de E^*, on en tire que ΔX_n est presque sûrement dans l'ensemble aléatoire $S = \bigcap_{\ell \in D} \ell^{-1}(S_\ell)$, qui est mesurable pour $\mathcal{F}_{n-1}$ et a au plus $d+1$ points.

Puisque toute mesure simplement additive sur un ensemble fini est σ-additive, la quantité (définie, par exemple, pour toute f borélienne et bornée)

$$\mu(\omega)(f) = \mathbb{E}[f(\Delta X_n)|\mathcal{F}_{n-1}](\omega)\ ,$$

qui vérifie $\mu(f)(\omega) = \mu(f\mathbb{1}_{S(\omega)})(\omega)$, est, pour presque tout ω, une probabilité portée par $S(\omega)$; la définition des martingales entraîne que $\mu(\omega)$ est centrée et l'équation de structure que la covariance de $\mu(\omega)$ est g^*.

Le théorème 2 dit que $\Phi_n(\omega)$ est sesqui-symétrique, que $S(\omega)$ a exactement $d+1$ points et est le système obtus $S\big(\Phi_n(\omega)\big)$ et que la loi conditionnelle de ΔX_n sachant $\mathcal{F}_{n-1}$ est $\pi\big(\Phi_n(\omega)\big)$. ∎

COROLLAIRE 3. — *Soit $\Phi \in E^*\otimes E\otimes E$. Pour qu'il existe (un espace probabilisé et, défini sur celui-ci,) un vecteur aléatoire Y centré, à valeurs dans E, vérifiant presque sûrement*

$$Y\otimes Y = g^* + \Phi(Y)\ ,$$

il faut et il suffit que Φ soit sesqui-symétrique. Dans ce cas, Y prend ses valeurs dans le système obtus $S(\Phi)$ et a pour loi $\pi(\Phi)$; en outre, l'équation de structure à coefficients constants

$$\Delta X_n\otimes\Delta X_n = g^* + \Phi(\Delta X_n)$$

a une solution, unique en loi : la martingale $X_n = \sum_{m=1}^n Y_m$, où les Y_m sont des copies indépendantes de Y.

DÉMONSTRATION. Si Φ est sesqui-symétrique, tout vecteur aléatoire Y ayant pour loi $\pi(\Phi)$ est centré et prend ses valeurs dans $S(\Phi)$; d'après le théorème 2, il vérifie donc presque sûrement $Y\otimes Y = g^* + \Phi(Y)$.

Si réciproquement un tel Y existe, en appelant Y_m des copies indépendantes de Y, le processus $X_n = \sum_{m=1}^n Y_m$ est une martingale normale vérifiant l'équation de structure à coefficients constants; par la proposition précédente, on en déduit que Φ est sesqui-symétrique (mais il serait un peu plus simple de redémontrer ceci directement, en ce qu'espérances et lois sont plus simples qu'espérances conditionnelles et lois conditionnelles).

Dans ce cas, toujours d'après la proposition 6, toute solution X de l'équation de structure est telle que la loi conditionnelle de ΔX_n sachant $\mathcal{F}_{n-1}$ est la loi $\pi(\Phi)$; comme cette loi est déterministe, ΔX_n est indépendant de $\mathcal{F}_{n-1}$, avec la même loi que Y. ∎

COROLLAIRE 4. — *Les tenseurs sesqui-symétriques forment le seul sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $E^*\otimes E\otimes E$ tel que*

(i) *pour tout $\Phi \in \mathcal{S}$, l'équation de structure dans E à coefficients constants $\Delta X_n\otimes\Delta X_n = g^* + \Phi(\Delta X_n)$ a une solution;*

(ii) *pour toute martingale X à valeurs dans E vérifiant une équation de structure $\Delta X_n\otimes\Delta X_n = g^* + \Phi_n(\Delta X_n)$, le processus prévisible $(\Phi_n)_{n>0}$ (bien défini p. s. et à valeurs dans $E^*\otimes E\otimes E$) prend ses valeurs dans $\mathcal{S}$.*

DÉMONSTRATION. — Les tenseurs sesqui-symétriques vérifient (i) par le corollaire précédent et (ii) d'après la proposition 6. Inversement, soit $\mathcal{S}$ un ensemble vérifiant (i) et (ii). De (i), la proposition 6 permet de déduire que $\mathcal{S}$ est inclus dans les tenseurs sesqui-symétriques; si Φ est sesqui-symétrique, (ii) appliqué à la martingale X construite dans le corollaire 3 montre que Φ est dans $\mathcal{S}$. ∎

La proposition qui suit établit l'équivalence entre équation de structure et propriétés de représentation prévisible et chaotique; comme dans le cas unidimensionnel, c'est un résultat facile que l'on obtient par un petit calcul explicite de dimensions. (La longueur de la démonstration est trompeuse, parce que nous y avons inclus des rappels sur la construction de l'espace chaotique.)

PROPOSITION 7. — *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale normale dans E, de filtration naturelle $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et engendrant la tribu $\mathcal{A} = \bigvee_n \mathcal{F}_n$. Les cinq conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *La multiplicité de la filtration est majorée par* $d+1$ *(aux ensembles négligeables près, chaque* $\mathcal{F}_n$ *est finie et chaque atome de* $\mathcal{F}_n$ *contient au maximum* $d+1$ *atomes de* $\mathcal{F}_{n+1}$*).*

(ii) *La multiplicité de la filtration est exactement* $d+1$ *(aux ensembles négligeables près,* $\mathcal{F}_n$ *est finie et chaque atome de* $\mathcal{F}_n$ *contient exactement* $d+1$ *atomes, non négligeables, de* $\mathcal{F}_{n+1}$*).*

(iii) *La martingale* X *vérifie une équation de structure*

$$\Delta X_n \otimes \Delta X_n = g^* + \Phi_n(\Delta X_n)$$

où Φ *est un processus prévisible à valeurs dans les tenseurs sesqui-symétriques.*

(iv) *La martingale* X *a la propriété de représentation prévisible : pour toute variable aléatoire* $U \in \mathrm{L}^2(\mathcal{A})$*, il existe un processus prévisible* $(H_n)_{n>0}$ *à valeurs dans* E^**, tel que* $\sum_{n>0} \mathbb{E}\left[\|H_n\|^2\right] < \infty$ *et*

$$U = \mathbb{E}[U] + \sum_{n>0} H_n(\Delta X_n)\,.$$

(v) *La martingale* X *a la propriété de représentation chaotique : si l'on se donne une variable aléatoire* $U \in \mathrm{L}^2(\mathcal{A})$*, il existe, pour tout* $k \geqslant 0$ *et tous* $n_1, \ldots, n_k$ *tels que* $0 < n_1 < \ldots < n_k$*, une forme* k*-linéaire (déterministe)* $f^k_{n_1,\ldots,n_k}$ *sur* E *telle que*

$$\sum_{k\geqslant 0} \sum_{0<n_1<\ldots<n_k} \left\|f^k_{n_1,\ldots,n_k}\right\|^2 < \infty$$

et

$$U = \sum_{k\geqslant 0} \sum_{0<n_1<\ldots<n_k} f^k_{n_1,\ldots,n_k}(\Delta X_{n_1}, \ldots, \Delta X_{n_k})\,.$$

DÉMONSTRATION. — Remarquons tout d'abord que, puisque $X_0 = 0$, la tribu $\mathcal{F}_0$ est dégénérée.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii). Les tribus $\mathcal{F}_n$ étant finies, on peut parler de lois conditionnelles. La loi conditionnelle de ΔX_n sachant $\mathcal{F}_{n-1}$ est une probabilité (aléatoire) centrée, de covariance g^* ; selon le théorème 2 b), si elle est portée par au plus $d+1$ points, elle est portée par exactement $d+1$ points.

(ii) $\Rightarrow$ (v). Appelons $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des parties à k éléments de $\mathbb{N}^*$. Pour $f \in \mathrm{L}^2(\mathcal{P}_k; (E^*)^{k\otimes})$ et $g \in \mathrm{L}^2(\mathcal{P}_\ell; (E^*)^{\ell\otimes})$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[f(\Delta X_{m_1}, \ldots, \Delta X_{m_k}) g(\Delta X_{n_1}, \ldots, \Delta X_{n_\ell})\right]\\ &\qquad = \begin{cases} \mathbb{E}\left[(f \bullet g)(\Delta X_{m_1}, \ldots, \Delta X_{m_{k-1}}, \Delta X_{n_1}, \ldots, \Delta X_{n_{\ell-1}})\right] & \text{si } m_k = n_\ell \\ 0 & \text{si } m_k \neq n_\ell \end{cases}\end{aligned}$$

où $(f \bullet g)(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_1, \ldots, y_{\ell-1}) = \sum_{b\in B} f(x_1, \ldots, x_{k-1}, b) g(y_1, \ldots, y_{\ell-1}, b)$ est la forme $(k+\ell-2)$-linéaire obtenue en contractant les derniers arguments de f et g. Cette formule s'obtient en conditionnant par $\mathcal{F}_{p-1}$, où $p = \sup(m_k, n_\ell)$ et en utilisant la définition des martingales si $m_k \neq n_\ell$ et celle des martingales normales si $m_k = n_\ell$. En itérant, on obtient

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[f(\Delta X_{m_1}, \ldots, \Delta X_{m_k}) g(\Delta X_{n_1}, \ldots, \Delta X_{n_\ell})\right]\\ &\qquad\qquad = \begin{cases} <f, g>_{\mathrm{L}^2(\mathcal{P}_k; (E^*)^{k\otimes})} & \text{si } (m_1, \ldots, m_k) = (n_1, \ldots, n_\ell) \\ 0 & \text{si } (m_1, \ldots, m_k) \neq (n_1, \ldots, n_\ell). \end{cases}\end{aligned}$$

Il en résulte que l'application I qui à $f \in \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{L}^2\big(\mathcal{P}_k;(E^*)^{k\otimes}\big)$ associe l'élément $I(f) = \sum_{k\geqslant 0}\sum_{0<n_1<\ldots<n_k} f^k_{n_1,\ldots,n_k}(\Delta X_{n_1},\ldots,\Delta X_{n_k})$ de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ est une injection isométrique et a donc une image fermée. Pour montrer que cette isométrie est surjective, il suffit d'établir que son image est dense; nous allons vérifier que, pour chaque n, cette image contient $\mathrm{L}^2(\mathcal{F}_n)$.

Pour chaque $k \leqslant n$ et chaque k-uple $0 < n_1 < \ldots < n_k \leqslant n$, lorsque f décrit $(E^*)^{k\otimes}$, $f(\Delta X_{n_1},\ldots,\Delta X_{n_k})$ décrit un sous-espace $H^k_{n_1,\ldots,n_k}$ de $\mathrm{L}^2(\mathcal{F}_n)$, de même dimension que $(E^*)^{k\otimes}$ en raison de l'injectivité, donc de dimension d^k. Quand k et $(n_1,\ldots,n_k)$ varient, les sous-espaces $H^k_{n_1,\ldots,n_k}$ sont orthogonaux et leur somme directe, qui est l'image de I dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{F}_n)$, a donc pour dimension $\sum_{k=0}^n\sum_{0<n_1<\ldots<n_k\leqslant n} d^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d^k = (d+1)^n$. Mais l'hypothèse (ii) entraîne que $\mathcal{F}_n$ est formée d'exactement $(d+1)^n$ atomes; $(d+1)^n$ est donc aussi la dimension de $\mathrm{L}^2(\mathcal{F}_n)$; par comparaison des dimensions on voit ainsi que l'image de I remplit tout $\mathrm{L}^2(\mathcal{F}_n)$.

(v) $\Rightarrow$ (iv). Dans le développement orthogonal de U donné par (v), les termes correspondant à $k \neq 0$ sont orthogonaux aux constantes ($k = 0$), donc d'espérance nulle. Le terme constant est donc $\mathbb{E}[U]$, et (iv) s'obtient aussitôt en posant

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\ \sum_{0<n_1<\ldots<n_k<n} f^{k+1}_{n_1,\ldots,n_k,n}(\Delta X_{n_1},\ldots,\Delta X_{n_k},x)\,.$$

(iv) $\Rightarrow$ (iii). La formule (iv) implique $\mathbb{E}[U|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[U] + \sum_{k=1}^n H_k\Delta X_k$; pour $n > 0$ il en résulte $\mathbb{E}[U|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[U|\mathcal{F}_{n-1}] + H_n\Delta X_n$. Cette formule s'étend évidemment aux vecteurs aléatoires à valeurs dans $E\otimes E$; l'appliquant à $\Delta X_n\otimes\Delta X_n$, on obtient l'équation de structure annoncée; le tenseur y figurant est sesqui-symétrique d'après la proposition 6.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Par la proposition 6, la loi conditionnelle de X_n sachant $\mathcal{F}_{n-1}$ est portée par un ensemble (aléatoire) obtus, donc de cardinal $d+1$; ainsi la filtration a pour multiplicité exactement $d+1$. ∎

REMARQUE. — Par analogie avec le temps continu, où les propriétés de représentation prévisible et chaotique sont stables par produit, on pourrait croire que si deux martingales normales indépendantes X' et X'', à valeurs dans des espaces vectoriels euclidiens E' et E'', vérifient toutes deux les cinq propriétés de la proposition 7, il en va de même de la martingale normale $X = (X',X'')$ dans $E'\times E''$. Il n'en est rien : X'_1 (respectivement X''_1) prend exactement $d'+1$ (respectivement $d''+1$) valeurs, donc X_1 en prend $(d'+1)(d''+1)$ et ceci n'est égal à $d'+d''+1$ que si E' ou E'' est réduit à $\{0\}$.

PROPOSITION 8. — *Sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, toute filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant exactement $d+1$ pour multiplicité et telle que $\mathcal{F}_0$ soit dégénérée est la filtration naturelle d'une martingale normale à valeurs dans E.*

Selon la proposition 7, cette martingale normale a nécessairement la propriété de représentation chaotique; lorsque $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle d'une chaîne de Markov pour laquelle chaque point a exactement $d+1$ successeurs possibles, ce résultat est dû à Biane [2].

DÉMONSTRATION. — Soit $n > 0$. Si b est un atome de $\mathcal{F}_n$, appelons $A(b)$ l'atome de $\mathcal{F}_{n-1}$ qui contient b et posons $q(b) = \mathbb{P}[b|A(b)] = \mathbb{P}[b]/\mathbb{P}[A(b)]$; si l'on se fixe un atome a de $\mathcal{F}_{n-1}$, q définit une probabilité sur l'ensemble $B(a)$ des $d+1$ atomes de $\mathcal{F}_n$ inclus dans a. Le théorème 2 b) fournit un système obtus $S^a = \{s^a_b, b \in B(a)\}$ tel que, pour chaque $b \in B(a)$, $q(b)$ soit la masse affectée à s^a_b par $\pi(S^a)$. Il suffit de poser $\Delta X_n(\omega) = s_b^{A(b)}$ si $\omega \in b$ pour avoir un vecteur aléatoire dont la loi conditionnelle sachant $\mathcal{F}_{n-1}$ soit centrée et de covariance g^* et charge, quand ω varie, tous les atomes de $\mathcal{F}_n$. ∎

Dans [4], en dimension 1, une martingale normale à temps continu vérifiant une équation de structure et ayant certaines propriétés est fabriquée à partir d'une martingale discrète par interpolation de ses valeurs : étant donnés deux instants t_0 et t_1 de différence $\Delta t = t_1 - t_0 > 0$ et des variables aléatoires X_{t_0} et X_{t_1} telles que la loi conditionnelle de l'accroissement $\Delta X = X_{t_1} - X_{t_0}$ soit portée par deux points et vérifie $\mathbb{E}[\Delta X|\mathcal{F}_{t_0}] = 0$ et $\mathbb{E}[\Delta X^2|\mathcal{F}_{t_0}] = \Delta t$, il existe (au prix d'un grossissement éventuel de Ω) une martingale $(M_t)_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1}$ ayant une équation de structure et telle que $M_{t_0} = X_{t_0}$ et $M_{t_1} = X_{t_1}$. La construction de M est possible parce qu'il existe, pour toute loi centrée, de variance Δt et portée par deux points a et b, une martingale normale Z ayant une équation de structure (et même la propriété de représentation chaotique) telle que la variable aléatoire $Z_{\Delta t}$ ait cette loi (Z est la "martingale parabolique" telle que, à tout instant t, $Z_t(\omega)$ soit l'une ou l'autre des solutions de l'équation du second degré $z^2 = (a+b)z + t$; les sauts de Z, d'une branche à l'autre de la parabole ayant cette équation, ont lieu à des instants formant un processus ponctuel de Poisson d'intensité $dt/\big(4t + (a+b)^2\big)$; l'unicité en loi de la martingale vérifiant $Z_t^2 = (a+b)Z_t + t$ est établie dans [3]).

La proposition qui suit montre qu'une telle possibilité d'interpolation n'existe qu'en dimension 1.

PROPOSITION 9. — *Soit $(X_t)_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ une martingale normale à temps continu, à valeurs dans un espace vectoriel euclidien E de dimension d. Si la loi de X_1 est portée par $d+1$ points, $d = 1$ et, en appelant a et b les deux points qui portent la loi de X_1, X est la martingale parabolique vérifiant $X_t^2 = (a+b)X_t + t$.*

DÉMONSTRATION. — Soit S le support de la loi de X_1, formé de $d+1$ points. Puisque cette loi est centrée et réduite, S doit, d'après le théorème 2 b), être un système obtus. Pour chaque $t \in]0,1[$, on peut écrire

$$\mathbb{E}[(X_1 - X_t)\otimes(X_1 - X_t)|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X_1 \otimes X_1 - X_t \otimes X_t|\mathcal{F}_t] = (1-t)\, g^* .$$

Ainsi, la loi conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$ de $(X_1 - X_t)/\sqrt{1-t}$, qui est définie pour presque tout ω, qui est portée par les $d+1$ points $\big(y - X_t(\omega)\big)/\sqrt{1-t}$ (où y décrit S) et qui est centrée, a pour covariance g^*. Par le b) du théorème 2, ces $d+1$ points forment donc un système obtus; le produit scalaire de deux d'entre eux est -1 et l'on a donc, pour y et y' distincts et dans S, $<y - X_t(\omega), y' - X_t(\omega)> = -(1-t)$, ou encore $<X_t(\omega), y+y'> = <X_t(\omega), X_t(\omega)> - t$ (car, S étant un système obtus, $<y, y'> = -1$).

Si l'on avait $d \geqslant 2$, S aurait au moins trois points; étant donnés deux points distincts y' et y'' de S, il existerait dans S un troisième point y distinct des deux précédents; on aurait $<X_t(\omega), y+y'> = <X_t(\omega), y+y''>$, et $y' - y''$ serait orthogonal à $X_t(\omega)$; en conséquence, X_t serait presque sûrement orthogonal au sous-espace affine engendré par les points de S. Mais ceci est impossible : puisque les covariances de X_t et de X_1 sont des multiples de g^*, ni X_1 ni X_t ne peut rester presque sûrement dans un sous-espace affine strict de E; il en résulte que $d = 1$.

Appelons a et b les deux points de S; ils vérifient $ab = -1$. La relation vue plus haut $<X_t(\omega), y+y'> = <X_t(\omega), X_t(\omega)> - t$ dit exactement que $X_t^2 = (a+b)X_t + t$ et X est la martingale parabolique annoncée. ∎

REMARQUE. — En toutes dimensions, il existe des martingales normales X à temps continu telles que la loi de X_1 ait un support fini. L'exemple le plus simple est certainement la martingale dont les coordonnées X^i, dans un repère orthonormé, sont des martingales paraboliques unidimensionnelles indépendantes vérifiant chacune $(X_t^i)^2 = t$. Ce processus reste sur les 2^d demi-droites issues de l'origine vers les 2^d sommets du cube $[-1,1]^d$; sa distance à l'origine est déterministe et vaut $\|X_t\| = \sqrt{d}\sqrt{t}$; à des instants formant un processus ponctuel de Poisson d'intensité $(4d)^{-1}dt/t$, il saute de la demi-droite où il se trouve à l'une des d demi-droites voisines, changeant ainsi le signe de l'une de ses coordonnées.

RÉFÉRENCES

[1] S. Attal. Thèse de Doctorat, Université de Strasbourg I.

[2] Ph. Biane. Chaotic Representation for Finite Markov Chains. *Stochastics and Stochastics Reports 30*, 61–68, 1990.

[3] M. Émery. On the Azéma Martingales. *Séminaire de Probabilités XXIII*, Lecture Notes in Mathematics 1372, Springer 1989.

[4] M. Émery. On the Chaotic Representation Property for Martingales. Soumis aux *Proceedings of the 1993 Kolmogorov Semester on Stochastic Analysis*, Saint-Petersbourg.

[5] P.-A. Meyer. Quantum Probability for Probabilists. Lecture Notes in Mathematics 1538, Springer 1993.

[6] P.-A. Meyer. Éléments de probabilités quantiques. *Séminaire de Probabilités XX*, Lecture Notes in Mathematics 1204, Springer 1986.

[7] D. Revuz & M. Yor. Continuous Martingales and Brownian Motion. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Springer 1991.

I.R.M.A., Université Louis Pasteur
Département de Mathématiques
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg