SHRISHTI DHAV CHATTERJI

Remarques sur l'intégrale de Riemann généralisée

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 30 (1996), p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1996__30__1_0>

Remarques sur l'intégrale de Riemann généralisée

S.D. Chatterji

1. Introduction

Pour une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ il est bien connu que l'intégrale de Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$ est une limite, dans un sens approprié, des sommes de Riemann associées à f :

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Depuis les travaux de Henstock, Kurzweil et McShane, datant approximativement des années soixante, on s'est aperçu qu'en changeant le sens de la limite à prendre ci-dessus, l'on peut aboutir à des intégrales bien plus subtiles, comme celles dues à Lebesgue, Denjoy ou Perron. L'objectif de cet article est de décrire cette situation et d'indiquer quelques généralisations récentes obtenues dans le cas des fonctions f à valeurs vectorielles. En particulier, on esquisse une démonstration très simple du fait que l'intégrale de McShane coïncide avec l'intégrale usuelle de Lebesgue. L'article se termine par un rappel historique concernant ces différentes notions d'intégrale, ainsi que leurs relations avec la théorie de l'intégration stochastique.

2. Les définitions dans un cadre élémentaire

Soit $X = [a, b]$ un intervalle compact ($-\infty < a < b < \infty$) de $\mathbb{R}$; par une *partition* de X nous entendrons un système

$$P = \{(A_1, t_1), \ldots, (A_n, t_n)\}$$

où les A_i sont des sous-intervalles compacts (toujours non dégénérés) de X tels que

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = X,\ \mathring{A}_i \cap \mathring{A}_j = \varnothing \text{ si } i \neq j$$

et les points t_i sont n points quelconques de X, non nécessairement distincts et non nécessairement appartenant aux A_i correspondants; on dira que la partition P est *riemannienne* si $t_i \in A_i$, $1 \leq i \leq n$.

Soit $\delta : X \to]0, \infty[$; on dira que δ est une *fonction jauge*. Une partition P comme ci-dessus s'appellera *δ-fine* si

$$]t_i-\delta(t_i),\ t_i+\delta(t_i)[\ \supset A_i, \qquad 1 \le i \le n$$

Soit $f : X \to \mathbb{R}$; si P est une partition comme ci-dessus, on écrira

$$S(f; P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \lambda(A_i)$$

où $\lambda(A_i)$ est la longueur usuelle de l'intervalle A_i.

Nous dirons que f est *McShane-intégrable (M-intégrable)* où que $f \in \mathcal{M}$ s'il existe un nombre $c \in \mathbb{R}$ ayant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction jauge δ telle que

$$|S(f; P) - c| < \varepsilon$$

dès que P est une partition de X qui est δ-fine; on écrira $c = (M)\int_a^b f(x)dx$ ou $(M)\int_a^b f$.

Nous dirons que f est *Henstock-Kurzweil-intégrable (HK-intégrable)* ou que $f \in \mathcal{HK}$ s'il existe un nombre $c \in \mathbb{R}$ ayant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction jauge δ telle que

$$|S(f; P) - c| < \varepsilon$$

dès que P est une partition *riemannienne* de X qui est δ-fine; on écrira alors
$c = (HK)\int_a^b f(x)dx$ ou $(HK)\int_a^b f$.

On voit que la *seule* différence entre la définition de M-intégrabilité et celle de HK-intégrabilité réside dans la qualification "riemannienne" pour les partitions utilisées dans la seconde définition; il est donc un peu surprenant de constater après coup que

$$\mathcal{HK} \supsetneqq \mathcal{M} = \mathcal{L} \qquad (1)$$

où $\mathcal{L}$ représente la classe des fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ Lebesgue-intégrables dans le sens usuel.

En fait, l'inclusion

$$\mathcal{HK} \supset \mathcal{M}$$

est une conséquence logique évidente à partir des définitions mêmes de ces deux classes; pour constater que l'inclusion est stricte il suffit d'établir l'égalité $\mathcal{M} = \mathcal{L}$ et la validité de la proposition suivante concernant la classe $\mathcal{HK}$: *soit* $F : X \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $F'(x) = f(x) \in \mathbb{R}$ *existe pour tout* $x \in X$; *alors* $f : X \to \mathbb{R}$ *est dans* $\mathcal{HK}$ *et*

$$(HK)\int_a^b f = F(b) - F(a); \qquad (2)$$

autrement dit, une fonction dérivée f est toujours HK-intégrable et son HK-intégrale récupère sa primitive F. Or, il est bien connu qu'il existe des fonctions F dérivables, dont la dérivée n'est pas intégrable au sens de Lebesgue. Un exemple classique est le suivant : $F(x) = x^2 \sin x^{-2}$ pour $x \neq 0$, $F(0) = 0$. Dans ce cas, $F'(x)$ existe pour tout x, mais F' n'est pas intégrable (au sens de Lebesgue) dans un intervalle contenant l'origine. On voit donc que la seule chose à démontrer dans la relation (1) est l'égalité $\mathcal{M} = \mathcal{L}$.

En ce qui concerne la formule (2), on peut remarquer que ce résultat, même dans sa forme améliorée où l'on ne demande l'existence de $F'(x)$ qu'en dehors d'une partie dénombrable de X, est une conséquence directe de la définition même de l'intégrale HK (cf. [9], p. 43). Par contre, les démonstrations qu'on trouve couramment (même dans des ouvrages récents) à propos de la validité de la formule $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ sous l'hypothèse habituelle que la fonction $f = F'$ est intégrable au sens de Lebesgue sont assez subtiles. On voit donc que le seul fait de savoir que l'intégrale HK est un prolongement de l'intégrale de Lebesgue permet de banaliser un "résultat fin" de la théorie de Lebesgue.

La classe $\mathcal{HK}$ est en fait identique à une classe de fonctions intégrables dans le sens dit *restreint* de Denjoy, définie par une méthode complètement différente, dite de *totalisation*; elle peut être obtenue également par une autre méthode due à Perron, dite méthode des fonctions *majorantes* et *minorantes*; ces définitions de Denjoy et Perron sont présentées en grand détail dans le livre classique de Saks [15]. On peut donc dire brièvement que la classe $\mathcal{HK}$ est égale à la classe des fonctions intégrables au sens de Denjoy et de Perron.

Il est intéressant de remarquer que dans la définition des intégrales M ou HK ci-dessus, on ne mentionne nulle part la mesurabilité ou une autre propriété préalable quelconque de la fonction à intégrer; il se trouve qu'une fonction M ou HK intégrable est forcément mesurable (pour la M-intégrabilité, ce résultat est une conséquence de l'égalité $\mathcal{M} = \mathcal{L}$ démontrée ci-après; pour la HK-intégrabilité, il est démontré, sous une forme plus générale, dans [13], p. 112). La situation est en quelque sorte analogue à celle de l'intégrabilité de Riemann, où l'on part d'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ quelconque pour constater ensuite que f est Riemann-intégrable si et seulement si (i) f est bornée et (ii) f est continue p.p. Il est clair que si $f \in \mathcal{M}$ alors

$$(M)\int_a^b f = (HK)\int_a^b f.$$

De plus, si f est Riemann-intégrable (par exemple si f est continue) alors $f \in \mathcal{M}$ et

$$(M)\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx\ ;$$

la fonction jauge pour une fonction Riemann-intégrable est simplement une fonction constante.

Les propriétés élémentaires des intégrales M ou HK s'obtiennent rapidement à partir du fait que pour toute fonction jauge δ il existe des partitions riemanniennes de X qui sont δ-fines; la démonstration simple de ce fait revient à celle de la compacité de X. (cf. [9], p. 16; [13], p. 6).

3. L'inclusion $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$

Une démonstration très simple de cette inclusion est contenue dans le théorème général suivant, dû à Davies et Schuss [2] :

Soient E *un espace topologique,* $\mathcal{E}$ *une tribu sur* E *contenant la tribu borélienne,* μ *une mesure positive bornée sur* $\mathcal{E}$, *telle que la mesure de tout élément* B *de* $\mathcal{E}$ *soit égale à la borne inférieure des mesures des ensembles ouverts contenant* B.

Si f *est une fonction réelle, intégrable (au sens usuel) par rapport à* μ, *son intégrale* $c = \int f\,d\mu$ *possède la propriété suivante : pour tout* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver une application* $x \mapsto V(x)$, *qui à chaque élément* x *de* E *associe un voisinage ouvert* V(x) *de* x, *de telle manière que, pour toute suite* $\{(t_i, B_i)\}_{i\geq 1}$ *d'éléments de* $E \times \mathcal{E}$ *satisfaisant aux conditions*

$$(*)\qquad B_i \subset V(t_i),\ \ \mu(B_i \cap B_j) = 0 \text{ pour } i \neq j,\ \ \mu\Big(E \setminus \textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = 0,$$

on ait

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(t_i)|\mu(B_i) < \infty,\quad \Big|\sum_{i=1}^{\infty} f(t_i)\mu(B_i) - c\Big| < \varepsilon.$$

La démonstration de ce théorème, telle qu'elle figure dans [2], est d'une grande simplicité. Nous l'esquissons ici très brièvement pour que l'on constate clairement qu'elle n'utilise nulle part la condition $t_i \in B_i$. Elle prouve donc l'inclusion $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$, et non seulement le résultat moins précis $\mathcal{L} \subset$ HK, qui était l'objectif de l'article [2].

On remarquera que, dans le cas où l'espace E est un intervalle [a, b] de $\mathbb{R}$, on peut choisir V(x) de la forme $[a, b] \cap\ ]x-\delta(x), x + \delta(x)[$.

Et voilà l'idée de la démonstration. Sans diminuer la généralité, on pourra supposer $\mu(E) = 1$. Etant donnés la fonction intégrable f et le nombre $\varepsilon > 0$, choisissons tout d'abord un nombre $\eta > 0$ tel que, pour tout élément A de $\mathcal{E}$, la relation $\mu(A) < \eta$ entraîne $\int_A |f| d\mu < \varepsilon/3$.

Choisissons ensuite, pour tout élément n de $\mathbf{Z}$, un ensemble ouvert U_n contenant l'ensemble

$$E_n = \{(n-1)(\varepsilon/3) < f \leq n(\varepsilon/3)\},$$

de telle manière que l'on ait

$$\Sigma_{n\in\mathbf{Z}}\ \mu(U_n \setminus E_n) < \eta, \quad \Sigma_{n\in\mathbf{Z}}\ (|n| + 1)\ \mu(U_n \setminus E_n) < 1.$$

Posons enfin $V(x) = U_n$ pour $x \in E_n$.

Etant donnée une suite $\{(t_i, B_i)\}_{i\geq 1}$ d'éléments de $E \times \mathcal{E}$ satisfaisant aux conditions (*), il suffira de prouver que l'on a

$$\sum_i \int_{B_i} |f - f(t_i)| d\mu < \varepsilon.$$

A cet effet, considérons, pour tout indice i, l'élément $\nu(i)$ de $\mathbf{Z}$ caractérisé par la relation $t_i \in E_{\nu(i)}$. On a alors $B_i \subset V(t_i) = U_{\nu(i)}$. Il en résulte, pour tout élément n de $\mathbf{Z}$,

$$\sum_{i:\nu(i)=n} \mu(B_i \cap E_n^c) \leq \mu(U_n \setminus E_n).$$

L'inégalité à démontrer découle des trois inégalités suivantes :

$$\sum_i \int_{B_i \cap E_{\nu(i)}} |f - f(t_i)|\ d\mu < \varepsilon/3,$$

$$\sum_i \int_{B_i \cap E^c_{\nu(i)}} |f| d\mu < \varepsilon/3, \quad \sum_i \int_{B_i \cap E^c_{\nu(i)}} |f(t_i)|\ d\mu < \varepsilon/3.$$

La première de ces inégalités résulte du fait que, pour tout élément x de $E_{\nu(i)}$, on a $|f(x) - f(t_i)| < \varepsilon/3$. La deuxième résulte de la relation

$$\mu\Big(\bigcup_i (B_i \cap E^c_{\nu(i)})\Big) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \ \sum_{i:\nu(i)=n} \mu(B_i \cap E_n^c) \leq \sum_{n\in\mathbf{Z}} \mu(U_n \setminus E_n) < \eta.$$

Enfin, la troisième inégalité se démontre de manière analogue, en tenant compte de la majoration

$$|f(t_i)| < \{|v(i)| + 1)\ (\varepsilon/3).$$

Il est à noter que le raisonnement esquissé ci-dessus est applicable, à quelques modifications près, au cas vectoriel (par ex., au cas d'une fonction f, à valeurs dans un espace de Banach, qui soit intégrable au sens de Bochner). En outre, les définitions d'intégrale données ci-dessus peuvent être étendues à des fonctions définies sur un espace plus général qu'un intervalle de $\mathbb{R}$.

4. L'inclusion $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$

Afin d'établir cette inclusion, il est utile de rappeler quelques propriétés fondamentales de l'intégrale de McShane et de celle de Henstock et Kurzweil. Chacune de ces deux intégrales est une forme linéaire monotone sur un espace vectoriel de fonctions réelles : l'espace $\mathcal{M}$ pour la première, l'espace $\mathcal{HK}$ pour la deuxième. En outre, on a le résultat suivant :

(Théorème de convergence monotone) *Pour toute suite monotone* $\{f_n\}$ *d'éléments de* $\mathcal{HK}$, *telle que la suite* $\{(HK) \int_a^b f_n\}$ *soit bornée et que la fonction* $f = \lim_n f_n$ *soit partout finie, celle-ci appartient à la classe* $\mathcal{HK}$ *et vérifie la relation*

$$(HK) \int_a^b f = \lim_n\ (HK) \int_a^b f_n .$$

Enfin, pour tout élément f de $\mathcal{M}$, on a $|f| \in \mathcal{M}$; autrement dit, l'espace vectoriel $\mathcal{M}$ est un espace de Riesz. La différence principale entre les classes $\mathcal{M}$ et $\mathcal{HK}$ réside justement dans cette dernière propriété : une fonction f peut appartenir à $\mathcal{HK}$ sans que la fonction $|f|$ appartienne à $\mathcal{HK}$. En fait, si f et $|f|$ sont toutes deux dans $\mathcal{HK}$, alors f est dans $\mathcal{M}$ (cf. [13], p. 113).

De ce qui précède, il résulte que la formule

$$J(f) = (M) \int_a^b f$$

définit une forme linéaire monotone J sur l'espace de Riesz $\mathcal{M}$. De plus, $\mathcal{M}$ contient les constantes, et J possède la propriété de continuité séquentielle de Daniell. Par conséquent, si l'on considère la tribu $\mathcal{F}$ sur [a, b] constituée par les ensembles dont la fonction indicatrice appartient à $\mathcal{M}$, et si, pour tout élément A de cette tribu, on pose

$$\mu(A) = J(I_A),$$

on voit ([11], p. 57) que μ est une mesure sur $\mathcal{F}$, pour laquelle on a $\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{M}$ et $J(f) = \int f\, d\mu$ pour tout élément f de $\mathcal{M}$. En outre, grâce au théorème de la section précédente, $\mathcal{F}$ contient la tribu $\mathcal{E}$ des ensembles mesurables au sens de Lebesgue, et μ coïncide, sur $\mathcal{E}$, avec la mesure de Lebesgue. Tout alors est réduit à prouver que les deux tribus $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ sont, en fait, *identiques*.

Soit donc H un ensemble appartenant à $\mathcal{F}$, et prouvons qu'il est mesurable au sens de Lebesgue. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe alors une fonction jauge δ telle que, pour toute partition δ–fine $((t_i, A_i))_{1\leq i\leq n}$ de [a, b], on ait

$$\left|\sum_{i=1}^{n} [I_H(t_i)\mu(A_i) - \mu(H \cap A_i)]\right| < \varepsilon.$$

Posons

$$U = \bigcup_{x\in H} V(x), \text{ avec } V(x) = [a, b] \cap]x - \delta(x), x + \delta(x)[.$$

Considérons un ensemble B de la forme $B = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, où $(A_i)_{1\leq i\leq k}$ est une suite finie d'intervalles disjoints, telle que, pour chaque i, on ait $A_i \subset V(t_i)$, avec $t_i \in H$. En appliquant à la fonction $f = I_H$ le Théorème 3.2 de [10(iii)], on trouve

$$\mu(B) - \mu(B \cap H) = \sum_{i=1}^{k}[\mu(A_i) - \mu(A_i \cap H)] \leq 2\varepsilon.$$

D'autre part, on a $H \subset U$, et U est la réunion d'une suite croissante $\{B_n\}$ d'ensembles dont chacun est de la forme considérée ci-dessus. On a donc $\mu(U) - \mu(H) \leq 2\varepsilon$, de sorte que $\mu(H)$ coïncide avec la mesure extérieure de H au sens de Lebesgue. En appliquant ce résultat à l'ensemble $[a, b] \setminus H$, on trouve que $\mu(H)$ coïncide aussi avec la mesure intérieure de H, ce qui achève la démonstration.

5. Quelques généralisation possibles

Les intégrales M et HK peuvent être généralisées immédiatement aux intégrales du type

$$\int_a^b f\, d\alpha$$

où f est une fonction vectorielle définie dans l'intervalle [a, b], et α est une fonction additive vectorielle définie dans la classe des sous-intervalles compacts de [a, b]. De façon plus précise, étant donnés trois espaces vectoriels topologiques E, F, G et une fonction bilinéaire $B : E \times F \to G$, on peut prendre la fonction f à valeurs dans E, la fonction d'intervalle α à valeurs dans F et interpréter l'écriture $f(x)\alpha(A)$ comme

$$f(x)\alpha(A) = B(f(x), \alpha(A)).$$

Une première étude de ces intégrales dans le cadre de Riemann-Lebesgue a été entreprise par Bartle [1]. Les propriétés détaillées de ce genre d'intégrales dans le cadre d'intégrales M et HK restent à étudier; les travaux récents de Gordon, Fremlin et Mendoza ([4], [5]) s'occupent du cas où E est un espace de Banach, $F = \mathbb{R}$, $G = E$ et $B : E \times \mathbb{R} \to E$ est donnée simplement par l'opération de multiplication d'un vecteur par un nombre réel et α est la longueur usuelle. Parmi les résultats principaux dans ce cadre on a les énoncés suivants :

(i) f est Bochner-intégrable $\Rightarrow$ f est M-intégrable ([5])
(ii) f est M-intégrable $\Rightarrow$ f est Pettis-intégrable ([4(i)])
(iii) f est Pettis-intégrable et fortement mesurable $\Rightarrow$ f est M-intégrable ([5])
(iv) f est M-intégrable $\Leftrightarrow$ f est HK-intégrable et Pettis-intégrable ([4(ii)]).

Les réciproques des énoncés (i), (ii), (iii) ne sont plus exactes (cf. [4], [5]). Comme indiqué à la fin du §3 le raisonnement de Davies et Schuss [2] donne également une preuve de l'énoncé (i) ci-dessus; on voit aussi de [2] comment on peut passer aux intégrales $\int_S f\, d\alpha$ étendues sur des espaces S plus généraux que [a, b].

Malheureusement, l'espoir d'obtenir une intégrale intéressante pour l'intégration stochastique, en prenant $E = F = L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, espace de toutes les variables aléatoires réelles muni de la topologie de la convergence en probabilités, est mince; déjà, l'intégrale stochastique très simple

$$\int_0^1 B\, dB$$

où B est un mouvement Brownien n'existe pas, ni selon HK, ni selon M (cf. McShane [10(iv)]). C'est pour inclure ce genre d'intégrale que McShane a introduit les "Ito-belated integrals" où les points t_i d'une partition $P = \{(A_i, t_i)\}$ sont pris à gauche des intervalles A_i, en plus d'une autre petite modification qui permet que la réunion des A_i

n'épuise pas complètement l'intervalle [a, b]. Néanmoins la théorie moderne des intégrales stochastiques semble donner un développement beaucoup plus lisse et complet, tout au moins dans le cas de domaines d'intégration dans $\mathbb{R}$; la position du problème de l'intégration stochastique dans des domaines plus généraux (même dans le cas des domaines dans $\mathbb{R}^n$ – situation rencontrée dans la théorie des processus stochastiques multiparamétrés) est encore peu satisfaisante.

6. Quelques remarques historiques

Nous ne pouvons même pas esquisser la longue histoire des recherches qui avaient comme objectif la reconstruction de f à partir de f ' et qui ont abouti aux travaux de Denjoy, Perron, Khintchine, Lusin, Ward et bien d'autres; une excellente description est donnée dans le livre de Saks [15] (cf. aussi Pesin [12]); nous ne pouvons pas non plus retracer les efforts nombreux pour représenter l'intégrale de Lebesgue d'une fonction comme une limite des sommes de Riemann (cf. [12], p. 103). L'intégrale HK donne une solution simple et élégante aux deux problèmes ci-dessus; elle apparaît pour la première fois dans un article de Kurzweil de 1957 sur les équations différentielles ordinaires; cette théorie est redécouverte indépendamment par Henstock et développée en détail par ce dernier dès 1960 (cf. le récent livre de Henstock [6] qui contient de nombreuses références). Dans les travaux de Henstock et Kurzweil, les partitions utilisées sont toutes celles que nous avons appelées riemanniennes, c'est-à-dire si la partition est $\{(A_1, t_1), \ldots, (A_n, t_n)\}$ alors $t_i \in A_i$ pour tout i; l'idée de permettre les t_i en dehors des A_i apparaît pour la première fois dans un article de Botts et McShane de 1952 (cf. [10(i)]). Une théorie d'une très grande généralité est donnée dans l'article de McShane [10(ii)]; ici, l'on envisage les limites des sommes de type $\sum_{i=1}^{n} U(A_i, t_i)$ où $\{(A_i, t_i)\}$ est une partition d'un type général d'un espace S quelconque et $U(A, t)$ prend ses valeurs dans un semi-groupe muni d'une notion de limite appropriée; $U(A, t)$ n'es pas nécessairement de la forme $f(t)\mu(A)$ – ce qui permet la possibilité d'englober les intégrales "non additives" étudiées d'abord par Burkill (pour les besoins de la théorie de mesures superficielles cf. Saks [15] p. 165). McShane montre dans [10(ii)] que sa théorie englobe aussi bien plusieurs intégrales classiques (comme celles de HK, Pettis, Bochner etc.) que l'intégrale stochastique de Ito; il semble que l'étude de l'intégrale stochastique était une motivation forte pour McShane (cf. aussi son livre [10(iv)]). Malgré la grande généralité de la théorie donnée dans [10(ii)], elle ne semble pas avoir eu une très grande influence ni sur le développement de l'intégrale stochastique ni sur la théorie des autres intégrales. En fait les travaux de Bichteler, Dellacherie, Meyer, Letta et d'autres (dès 1979) ont montré que l'intégrale stochastique la plus générale (sur un intervalle linéaire) peut être englobée d'une manière élégante sous un théorème de représentation de Riesz stochastique (cf. Letta [7], Protter [14], Dellacherie-Meyer [3] p. 401, pour des exposés détaillés); de plus, ce genre d'intégrale stochastique $\int_0^1 H\, dX$ (où H est un processus prévisible et X est une semimartingale) peut aussi être étudiée comme une intégrale par rapport à une mesure "vectorielle" stochastique (comme montré dans les travaux antérieurs de Métivier et Pellaumail cf. leur ouvrage [8]). Ainsi, la théorie proposée par McShane dans [10(ii)] n'a pas eu de succès auprès des probabilistes, même si son utilisation future dans une intégration stochastique multiparamétrée n'est pas à exclure définitivement. L'intégrale M était proposée par McShane dans un article pédagogique [10(iii)] où il indique, mais ne démontre pas en détail, que l'intégrale M est équivalente à celle de Lebesgue; il pense que cette façon d'introduire l'intégrale de Lebesgue est très utile pour l'enseignement et il écrit un long ouvrage [10(v)] pour démontrer en détail les vertus de son procédé. Le livre récent de Pfeffer [13] présente la théorie des intégrales M et HK par rapport aux fonctions d'intervalles quelconques dans $\mathbb{R}^n$; cette exposition soigneuse n'utilise aucune connaissance préalable de la théorie d'intégration et arrive à montrer en détail que la théorie M est exactement équivalente à celle de Lebesgue-Carathéodory et que la théorie HK correspond à celle de Perron-Ward; elle montre en plus l'efficacité de la théorie HK pour les théorèmes de dérivation en général, spécialement pour les théorèmes de type divergence.

N.B. Je suis particulièrement reconnaissant envers un rapporteur anonyme qui a soigneusement amélioré ma rédaction initiale des sections 3 et 4; il a aussi contribué à la section 4, un argument supplémentaire permettant d'établir que la mesure μ donnée par la théorie de Daniell *coïncide* avec la mesure de Lebesgue, alors que dans ma rédaction originale on voyait seulement que μ prolongeait la mesure de Lebesgue.

Bibliographie

[1] R.-G. Bartle
"A general bilinear vector integral", Studia Math. 15, 337-352 (1956).

[2] R.O. Davies et Z. Schuss
"A proof that Henstock's integral includes Lebesgue's", J. London Math. Soc. (2) 2, 561-562 (1970).

[3] C. Dellacherie et P.-A. Meyer
"Probabilités et Potentiel" Chapitres V à VIII. Hermann, Paris (1980).

[4] D.H. Fremlin
(i) (with J. Mendoza) "On the integration of vector-valued functions", Illinois J. Math. 38, 127-147 (1994)
(ii) "The Henstock and McShane integrals of vector-valued functions", Illinois J. Math. 38, 471-479 (1994).

[5] R.A. Gordon
"The McShane integral of Banach-valued functions", Illinois J. Math. 34, 557-567 (1990).

[6] R. Henstock
"The general theory of integration". Clarendon Press, Oxford (1991).

[7] G. Letta
"Martingales et intégration stochastique". Scuola Normale Superiore, Pisa (1984).

[8] M. Métivier et J. Pellaumail
"Stochastic integration". Academic Press, New York (1980).

[9] R.M. McLeod
"The generalized Riemann integral". The Mathematical Association of America (1980).

[10] E.J. McShane
(i) (with T.A. Botts) "A modified Riemann-Stieltjes integral", Duke Math. J. 19, 293-302 (1952)
(ii) "A Riemann-type integral that includes Lebesgue-Stieltjes, Bochner and stochastic integrals", Memoirs of the Amer-Math. Soc. Nov. 88 (1969).
(iii) "A unified theory of integration", Amer. Math. Monthly 80, 349-359 (1973)
(iv) "Stochastic calculus and stochastic models". Academic Press, New York (1974)
(v) "Unified integration". Academic Press, New York (1983).

[11] J. Neveu
"Bases mathématiques du calcul des probabilités". Masson, Paris (1964).

[12] I.N. Pesin
"Classical and modern integration theories" (translated and edited by S. Kotz). Academic Press, New York (1970).

[13] W.F. Pfeffer
"The Riemann approach to integration". Cambridge University Press (1993).

[14] P. Protter
"Stochastic integration and differential equations". Springer-Verlag, Berlin (1990).

[15] S. Saks
"Theory of the integral". Dover, New York (1964)

Professeur S.D. Chatterji
Département de Mathématiques
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
CH-1015 Lausanne
Switzerland