P. Cartier

Radicaux des algèbres de Lie

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 7 bis, p. 10-15
<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A11_0>

Séminaire "Sophus LIE"
E.N.S., 1954/55
-:-:-:-

Exposé 7 Bis

RADICAUX DES ALGÈBRES DE LIE

1.- Radicaux des algèbres associatives.

Nous allons rappeler tout d'abord quelques définitions et résultats pas toujours classiques sur les radicaux des algèbres associatives avec élément unité.

On appelle tout d'abord radical d'une algèbre A avec unité l'idéal bilatère $\mathfrak{a}$ de A défini par l'une des conditions suivantes équivalentes :

1) $\mathfrak{a}$ est l'intersection des annulateurs de tous les A-modules simples à gauche (de rang fini ou non sur le corps de base K)

2) $\mathfrak{a}$ est l'intersection de tous les idéaux à gauche maximaux de A .

3) $\mathfrak{a}$ est l'ensemble des éléments a de A tels que pour tout $x \in A$, $1 - ax$ soit inversible à gauche.

1') 2') 3') conditions analogues obtenues en remplaçant gauche par droite.

Supposons alors que A soit une algèbre de rang fini sur K et soit M un A-module fidèle de rang fini sur K (exemple : $M = A$ muni de la représentation régulière gauche) ; soit $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_n = (0)$ une suite de Jordan-Hölder du A-module M . D'après le théorème de Jordan-Hölder, les quotients successifs d'une suite de Jordan-Hölder de M^p sont les M_i/M_{i+1} chacun répétés p fois ; si N est un A-module simple, il est monogène donc c'est un module quotient du A-module à gauche A , mais si A est de rang s sur K , il est clair que le A-module à gauche A est contenu dans M^s donc que N est isomorphe à un quotient d'un sous-module de M^s , donc d'après le théorème de Jordan-Hölder, il est isomorphe à un des M_i/M_{i+1} .

On en déduit que les éléments du radical de A sont caractérisés par les conditions $a.M_i \subset M_{i+1}$ d'où l'on déduit immédiatement que le produit de n éléments quelconques du radical de A est nul, autrement dit que le radical est un idéal nilpotent de A (Hopkins)

2.- Définition des radicaux dans une algèbre de Lie.

Le corps K est quelconque mais $\mathfrak{g}$ est de dimension finie.

Rappelons qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite résoluble si une de ses algèbres dérivées est nulle et qu'elle est nilpotente si $ad\ x$ est nilpotent pour tout x .

Lemme 1 : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{S}$ une sous-algèbre et $\mathfrak{h}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est résoluble, il en est de même de $\mathfrak{S}$ et de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et réciproquement si $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sont résolubles, il en est de même de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sont nilpotentes et réciproquement si $\mathfrak{h}$ est dans le centre de $\mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ soit nilpotente, il en est de même de $\mathfrak{g}$.

La n-ième algèbre dérivée de $\mathfrak{S}$ étant contenue dans la n-ième algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$, on voit que $\mathfrak{S}$ est résoluble si $\mathfrak{g}$ l'est ; d'autre part, par récurrence sur n , on voit que la n-ième algèbre dérivée de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est l'image de la n-ième algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$, donc $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est résoluble si $\mathfrak{g}$ l'est. Enfin si $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sont résolubles, la p-ième algèbre dérivée de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est nulle, ce qui signifie que la p-ième algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$ est contenue dans $\mathfrak{h}$, puis si la q-ième algèbre dérivée de $\mathfrak{h}$ est nulle que la $(p+q)$-ième algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$ est nulle.

Si $ad_{\mathfrak{g}}\, x$ est nilpotent pour tout $x \in \mathfrak{g}$, comme $ad_{\mathfrak{S}}\, x$ est la restriction à $\mathfrak{S}$ de $ad_{\mathfrak{g}}\, x$ pour $x \in \mathfrak{S}$, et que $ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}\, \dot{x}$ s'obtient par passage au quotient ($\dot{x}$ est la classe de x mod $\mathfrak{h}$) , on voit que $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sont nilpotentes. Supposons réciproquement que $\mathfrak{h}$ soit dans le centre de $\mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ soit nilpotente ; pour $x \in \mathfrak{g}$, $ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}\, \dot{x}$ est nilpotent donc $ad^n_{\mathfrak{g}}\, x \cdot \mathfrak{g} \subset \mathfrak{h}$ et par suite comme $ad\ x \cdot \mathfrak{h} = (0)$ on a $ad^{n+1} x = 0$ donc $\mathfrak{g}$ est nilpotente.

Corollaire : toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ possède un plus grand idéal résoluble.

En effet soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{L}$ deux idéaux résolubles de $\mathfrak{g}$; $\mathfrak{a} + \mathfrak{L}/\mathfrak{L} \simeq \mathfrak{a}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{L}$ est résoluble donc $\mathfrak{a} + \mathfrak{L}$ est résoluble d'après le lemme 1 . Par suite la somme d'un nombre fini d'idéaux résolubles est un idéal résoluble et comme $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, la somme de tous les idéaux résolubles est déjà la somme d'un nombre fini d'entre eux et c'est évidemment le plus grand idéal résoluble de $\mathfrak{g}$.

Il est un peu moins facile de prouver l'existence d'un plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. On va pour cela s'appuyer sur le lemme suivant :

Lemme 2 : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{h}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, M un $\mathfrak{g}$-module de rang fini sur K , E l'algèbre d'opérateurs de M engendrée par 1 et les

<u>éléments de</u> $\rho(\mathfrak{g})$. <u>Alors les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

1) <u>pour tout</u> $x \in \mathfrak{h}$, $\rho(x)$ <u>est nilpotent</u> ; 2) $\rho(\mathfrak{h})$ <u>est contenue dans le radical de</u> E .

Le théorème de Hopkins montre que 2) implique 1) ; réciproquement supposons la condition 1) vérifiée et soit M_i une suite de Jordan-Hölder de M considéré comme $\mathfrak{g}$-module . Posons $N_i = M_i/M_{i+1}$, c'est un $\mathfrak{g}$-module et tous les éléments de $\mathfrak{h}$ donnent évidemment des opérateurs nilpotents dans N_i ; d'après le théorème de Engel, le sous-espace $P \subset N_i$ des invariants de $\mathfrak{h}$ est non nul, mais il est invariant par $\mathfrak{g}$, car si $\rho(a)n = 0$ pour tout $a \in \mathfrak{h}$ on a $\rho(a)\,\rho(g)n = \rho([a,g])n + \rho(g)\,\rho(a)n = 0$ donc $\rho(g)n \in P$. Comme N_i est un $\mathfrak{g}$-module simple, on a $P = N_i$ donc $\mathfrak{h}$ annule N_i et $\rho(\mathfrak{h})M_i \subset M_{i+1}$ ce qui démontre que $\rho(\mathfrak{h})$ est dans le radical de E .

<u>Corollaire</u> : <u>Si</u> $\mathfrak{g}$ <u>est une algèbre de Lie et</u> E <u>l'algèbre d'opérateurs engendrée par les</u> ad x , <u>l'ensemble</u> $\mathfrak{n}$ <u>des</u> $g \in \mathfrak{g}$ <u>tels que</u> ad g <u>soit dans le radical de</u> E <u>est le plus grand idéal nilpotent de</u> $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{n}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ car le radical de E en est un idéal bilatère ; le théorème de Hopkins montre que ad g est nilpotent pour tout $g \in \mathfrak{n}$, donc $\mathfrak{n}$ est une algèbre nilpotente. Inversement si $\mathfrak{n}'$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ et si $n \in \mathfrak{n}'$, on a $\mathrm{ad}^k n.\mathfrak{n}' = (0)$ et $\mathrm{ad}\, n.\mathfrak{g} \subset \mathfrak{n}'$ puisque $\mathfrak{n}'$ est un idéal donc ad n est nilpotent <u>dans</u> $\mathfrak{g}$, ce qui d'après le lemme prouve que ad n est dans le radical de E et que $\mathfrak{n}' \subset \mathfrak{n}$.

<u>Définition</u> : <u>Etant donnée une algèbre de Lie</u> $\mathfrak{g}$, <u>on appelle radical et on note</u> $\mathfrak{r}$ <u>le plus grand des idéaux résolubles de</u> $\mathfrak{g}$, <u>on appelle plus grand idéal nilpotent et on note</u> $\mathfrak{n}$ <u>l'idéal défini dans le corollaire précédent et on appelle enfin radical nilpotent et on note</u> $\mathfrak{s}$ <u>l'intersection des annulateurs de tous les</u> $\mathfrak{g}$<u>-modules simples de rang fini sur</u> K .

3.- <u>Propriétés élémentaires des radicaux.</u>

<u>Proposition 1</u> : <u>Le radical</u> $\mathfrak{r}$ <u>d'une algèbre de Lie</u> $\mathfrak{g}$ <u>est le plus petit idéal de</u> $\mathfrak{g}$ <u>tel que</u> $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ <u>soit semi-simple ; le radical nilpotent de</u> $\mathfrak{g}$ <u>est le plus petit idéal de</u> $\mathfrak{g}$ <u>tel que</u> $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}$ <u>soit réductive.</u> $\mathfrak{s}$ <u>est aussi le plus grand idéal de</u> $\mathfrak{g}$ <u>tel que pour toute représentation</u> (ρ , M) <u>de</u> $\mathfrak{g}$, $\rho(a)$ <u>soit nilpotent pour tout</u> $a \in \mathfrak{s}$.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ et supposons $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ semi-simple ; l'image de $\mathfrak{r}$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ est l'idéal résoluble $\mathfrak{r}+\mathfrak{a}/\mathfrak{a}$ qui doit être nul puisque $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ est semi-simple, donc $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{a}$; réciproquement $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ est semi-simple car si $\mathfrak{r}'/\mathfrak{r}$ est le radical de $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ est extension de $\mathfrak{r}'/\mathfrak{r}$ par $\mathfrak{r}$ qui sont toutes deux résolubles et $\mathfrak{r}$ est résoluble donc $\mathfrak{r}' \subset \mathfrak{r}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ est semi-simple. Si maintenant $\mathfrak{a}$ contient $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}/\mathfrak{r} / \mathfrak{a}/\mathfrak{r}$ qui est semi-simple comme algèbre quotient d'une algèbre semi-simple.

$\mathfrak{g}/\mathfrak{s}$ est évidemment réductive car les représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$ et de $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}$ sont en correspondance biunivoque, une telle représentation étant nulle sur $\mathfrak{s}$. Le quotient d'une algèbre réductive étant aussi réductive, $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ est réductive si $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{s}$. Inversement supposons $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ réductive ; si un élément de $\mathfrak{g}$ est annulé dans toute représentation irréductible de $\mathfrak{g}$, sa classe mod $\mathfrak{a}$ est annulée dans toute représentation irréductible de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ donc nulle et l'élément de $\mathfrak{g}$ en question est dans $\mathfrak{a}$ ce qui prouve $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{a}$.

D'après le lemme 2 , dire que tous les éléments d'un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ sont représentés par des opérateurs nilpotents dans toute représentation de rang fini signifie que $\rho(\mathfrak{a})$ est contenu dans le radical de l'algèbre d'opérateurs E engendrée par $\rho(\mathfrak{g})$. Il en est bien ainsi si $\mathfrak{a}$ est annulé par toute représentation irréductible d'après la caractérisation du radical de E donnée en 1 . Réciproquement si M est un $\mathfrak{g}$-module simple, la représentation de E dans M est irréductible et fidèle donc le radical de E est nul et $\rho(\mathfrak{a}) = (0)$. En résumé la condition énoncée sur $\mathfrak{a}$ équivaut à $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$.

<u>Corollaire</u> : <u>on a les inclusions</u> $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{n} \supset \mathfrak{s}$

<u>Proposition 2</u> : <u>Soit</u> $\mathfrak{g}$ <u>et</u> $\mathfrak{g}'$ <u>deux algèbres de Lie</u> f <u>un homomorphisme de</u> $\mathfrak{g}$ <u>sur</u> $\mathfrak{g}'$. <u>On a alors</u> $f(\mathfrak{r}) \subset \mathfrak{r}'$ $f(\mathfrak{n}) \subset \mathfrak{n}'$ $f(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{s}'$; <u>on a même</u> $f(\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}'$ <u>si le noyau</u> $\mathfrak{h}$ <u>de</u> f <u>est contenu dans</u> $\mathfrak{r}$, $f(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}'$ si $\mathfrak{h}$ est dans le centre de $\mathfrak{g}$ et $f(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s}'$ si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{s}$.

En effet puisque f applique $\mathfrak{g}$ <u>sur</u> $\mathfrak{g}'$ l'image de tout idéal de $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}'$, en particulier $f(\mathfrak{r})$ est un idéal résoluble de $\mathfrak{g}'$ donc $f(\mathfrak{r}) \subset \mathfrak{r}'$ et $f(\mathfrak{n})$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}'$ donc $f(\mathfrak{n}) \subset \mathfrak{n}'$. Si $\mathfrak{h}$ est contenu dans $\mathfrak{r}$, $f^{-1}(\mathfrak{r}')$ est extension d'une algèbre résoluble par une algèbre résoluble et est donc résoluble donc contenu dans $\mathfrak{r}$, donc $f(\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}'$. Si $\mathfrak{h}$ est dans le centre de $\mathfrak{g}$, $f^{-1}(\mathfrak{n})$ est extension centrale d'une algèbre nilpotente donc nilpotente et $f^{-1}(\mathfrak{n}') \subset \mathfrak{n}$ donc $f(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}'$. Si un élément de $\mathfrak{g}$ est annulé dans toute représentation irréductible de $\mathfrak{g}$, il sera annulé dans les représentations de $\mathfrak{g}$ que l'on déduit des représentations irréductibles de $\mathfrak{g}'$ donc $f(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{S}'$. Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{S}$, toute représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ s'annule sur $\mathfrak{h}$ donc définit par passage au quotient une représentation de $\mathfrak{g}'$ donc $\mathfrak{S} = f^{-1}(\mathfrak{S}')$.

<u>Proposition 3 : Si $\mathfrak{g}$ est le produit des algèbres $\mathfrak{g}_i$, chaque radical de $\mathfrak{g}$ est le produit des radicaux correspondants des $\mathfrak{g}_i$.</u>

D'après la proposition 2, la projection sur $\mathfrak{g}_i$ d'un des radicaux de $\mathfrak{g}$ est contenu dans le radical de même espèce de $\mathfrak{g}_i$ donc chacun des radicaux de $\mathfrak{g}$ est contenu dans le produit des radicaux correspondants des $\mathfrak{g}_i$. Si nous identifions les $\mathfrak{g}_i$ à des idéaux de $\mathfrak{g}$, la démonstration de la proposition sera achevée si nous montrons que chacun des radicaux de $\mathfrak{g}_i$ est contenu dans le radical correspondant de $\mathfrak{g}$. Or $\mathfrak{r}_i$ est un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$ donc contenu dans $\mathfrak{r}$, tandis que $\mathfrak{n}_i$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ donc contenu dans $\mathfrak{n}$; de plus toute représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ est semi-simple quand on la restreint à $\mathfrak{g}_i$, car si (ρ, M) est une telle représentation de $\mathfrak{g}$ et que N est un sous-espace invariant par $\mathfrak{g}_i$ minimal, on obtient un sous-espace invariant minimal pour $\mathfrak{g}_i$ par l'application d'un opérateur $\rho(g_j)$ si $g_j \in \mathfrak{g}_j$ pour $j \neq i$ (noter que $\mathfrak{g}_i$ et $\mathfrak{g}_j$ commutent) et par suite la somme des sous-espaces de M invariants pour $\mathfrak{g}_i$ minimaux est invariante par $\mathfrak{g}$, donc égale à M. Il résulte de ceci que $\mathfrak{S}_i$ étant annulé dans toute représentation semi-simple de $\mathfrak{g}_i$ est annulé dans (ρ, M) et par suite que $\mathfrak{S}_i \subset \mathfrak{S}$.

C.Q.F.D.

4.- <u>Critère de Cartan pour les algèbres résolubles.</u>

<u>Théorème : Le radical nilpotent $\mathfrak{S}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est égal à $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{r}$. Le radical $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}$ est l'orthogonal de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ pour la forme de Killing.</u>

Comme $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}$, il résulte de la prop.2 que le radical de $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ est égal à $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$. Il est clair que $\mathfrak{r}'$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{g}'$ donc $\mathfrak{g}'$ est réductive puisque le quotient de $\mathfrak{g}'$ par son centre étant une algèbre quotient de $\mathfrak{g}'/\mathfrak{r}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ est semi-simple et la représentation adjointe de $\mathfrak{g}'$ est complètement réductible. Il résulte de ceci et de la prop. 1 que $\mathfrak{S} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{r}$. $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}/\mathfrak{S}$ est réductive donc $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \cap \mathfrak{z} = (0)$ si $\mathfrak{z}$ est le centre de $\mathfrak{h}$; mais $\mathfrak{z}$ est aussi le radical de $\mathfrak{h}$ donc $\mathfrak{z} = \mathfrak{r}/\mathfrak{S}$ et ceci prouve que

$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{r} \subset \mathfrak{S}$ et par suite la première affirmation du théorème est démontrée.

Le lemme 2, appliqué à la représentation adjointe, montre que pour tout $n \in \mathfrak{n}$ et tout $g \in \mathfrak{g}$ ad n∘ad g est dans le radical de E donc nilpotent et par suite $B(n , g) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, n \circ \mathrm{ad}\, g) = 0$ et par suite $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{g}$ sont orthogonales pour la forme de Killing B . On a donc $B(\mathfrak{S}, \mathfrak{g}) = B([\mathfrak{g}, \mathfrak{r}], \mathfrak{g}) = B(\mathfrak{r}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$ puisque B est une forme quadratique invariante sur $\mathfrak{g}$, ce qui montre que $\mathfrak{r}$ et $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ sont orthogonales. Si $\mathfrak{r}'$ est l'orthogonal de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, on a donc $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{r}'$; mais la prop. 10 de l'exposé 6 montre que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}']$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ donc $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}'] \subset \mathfrak{n}$ et a fortiori $[\mathfrak{r}', \mathfrak{r}'] \subset \mathfrak{n}$ ce qui prouve que $[\mathfrak{r}', \mathfrak{r}']$ puis que $\mathfrak{r}'$ est résoluble. Comme $\mathfrak{r}'$ est un idéal, il est donc contenu dans $\mathfrak{r}$ et la démonstration est achevée.

<u>Corollaire 1</u> : <u>Pour que l'algèbre de Lie</u> $\mathfrak{g}$ <u>soit résoluble, il faut et il suffit que la forme trilinéaire</u> $B(x, [y , z])$ <u>soit identiquement nulle</u>.

En effet, $\mathfrak{g}$ résoluble signifie $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}$, donc d'après le théorème que $\mathfrak{g}$ est l'orthogonal de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

<u>Corollaire 2</u> : <u>Toute dérivation de</u> $\mathfrak{g}$ <u>applique</u> $\mathfrak{r}$ <u>dans</u> $\mathfrak{n}$ <u>et</u> $\mathfrak{S}$ <u>dans</u> $\mathfrak{S}$.

Formons le produit croisé de $\mathfrak{g}$ avec son algèbre des dérivations $\mathfrak{d}$ soit $\mathfrak{h}$ ($\mathfrak{h}$ est l'"holomorphe" de $\mathfrak{g}$) . On a alors $[D , x] = D.x$ si $x \in \mathfrak{g}$ et si D est une dérivation de $\mathfrak{g}$. Le lemme 2 de l'exposé 5 montre alors que $[\mathfrak{d}, \mathfrak{r}]$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{h}$ et comme il est contenu dans $\mathfrak{g}$ on a $[\mathfrak{d}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{n}$ ce qui prouve que toute dérivation applique $\mathfrak{r}$ dans $\mathfrak{n}$. Comme $\mathfrak{S} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$, il est alors clair que toute dérivation applique $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{S}$.