F. Bruhat

Poids et racines, II

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. nº 10, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A14_0>

Exposé n° 10

POIDS ET RACINES, II

(Exposé de F. BRUHAT, le 25.1.55).

1.- Séries de racines.

K est toujours un corps algébriquement clos de caractéristique 0 , $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple dont $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan fixée une fois pour toutes.

$\alpha \neq 0$ est une racine fixe dans la suite. Une famille S de racines composée de l'ensemble des racines de la forme $\varphi + k\alpha$ (k entier de signe quelconque) est appelée une série (ou une "α-série"). En vertu de la formule $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$ le sous-espace $\sum_{\alpha \in S} \mathfrak{g}^{\alpha} = \mathfrak{g}_S$ est invariant par $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}^{\alpha}$ $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}^{-\alpha}$ et $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}$. Soit $E_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha}$, $E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ deux éléments $\neq 0$; on suppose de plus que $\langle E_{\alpha}, E_{-\alpha}\rangle = -1$ d'où $[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = -H'_{\alpha}$ $[H'_{\alpha}, E_{\alpha}] = \langle\alpha,\alpha\rangle E_{\alpha}$ $[H'_{\alpha}, E_{-\alpha}] = -\langle\alpha,\alpha\rangle E_{-\alpha}$.

Ceci nous conduit à étudier les représentations d'une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ ayant une base X,Y,H avec les relations de structure $[X,Y] = -H$ $[H,X] = aX$ $[H,Y] = -aY$ (avec $a > 0$). $\mathfrak{a}$ est simple : en effet si un idéal $\mathfrak{J}$ contient un élément $Z \neq 0$ qui n'est pas un multiple de H $[H,Z] \in \mathfrak{J}$ est une combinaison linéaire $\neq 0$ de X et Y . Appliquant soit adX soit adY suivant les cas on trouve un multiple de $[X,Y] = -H$ donc $H \in \mathfrak{J}$ mais alors $X = \frac{1}{a}[H,X] \in \mathfrak{J}$ $Y = -\frac{1}{a}[H,Y] \in \mathfrak{J}$ et $\mathfrak{a} = \mathfrak{J}$. Donc toute représentation de $\mathfrak{a}$ est complètement réductible et il suffit d'étudier les représentations irréductibles de $\mathfrak{a}$.

On appelle $\mathfrak{V}$ la droite engendrée par H et on définit une forme linéaire sur $\mathfrak{V}$ par $\alpha(H) = a$. Soit (ρ, V) une représentation de dimension finie de $\mathfrak{a}$; on posera $\rho(X) = X$, etc... et $V_{\Lambda} = V(H, \Lambda(H))$ pour toute forme linéaire Λ sur $\mathfrak{V}$. On a $X.V_{\Lambda} \subset V_{\Lambda+\alpha}$ car si $e \in V_{\Lambda}$

$$HXe = XHe + aXe = (\Lambda(H) + a)(Xe) = \langle\Lambda + \alpha, H\rangle Xe$$

De même $Y.V_{\Lambda} \subset V_{\Lambda-\alpha}$. Or il existe au moins un vecteur propre pour H donc un $V_{\Lambda} \neq (0)$. Mais des formules $XV_{\Lambda} \subset V_{\Lambda+\alpha}$ $YV_{\Lambda} \subset V_{\Lambda-\alpha}$ on déduit que

$\sum_{\Lambda} V_{\Lambda}$ est un sous-espace invariant $\neq 0$ de V donc $V = \sum_{\Lambda} V_{\Lambda}$ si la représentation est irréductible. Si elle n'est pas irréductible, elle est complètement réductible et on a encore $V = \sum_{\Lambda} V_{\Lambda}$ dans ce cas.

Etudions le cas de V irréductible. Soit parmi les poids Λ de V, Λ_0 celui pour lequel $\Lambda_0(H)$ est maximum. Comme $\alpha(H) = a > 0$ $\Lambda_0 + \alpha$ n'est plus un poids et si $e_0 \in V_{\Lambda_0}$ $Xe_0 = 0$. Posons $e_k = Y^k e_0$; j'affirme que $Xe_{k+1} = \mu_k e_k$. En effet c'est vrai pour $k = -1$ si $\mu_{-1} = 0$ $e_{-1} = 0$; supposons cette formule vraie pour $k < r$ alors

$$\begin{aligned} Xe_{r+1} &= XYe_r = YXe_r - He_r = \mu_{r-1} Ye_{r-1} - \langle \Lambda_0 - r\alpha, H\rangle e_r \\ &= \mu_r e_r \end{aligned}$$

avec $\mu_r = \mu_{r-1} + \langle r\alpha - \Lambda_0, H\rangle$ d'où immédiatement

$$\begin{aligned} \mu_k = \sum_{r=0}^{k} \langle r\alpha - \Lambda_0, H\rangle &= \frac{k+1}{2}(k\alpha(H) - 2\Lambda_0(H)) \\ &= \frac{k+1}{2}(k - m)\alpha(H) \end{aligned}$$

On a posé $m = 2\dfrac{\Lambda_0(H)}{\alpha(H)}$. Comme V est de dimension finie on a $e_J \neq 0$ $e_{J+1} = 0$ d'où $\mu_J e_J = Xe_{J+1} = 0$ $\mu_J = 0$ soit $m = J$ donc m est un entier $\geqslant 0$. Si l'on pose $f_k = (-1)^k e_k (m-k)!$ pour $0 \leqslant k \leqslant m$ on a les formules de transformation suivantes

$$X f_k = \tfrac{1}{2} k\alpha(H) f_{k-1} \qquad Y f_k = (m-k) f_{k+1}$$

$$H f_k = \langle \Lambda_0 - k\alpha, H\rangle f_k = \tfrac{1}{2}\alpha(H)(m-2k) f_k \qquad 0 \leqslant k \leqslant m$$

formules qui englobent le cas $k = 0$ et $k = m$. Comme V est irréductible et que les formules précédentes montrent que le sous-espace engendré par $f_0 \dots f_m$ est invariant les f_k forment une base de V. Réciproquement on vérifie facilement que les formules (2) définissent effectivement une représentation de $\mathfrak{a}$ dans un espace de base $f_0 \dots f_m$; cette représentation est irréductible car un sous-espace W invariant par H est engendré par les vecteurs de poids qu'il contient, donc $f_k \in W$ pour un certain k mais alors f_e est multiple de $X^{k-e} f_k$ pour $e \leqslant k$ et de $Y^{e-k} f_k$ pour $e \geqslant k$. Donc il n'y a pas de sous-espace invariant propre.

<u>Théorème 1</u>.- <u>Soit</u> (ρ, V) <u>une représentation de dimension finie de l'algèbre simple</u> $\mathfrak{a}$. <u>Elle jouit des propriétés suivantes</u> :

1) $V = \sum_{\Lambda} V_{\Lambda}$; <u>pour tout poids</u> Λ <u>de</u> V $2\frac{\Lambda(H)}{\alpha(H)}$ <u>est un entier</u>

2) <u>L'ensemble des poids de</u> V <u>est une</u> α -<u>série d'extrêmités</u> $\Lambda_0, -\Lambda_0$ <u>et</u> "<u>sans trous</u>".

3) <u>Si</u> Λ <u>est un poids, il existe un poids</u> Λ' <u>tel que</u> $\Lambda(H) = -\Lambda'(H)$ <u>et</u> $\dim V_{\Lambda} = \dim V_{\Lambda'}$

4) <u>Si</u> Λ <u>et</u> $\Lambda+\alpha$ <u>sont des poids</u> $\rho(X)\, V_{\Lambda} \neq 0$. <u>De même si</u> Λ <u>et</u> $\Lambda-\alpha$ <u>sont des poids</u> $\rho(Y)\, V_{\Lambda} \neq 0$.

5) <u>Si</u> V <u>est irréductible et que</u> i <u>soit le plus petit entier tel que</u> $\rho(X)^{i+1} v = 0$ $(v \in V_{\Lambda})$ <u>et</u> j <u>le plus petit entier tel que</u> $\rho(Y)^{j+1} v = 0$ alors $\rho(X)\,\rho(Y)\, v = \frac{1}{2}(i+1)\, j\, \alpha(H) v$

Il est clair qu'il suffit de démontrer ces assertions lorsque V est irréductible car toute représentation de $\mathfrak{a}$ est complètement réductible. On a démontré que $2\frac{\Lambda_0(H)}{\alpha(H)}$ est un entier. D'autre part $f_0 \in V_{\Lambda_0}$ donc $f_k \in V_{\Lambda_0 - k\alpha}$ donc l'ensemble des poids est Λ_0 , $\Lambda_0-\alpha \dots$ $\Lambda_0 - m\alpha$ mais $2\frac{\Lambda_0(H)}{\alpha(H)} = m$ donc $\Lambda_0 - m\alpha = -\Lambda_0$. De plus $\Lambda_0 - k\alpha = -(\Lambda_0 - (m-k)\alpha)$ pour la même raison. Enfin si $\Lambda = \Lambda_0 - k\alpha$ $2\frac{\Lambda(H)}{\alpha(H)} = m - 2k$ est un entier. Compte tenu de ce que les V_{Λ} sont de dimension 1 ceci démontre 1), 2), 3).

Si $\Lambda+\alpha$ est un poids, c'est que $\Lambda = \Lambda_0 - k\alpha$ avec $k \geqslant 1$ mais alors $\rho(X)\, f_k \neq 0$ et $f_k \in V_{\Lambda}$. De même si $\Lambda - \alpha$ est un poids c'est que $k \leqslant m-1$ donc $\rho(Y)\, f_k \neq 0$. Ceci démontre 4). Enfin si $v \in V_{\Lambda}$ $\Lambda = \Lambda_0 - k\alpha$ le plus petit entier i tel que $\rho(X)^{i+1} v = 0$ est égal à k de même $j = m - k$ et les formules (1) montrent que

$$\rho(X)\,\rho(Y)\, f_k = (m-k)\,\rho(X)\, f_{k+1} = \tfrac{1}{2}\alpha(H)(k+1)(m-k)\, f_k$$
$$= \tfrac{1}{2}\alpha(H)(i+1) j\, f_k$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

On va appliquer le théorème à la représentation de la sous-algèbre $\{E_{\alpha}, E_{-\alpha}, H'_{\alpha}\}$ dans $\mathfrak{g}_S$. Pour l'appliquer remarquons que $\alpha(H'_{\alpha}) \neq 0$ donc que deux racines d'une α-série prennent des valeurs différentes pour H'_{α} donc que les racines φ d'une série sont repérées par $\varphi(H'_{\alpha}) = \langle \varphi, \alpha \rangle$

<u>Proposition 1</u>.- <u>Si</u> α, φ <u>sont deux racines de</u> $\mathfrak{g}$, $\alpha \neq 0$, <u>la</u> α-<u>série qui contient</u> φ <u>se compose exactement de l'ensemble des</u> $\varphi + k\alpha$ <u>avec</u>

$p \leqslant k \leqslant q$. De plus

$$-2\frac{\langle\varphi,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = p + q$$

La forme de la α-série résulte du théorème 1. De plus avec les notations du théorème 1 $\Lambda_0(H'_\alpha) = (\varphi + q\alpha)(H'_\alpha)$ $-\Lambda_0(H'_\alpha) = (\varphi + p\alpha)(H'_\alpha)$ d'où en additionnant

$$2\langle\varphi,\alpha\rangle + (p+q)\langle\alpha,\alpha\rangle = 0 \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Proposition 2.- $[\mathfrak{g}^\alpha,\mathfrak{g}^\beta] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$ si α , β , $\alpha+\beta$ sont 3 racines $\neq 0$. On sait que $[\mathfrak{g}^\alpha,\mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$ et $\dim \mathfrak{g}^{\alpha+\beta} = 1$. Le 4) du théorème 1 montre alors que $\operatorname{ad} E_\alpha . \mathfrak{g}^\beta \neq 0$.

Proposition 3.- Si α est une racine $\neq 0$, les seules racines proportionnelles à α sont 0 , $\pm\alpha$.

Tout d'abord l'ensemble des racines $m\alpha$, m entier de signe quelconque, forme une α-série "sans trous". Donc les m, tels que $m\alpha$ soit racine, forment un intervalle $[p,q]$. Mais $\operatorname{ad} E_\alpha \mathfrak{g}^\alpha = 0$ donc (4) du théorème 1), 2α n'est pas racine; De même $\operatorname{ad} E_{-\alpha} \mathfrak{g}^{-\alpha} = 0$ donc -2α n'est pas racine. On a donc $p = 1$ $q = -1$ car on sait que $-\alpha$ est racine.

Soit maintenant $\beta = c\alpha$ $(c \in K)$ une racine de $\mathfrak{g}$. On sait que $2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = 2c$ est un entier. Si c n'est pas entier $c = k + \frac{1}{2}$ et d'après la forme des α-séries, la α-série contenant β contient $\frac{1}{2}\alpha$ et $-\frac{1}{2}\alpha$. Mais α est un multiple entier de $\frac{1}{2}\alpha$ et α est racine ; ceci est donc interdit d'après la première partie de la démonstration.

2.- Systèmes de racines simples.

Nous noterons $\mathfrak{h}_0$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des H'_α ; $\mathfrak{h}_0$ est un espace vectoriel sur Q , contenu dans l'algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$. On désignera par $\mathfrak{h}_0^*$ le dual (sur Q) de $\mathfrak{h}_0$.

Proposition 4.- La dimension de $\mathfrak{h}_0$ sur K est égale à sa dimension sur Q . La restriction à $\mathfrak{h}_0$ de la forme de Killing $\langle H,H'\rangle$ est définie positive, à valeurs rationnelles. Sur $\mathfrak{h}_0$, toute racine prend des valeurs rationnelles.

Soit Δ l'ensemble des racines non nulles. Rappelons que l'on a :

$$\langle H,H'\rangle = \sum_{\varphi\in\Delta} \varphi(H)\,\varphi(H')$$

En particulier : $\langle H'_\alpha , H'_\alpha\rangle = \sum_{\varphi\in\Delta} \varphi(H'_\alpha)^2 = \sum_{\varphi\in\Delta} r^2_{\varphi,\alpha}(\langle\alpha,\alpha\rangle)^2$

et comme $\langle H'_\alpha , H'_\alpha \rangle = \langle \alpha,\alpha \rangle$, on en tire : $\langle \alpha,\alpha \rangle = \dfrac{1}{\sum_{\varphi\in\Delta} r^2_{\varphi,\alpha}} \in Q_+$.

On peut d'ailleurs avoir une évaluation plus précise de $\langle \alpha,\alpha \rangle$ en ayant recours à la proposition 1. Notons $p_{\varphi,\alpha}$, $q_{\varphi,\alpha}$ les entiers qui entrent dans l'énoncé de cette proposition. On a :

$$\varphi(H'_\alpha)^2 = \frac{(p_{\varphi,\alpha} + q_{\varphi,\alpha})^2}{4} \langle \alpha,\alpha \rangle$$

d'où :
$$\langle \alpha,\alpha \rangle = \Big(\sum_{\varphi\in\Delta} \frac{(p_{\varphi,\alpha} + q_{\varphi,\alpha})^2}{4}\Big)^{-1} .$$

Si $\beta \neq \alpha$, on a :

$$\langle H'_\alpha , H'_\beta \rangle = \langle \beta,\alpha \rangle = \frac{p_{\beta,\alpha} + q_{\beta,\alpha}}{-2} \langle \alpha,\alpha \rangle \in Q$$

puisque $\langle \alpha,\alpha \rangle \in Q$.

Alors, si $X \in \mathfrak{h}_0$, on a $X = \sum_{\alpha\in\Delta} a_\alpha H'_\alpha$ $(a_\alpha \in Q)$, donc

$$\beta(X) = \sum a_\alpha \beta(H'_\alpha) \in Q ,$$

ce qui prouve en passant la dernière partie de l'énoncé.

Mais de plus :

$$\langle X,X \rangle = \sum_{\beta\in\Delta} [\beta(X)]^2 \in Q_+ .$$

Si $\langle X,X \rangle = 0$, cela veut dire que $\beta(X) = 0$ pour toute $\beta \in \Delta$; nous avons vu (Exposé n° 9) que ceci implique $X = 0$.

Enfin $\dim_K \mathfrak{h}_0 = \dim_Q \mathfrak{h}_0$. Il suffit de montrer qu'un système $\{H'_{\alpha_i}\}$, libre sur Q , l'est aussi sur K . S'il ne l'était pas, il existerait des $\lambda_i \in K$, non tous nuls, tels que $\sum \lambda_i H'_{\alpha_i} = 0$. On en déduirait $\sum \lambda_i \langle H'_{\alpha_i} , H'_{\alpha_j} \rangle = 0$. Les coefficients de ce système sont rationnels. Donc, s'il admettait des solutions non nulles dans K , il admettrait des solutions dans Q , ce qui est impossible (car les H'_{α_i} seraient liés dans Q).

C.Q.F.D.

Soit $H_1 , \ldots, H_r$ une base quelconque de $\mathfrak{h}_0$. Etant données deux formes linéaires λ , μ sur $\mathfrak{h}_0$ à valeurs rationnelles, écrivons $\lambda \succ \mu$ si $\lambda(H_i) = \mu(H_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$ et $\lambda(H_{k+1}) > \mu(H_{k+1})$. $\mathfrak{h}_0^*$ est ainsi muni d'une structure d'ordre total compatible avec sa structure d'espace vectoriel (toute structure d'ordre de cette espèce se construit ainsi).

<u>Définition</u> : <u>Nous dirons qu'une racine</u> $\varphi \succ 0$ <u>est simple s'il est</u>

impossible de la mettre sous la forme $\varphi = \alpha + \beta$, où α , β sont 2 racines > 0.

Théorème 2.- Il y a exactement r racines simples α_1 , ..., α_r qui constituent une base de $\mathfrak{h}_0^*$. Toute racine est de la forme $\beta = \sum m_i \alpha_i$ où les m_i sont des entiers de même signe.

Nous allons d'abord démontrer que les racines simples sont linéairement indépendantes, ce qui entraînera qu'il y en a au plus r .

Si α_i , α_j sont 2 racines simples, $\alpha_i - \alpha_j$ n'est pas une racine. Sinon on aurait $\alpha_i - \alpha_j = \beta \in \Delta$. Si $\beta \succ 0$, on aurait $\alpha_i = \alpha_j + \beta$; si $\beta \prec 0$, on aurait $\alpha_j = \alpha_i - \beta$, choses toutes deux impossibles (parce que α_i et α_j sont simples).

Appliquons alors la proposition 1, en prenant $\varphi = \alpha_i$, $\alpha = \alpha_j$. On voit que nécessairement $p = 0$. Donc :

$$- 2 \frac{\langle \alpha_i , \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j , \alpha_j \rangle} = q = \text{entier} \geqslant 0 \quad .$$

Donc $\langle \alpha_i , \alpha_j \rangle$ est $\leqslant 0$.

Supposons qu'on ait un système lié de racines simples. Cela équivaut à dire que l'on a : $\sum_i a_i \alpha_i = \sum_j b_j \alpha_j$, où les α_i , α_j sont distinctes et où tous les a_i et b_j sont $\geqslant 0$.

Posons $\gamma = \sum_i a_i \alpha_i$. On voit que :

$$\langle \gamma , \gamma \rangle = \langle \sum_i a_i \alpha_i , \sum_j b_j \alpha_j \rangle = \sum_{i,j} a_i \, b_j \langle \alpha_i , \alpha_j \rangle$$

Or $\langle \gamma , \gamma \rangle \geqslant 0$, $a_i \, b_j \geqslant 0$, $\langle \alpha_i , \alpha_j \rangle \leqslant 0$. Cette égalité n'est donc possible que si $\langle \gamma , \gamma \rangle = 0$, donc si $\gamma = 0$.

Enfin toute racine $\beta \succ 0$ est combinaison linéaire à coefficients entiers $\geqslant 0$ des α_i . Car les racines $\beta \succ 0$ étant en nombre fini et totalement ordonnées, on peut raisonner par recurrence ; si $\beta \succ 0$ n'est pas simple $\beta = \gamma + \delta$ $\gamma , \delta \prec \beta$ et par hypothèse de récurrence γ_1 et δ sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs des α_i . En particulier comme les β sous-tendent $\mathfrak{h}_0^*$, il en est de même des α_i .

Le théorème est démontré.

Les racines simples α_1 , ... , α_r forment un système fondamental de racines ; les $a_{ij} = - 2 \dfrac{\langle \alpha_i , \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i , \alpha_i \rangle} \geqslant 0$ sont appelés entiers de Cartan.

On verra dans un exposé ultérieur (cf. groupe de Weyl) que le système Π des racines simples détermine de manière simple le système Σ des racines positives.

On dira que le système Π est <u>décomposable</u> si $\Pi = \Pi' \cup \Pi''$ et si les sous-espaces vectoriels $E_{\pi'}$ et $E_{\pi''}$ engendrés respectivement par les $\alpha_i \in \Pi'$ et par les $\alpha_j \in \Pi''$ sont orthogonaux (au sens de la forme de Killing).

<u>Proposition 5.- Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes</u>.:

a) <u>$\mathfrak{g}$ est simple</u> ;

b) <u>Π est non décomposable</u>.

Montrons que a)$\Longrightarrow$b). Pour cela supposons que $\Pi = \Pi' \cup \Pi''$ et que $E_{\pi'} \perp E_{\pi''}$. Soient $\alpha' \in \Pi'$, $\alpha'' \in \Pi''$. Je dis que $\pm\alpha' \pm\alpha''$ ne peut être une racine. Nous avons déjà vu que $\alpha' - \alpha''$ n'était pas une racine ; il suffit de l'établir pour $\alpha' + \alpha''$.

Introduisons les nombres p et q qui entrent dans la proposition 1, lorsqu'on prend $\varphi = \alpha'$, $\alpha = \alpha''$. Comme $\alpha' - \alpha''$ n'est pas racine, on a nécessairement $p = 0$. Mais du fait que $E_{\alpha'} \perp E_{\alpha''}$, on a $\langle \alpha', \alpha'' \rangle = 0$, d'où $q = 0$. Ceci signifie que $\alpha' + \alpha''$ ne saurait être une racine.

Soient $E_{\alpha'} \in \mathfrak{g}^{\alpha'}$, $E_{\alpha''} \in \mathfrak{g}^{\alpha''}$. Puisque $\alpha' + \alpha'' \notin \Delta$, on a $[\mathfrak{g}^{\alpha'}, \mathfrak{g}^{\alpha''}] = 0$. Donc $[E_{\alpha'}, E_{\alpha''}] = 0$. Soit alors $\mathfrak{g}'$ (resp. $\mathfrak{g}''$) l'idéal de $\mathfrak{g}$ engendré par les $E_{\alpha'}$ (resp. par les $E_{\alpha''}$) ; on a : $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}''] = 0$.

Comme $\mathfrak{g}$ est semi-simple, cela équivaut à $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{g}'' = \{0\}$. Comme $\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}'' \subset \mathfrak{g}$; cela signifie que $\mathfrak{g}$ n'est pas simple.

Montrons que b)$\Longrightarrow$a). Supposons pour cela que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}''$. Soit $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$; on a une décomposition unique $E_\alpha = E'_\alpha + E''_\alpha$, $E'_\alpha \in \mathfrak{g}'$, $E''_\alpha \in \mathfrak{g}''_\alpha$. Mais si $H \in \mathfrak{h}$:

$$0 = [H, E_\alpha] - \alpha(H)\, E_\alpha = [H, E'_\alpha] - \alpha(H)\, E'_\alpha + [H, E''_\alpha] - \alpha(H)\, E''_\alpha$$

Or $\quad [H, E'_\alpha] \in \mathfrak{g}'$, $\quad [H, E''_\alpha] \in \mathfrak{g}''$.

Il faut donc nécessairement que l'on ait :

$$[H, E'_\alpha] - \alpha(H)\, E'_\alpha = 0 \qquad [H, E''_\alpha] - \alpha(H)\, E''_\alpha = 0 .$$

Autrement dit, $E'_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, $E''_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$; et comme $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$, cela exige que ou bien E'_α, ou bien E''_α soit nul. Supposons que $E''_\alpha = 0$. Alors

$\mathfrak{g}^{\alpha} \subset \mathfrak{g}'$; et l'on voit tout de suite que l'on a aussi $\mathfrak{g}^{-\alpha} \subset \mathfrak{g}'$.

Si donc α est une racine quelconque E_α et $E_{-\alpha}$ appartiennent tous deux à $\mathfrak{g}'$ ou $\mathfrak{g}''$ mais $H'_\alpha = -[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ est dans $\mathfrak{g}'$ ou $\mathfrak{g}''$.

Soit Δ' (resp. Δ'') l'ensemble des racines α telles que $\mathfrak{g}^{\alpha} \subset \mathfrak{g}'$ (resp. $\mathfrak{g}^{\alpha} \subset \mathfrak{g}''$). Si $\alpha \in \Delta'$ $\beta \in \Delta''$ $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H'_\alpha, H'_\beta \rangle = 0$ car $\langle \mathfrak{g}', \mathfrak{g}'' \rangle = 0$. Donc $\Pi = (\Pi \cap \Delta') \cup (\Pi \cap \Delta'')$ et $E_{\Pi'} \subset \mathfrak{g}'$ $E_{\Pi''} \subset \mathfrak{g}''$ sont orthogonaux.

(la démonstration prouve que $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}') \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'')$). C.Q.F.D.

3.- Bases de Weyl provisoires.

On appellera provisoirement base de Weyl d'une algèbre semi-simple $\mathfrak{g}$, un système formé d'une base $(H_1, \ldots, H_r)$ de l'algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ et d'éléments $E_\alpha \in \mathfrak{g}^{\alpha}$ (où α parcourt le système des racines non nulles de $\mathfrak{g}$), choisi de manière à satisfaire aux conditions

$$\langle E_\alpha , E_{-\alpha} \rangle = -1 \qquad [E_\alpha , E_{-\alpha}] = -H'_\alpha$$

Les constantes de structure sont données par :

$$[H, E_\alpha] = \alpha(H)\, E_\alpha$$

$$[E_\alpha , E_\beta] = N_{\alpha,\beta}\, E_{\alpha+\beta}$$

Si $\alpha + \beta$ n'est pas une racine, alors $[E_\alpha , E_\beta] = 0$. On convient, dans ce cas, de poser $N_{\alpha,\beta} = 0$.

RECTIFICATIFS : 1) - Dans le théorème 1 on a supposé que $[H,X] = aX$ avec $a > 0$. Pour pouvoir appliquer ce théorème, il faut savoir que $\alpha(H'_\alpha) = \langle \alpha, \alpha \rangle > 0$. Le raisonnement pour être correct doit s'écrire ainsi :

si $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$ on prend $X = E_\alpha$ $Y = E_{-\alpha}$ $H = H'_\alpha$

si $\langle \alpha, \alpha \rangle < 0$ on prend $X = E_{-\alpha}$ $Y = E_\alpha$ $H = H'_\alpha$

2) - On pourrait appeler α-série l'ensemble des racines $\beta + c\alpha$ avec $c \in K$ (non seulement c entier). Les raisonnements faits prouvent cependant que c est nécessairement entier ou demi-entier et on peut prouver qu'il est nécessairement entier.
