P. Cartier

Structure topologique des groupes de Lie généraux

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. nº 22, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A24_0>

Séminaire "Sophus LIE"
E.N.S., 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 22

STRUCTURE TOPOLOGIQUE DES GROUPES DE LIE GÉNÉRAUX.

(Exposé de P. CARTIER, le 24.5.55)

A. THÉORÈMES GLOBAUX

1.- Théorie des groupes compacts.

Bien que les résultats de cette étude concernent essentiellement les groupes de Lie, les méthodes de démonstration utiliseront le plus souvent dans ce paragraphe des moyens qui ressortissent à la théorie des groupes localement compacts généraux.

Les groupes sont désignés par des lettres majuscules, un élément générique d'un groupe par la lettre minuscule correspondante. L'élément neutre sera noté $\underline{e}$ quel que soit le groupe en question.

Soit G un groupe topologique opérant sur un espace vectoriel V de dimension finie sur le corps des réels ; on notera $g.v$ le transformé de v par g. Pour des raisons évidentes, on dira qu'une fonction continue f de G dans V est un cocycle si on a l'identité :

(1) $$f(gg') = f(g) + g.f(g')$$

et que c'est un cobord si $f(g) = g.v - v$ pour un v fixé. Tout cobord est un cocycle car :

(2) $$gg'.v - v = (g.v - v) + g.(g'.v - v)$$

Lemme : Soit G un groupe localement compact opérant de manière continue sur un espace vectoriel V de dimension finie, H un sous-groupe invariant fermé de G tel que $K = G/H$ soit compact. Alors tout cocycle f défini sur H et vérifiant $f(ghg^{-1}) = f(h)$ i.e. invariant se prolonge en un cocycle défini sur G.

On note p la projection canonique de G sur K ; on va d'abord montrer qu'il existe un compact $D \subset G$ tel que $p(\overset{\circ}{D}) = K$ ou encore $G = H.\overset{\circ}{D}$. Or, si U est un voisinage ouvert de $\underline{e}$ dans G relativement compact,

$p(U)$ est un voisinage ouvert de $\underline{e}$ dans K et comme celui-ci est compact, il est recouvert par un nombre fini de translatés $k_i p(U)$ de $p(U)$. On choisit alors g_i tel que $p(g_i) = k_i$ et on prend pour D l'adhérence de la réunion des $g_i U$ (Noter que $p(g_i U) = k_i p(U)$) qui répond visiblement à la question.

Soit r_1 une fonction continue à support compact sur G égale à 1 sur D ; on définit r_2 par $r_2(g) = \int r_1(h^{-1}g)\, dh$, r_2 étant définie et continue parce que r_1 est continue à support compact donc uniformément continue. Comme dh est invariante à gauche, on a $r_2(h^{-1}g) = r_2(g)$, comme, de plus $G = H.D$, pour tout g, il existe h avec $h^{-1}g$ dans D donc $r_1(h^{-1}g) = 1$ ce qui prouve tout de suite que $r_2(g) > 0$. On peut donc finalement former $r = r_1/r_2$ et on aura :

(3) $$\int r(h^{-1}g)\, dh = \int r_1(h^{-1}g)/r_2(g)\, dh = 1$$

Partons maintenant d'un cocycle f défini sur H et posons :

(4) $$f'(g) = \int f(h)\, r(h^{-1}g)\, dh$$

ceci étant défini et continu pour les mêmes que plus haut. De plus si nous prenons la mesure dh invariante à gauche, on aura :

(5) $$\begin{aligned} f'(hg) &= \int f(h')r(h'^{-1}hg)\, dh' = \int f(hh')r(h'^{-1}g)\, dh' \\ &= \int (f(h) + h.f(h'))r(h'^{-1}g)\, dh' = f(h) + h.f'(g) \end{aligned}$$

ceci en vertu de (3). f' n'est pas un cocycle et ne prolonge pas f, ces questions étant liées d'après (5) ; on va modifier f' en posant $f''(g) = f'(g) - g.f'(\underline{e})$. Faisant $g = \underline{e}$ dans (5) on voit tout de suite que $f''(h) = f(h)$ puis f'' est presque un cocycle :

(6) $$\begin{aligned} f''(hg) &= f'(hg) - hg.f'(\underline{e}) = f(h) + h.(f'(g) - g.f'(\underline{e})) \\ &= f''(h) + h.f''(g) \end{aligned}$$

Nous allons maintenant intégrer convenablement sur K pour passer de (6) à (1). Pour cela, si $x \in G$, on pose :

(7) $$m(x\,;\,g) = x^{-1}.(f''(xg) - f''(x)) \qquad \text{d'où}$$

(8) $$\begin{aligned} m(x\,;\,gg') &= x^{-1}.(f''(xgg') - f''(x)) \\ &= gg^{-1}x^{-1}.(f''(xgg') - f''(xg)) + x^{-1}.(f(xg) - f(x)) \\ &= g.m(xg\,;\,g') + m(x\,;\,g) \end{aligned}$$

De plus m ne dépend que de la classe mod H de x comme il résulte du calcul suivant :

$$(9)\qquad m(hx\ ;\ g) = x^{-1}h^{-1}(f''(hxg) - f''(hx))$$
$$= x^{-1}h^{-1}.f''(h) + x^{-1}h^{-1}hf''(xg) - x^{-1}h^{-1}f''(h) - x^{-1}h^{-1}hf''(x)$$
$$= m(x\ ;\ g)$$

Il est donc possible d'intégrer m par rapport à $p(x)$ pour la mesure dk de masse totale égale à 1 et biinvariante sur K. On trouve ainsi une fonction $n(g)$ bien définie et continue sur G pour les raisons déjà invoquées. Intégrant la formule (8) et se rappelant que dk est une mesure invariante, on voit immédiatement que n est un cocycle. Enfin la restriction de n à H ne diffère de f que par un cobord : $(g^x = xgx^{-1})$

$$(10)\qquad f''(xh) = f''(h^x x) = f(h^x) + h^x f''(x) = x.f(h) + xhx^{-1}f''(x)$$

et par suite $m(x\ ;\ h) = x^{-1}(f''(xh) - f''(x)) = f(h) + hx^{-1}f''(x) - x^{-1}f''(x)$ (on s'est servi de l'hypothèse que f est invariant en remplaçant $f(h^x)$ par $x.f(h)$). Posons $v = \int x^{-1}f''(x)r(x)\,dx$, c'est un vecteur bien défini de V et remplaçons n par $n' = n - dv$, i.e. $n'(g) = n(g) - (g.v - v)$ j'affirme que $n'(h) = f(h)$: en effet :

$$(11)\qquad f(h) + h.v - v = \int r(x)m(x\ ;\ h)\,dx$$

et c'est une conséquence immédiate de la formule $\int_G = \int_{G/H}\int_H$ que comme $m(x\ ;\ h)$ ne dépend que de $p(x)$ et que l'intégrale de r sur toute classe selon H vaut 1, $\int r(x)\,dx = 1$ et $\int m(x\ ;\ h)r(x)\,dx = n(h)$; ceci achève la démonstration du lemme.

N.B. Le lemme est un tout petit bout de la suite exacte à 5 termes de Serre sur la cohomologie des extensions de groupes.

Nous allons tirer de ce lemme deux théorèmes importants. Rappelons d'abord la définition du <u>produit semi-direct de deux groupes topologiques</u> H et K par rapport à une représentation continue φ de K dans le groupe des automorphismes de H. Comme ensemble, ce groupe G s'identifie à $H \times K$, la multiplication étant donnée par :

$$(12)\qquad (h,k)(h',k') = (h.\ \varphi(k)(h')\ ,\ kk')$$

et la topologie de G est la topologie produit des facteurs ; on vérifie immédiatement qu'on a bien défini un groupe topologique. H et K s'identifient à des sous-groupes de G, H étant de plus invariant et on a $khk^{-1} = \varphi(k)(h)$; la projection de G sur G/H admet donc pour section le sous-groupe K . Réciproquement si G est un groupe topologique, H un sous-groupe invariant fermé et que la projection de G sur G/H admet une section continue K qui soit un sous-groupe, G s'identifie au produit semi-direct de H et de K .

Théorème 1 : Soit G un groupe localement compact admettant un sous-groupe fermé invariant V isomorphe à un espace vectoriel de dimension finie sur les réels, G/V étant compact ; alors il existe un sous-groupe section K et G est isomorphe au produit semi-direct de V et de K .

Tout endomorphisme continu de V est linéaire, donc on définit une représentation linéaire de G dans V en posant $g.v = gvg^{-1}$. Comme V est abélien, l'automorphisme $\varphi(g) : v \longrightarrow g.v$ ne dépend que de la classe de g modulo V , donc on définit un homomorphisme $\tilde{\varphi}$ de $K = G/V$ dans le groupe des automorphismes de V , ce qui permet de construire le produit semi-direct de V et de K . L'application identique de V dans V est visiblement un cocycle invariant, donc d'après le lemme, se prolonge en un cocycle f défini dans G ; si p est la projection de G sur K , on pose $s(g) = (f(g),p(g)) \in V \times K$. s est un homomorphisme de G dans le produit semi-direct car :

$$(13) \quad s(g)s(g') = (f(g) + \tilde{\varphi}(p(g)).f(g') \ , \ p(g)p(g')) = (f(gg') \ , \ p(gg')) \\ = s(gg')$$

ceci parce que f est un cocycle. De plus s est l'identité sur V et on a le diagramme commutatif suivant qui achève la démonstration du théorème :

$$\begin{tikzcd} & & G \arrow[dd, "s"] \arrow[dr, "p"] & & \\ (1) \arrow[r] & V \arrow[ur] \arrow[dr] & & K \arrow[r] & (1) \\ & & V \times K \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Théorème 2 : Soit G un groupe topologique connexe possédant un sous-groupe invariant discret C tel que G/C soit compact et égal à l'adhérence de son groupe des commutateurs. Alors C est fini et G est compact.

Tout d'abord G est localement compact : en effet, soit U voisinage ouvert de $\underline{e}$ dans G tel que $C \cap UU^{-1} = (\underline{e})$ ce qui est possible puisque C est discret ; deux éléments distincts de U ne peuvent être alors congrus mod C donc la restriction à U de la projection p de G sur $G/C = K$ est biunivoque. Comme p est une application continue et ouverte et que U est ouvert, il en résulte que la restriction à U de p est un homéomorphisme ; p(U) est un voisinage de $\underline{e}$ dans K , donc contient un voisinage compact p(V) de $\underline{e}$ dans K avec $V \subset U$ et V est bien un voisinage compact de $\underline{e}$ dans G .

C <u>est un groupe abélien de type fini</u> : pour c fixe dans C, l'application $g \longrightarrow gcg^{-1}$ est une application continue de G connexe dans C discret donc est constante et $gcg^{-1} = \underline{e}c\underline{e}^{-1} = c$, donc C est dans le centre de G. Construisons comme dans la démonstration du lemme un compact D de G tel que $G = C.\overset{\circ}{D}$. ; on peut supposer $D = D^{-1}$ en agrandissant au besoin D. $D.D^{-1}$ est compact et contenu dans $C.\overset{\circ}{D}$ donc recouvert par un nombre fini d'ouverts $c_i.\overset{\circ}{D}$; si Γ est se sous-groupe de C engendré par les c_i, on a donc $D.D^{-1} \subset D.\Gamma$ donc l'image de D dans G/Γ est un sous-groupe dont $\underline{e}$ est point intérieur, donc ouvert ; mais G et donc G/Γ est connexe et par suite $G/\Gamma = D.\Gamma/\Gamma$ et $G = D.\Gamma$. D'autre part D est compact et C discret donc $D \cap C$ est fini ; or Γ est contenu dans C donc si $c = d.\gamma$, on a $d = c\gamma^{-1} \in D \cap C$ et par suite $C = \Gamma.(D \cap C)$ ce qui prouve que C a un nombre fini de générateurs.

D'après les théorèmes de structure des groupes abéliens de type fini C est donc isomorphe au produit d'un groupe fini F et d'un groupe Z^n. Si C n'est pas fini, $n > 0$ et C admet un homomorphisme sur Z^n qui est non nul ; faisons agir G trivialement sur R^n et plongeons Z^n dans R^n ; l'application de C dans Z^n définit alors un cocycle invariant de C dans R^n qui se prolonge donc en un cocycle de G dans R^n, i.e. en un homomorphisme de G dans R^n ; l'image de G dans R^n étant connexe n'est pas contenue dans Z^n, mais l'image de C est contenue dans Z^n, donc par passage au quotient on définit un homomorphisme non constant de G/C dans le groupe abélien R^n/Z^n, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que G/C est égal à l'adhérence de son groupe des commutateurs. Il est donc absurde de supposer C infini ; que G soit alors compact résulte alors si l'on veut de la prop. 1 p.31 de T.L.G.

<u>Corollaire 1</u> (H. Weyl) : <u>Si</u> K <u>est un groupe de Lie semi-simple compact, son groupe de Poincaré est fini et son revêtement universel est compact</u>.

Soit G le revêtement universel de K, le noyau de la projection de G sur K étant un sous-groupe invariant discret C isomorphe au groupe de Poincaré de K (prop.7 p.54 de T.L.G.). K étant connexe et semi-simple, son algèbre de Lie est égale à sa dérivée et K est égal à son groupe des commutateurs, d'après le paragraphe XII de T.L.G. p.125. Ceci permet d'appliquer le théorème 1 .

<u>Corollaire 2</u> : <u>Si</u> K <u>est un groupe de Lie compact connexe, et</u> G <u>un revêtement de</u> K, G <u>est produit direct d'un groupe compact par un groupe</u>

abélien simplement connexe.

Supposons d'abord G simplement connexe et soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie qui est aussi l'algèbre de Lie de K ; comme K est compact, sa représentation adjointe est semi-simple comme toute représentation linéaire de K (T.L.G. cor. du th.1 p.176), donc $\mathfrak{g}$ est réductive et est produit direct d'une algèbre semi-simple $\mathfrak{f}$ et d'une algèbre abélienne $\mathfrak{a}$; $\mathfrak{f}$ est algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$, donc l'algèbre de Lie du groupe des commutateurs de K , groupe fermé dans K , donc compact. D'après le corollaire 1, ce groupe admet un revêtement universel compact car $\mathfrak{g}$ est semi-simple et $\mathfrak{f}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe P compact et simplement connexe ; $\mathfrak{a}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe R^n avec $n = \dim \mathfrak{a}$ donc $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de $P \times R^n$ qui est simplement connexe. Le th.2 p.113 de T.L.G. montre alors que $P \times R^n$ et G qui sont tous deux simplement connexe et ont même algèbre de Lie sont isomorphes.

Passons maintenant au cas d'un revêtement quelconque G de K et soit $\widetilde{G}$ le revêtement universel de K ; G est isomorphe au quotient de $\widehat{G} \simeq P \times R^n$ par un sous-groupe discret du centre de $\widetilde{G}$. Le centre de $\widetilde{G}$ est le produit du centre Z de P et de R^n ; le centre de $\mathfrak{f}$ étant nul, Z est discret donc fini puisque P est compact. Soit m l'ordre de Z ; l'ensemble des $c^m (c \in C)$ est un sous-groupe C' d'indice fini de C et contenu dans le deuxième facteur de $P \times R^n$; R^n/C' est isomorphe au produit d'un tore et d'un groupe R^p , donc G/C' est isomorphe au produit d'un groupe compact et de R^p . Mais $G/C = G/C'/ C/C'$ et C/C' est fini; aucun élément de R^p n'est d'ordre fini donc C/C' est contenu dans la composante compacte de G/C' et il en résulte que G est isomorphe au produit de R^p et d'un groupe compact.

C.Q.F.D.

En raison de l'importance du corollaire 1, nous allons en donner une autre démonstration basée sur des principes tout différents ; il existe d'ailleurs encore d'autres démonstrations de ce théorème.

Soit donc K compact de Lie connexe et semi-simple, G le revêtement universel de K , C le noyau de la projection de G sur K . Une représentation unitaire de G est constitué par la donnée d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et d'un homomorphisme ρ de G dans le groupe des opérateurs unitaires de $\mathcal{H}$, tel que pour x fixé dans $\mathcal{H}$, $g \longrightarrow \rho(g)x$ soit continue de G dans $\mathcal{H}$. Raïkov a démontré que <u>tout groupe localement compact possède un système complet de représentations unitaires irréductibles</u> (i.e. ne possédant aucun sous-espace invariant <u>fermé</u> non trivial) au sens suivant : pour tout $g \neq \underline{e}$ il existe une représentation dans ce système avec $\rho(g) \neq 1$.

Or on a le lemme suivant :

<u>Lemme : Soit</u> G <u>un groupe localement compact,</u> C <u>un sous-groupe fermé central de</u> G <u>tel que</u> $G/C = K$ <u>soit compact ; alors toute représentation unitaire irréductible de</u> G <u>est de dimension finie</u>.

Appelons opérateur de Hilbert-Schmidt un opérateur T continu dans un espace de Hilbert tel que avec une constante M convenable, on ait $\left| \sum (Ta_i , b_i) \right|^2 \leq M \sum \| b_i \|^2$ pour tout système orthonormal fini (a_i) $1 \leq i \leq n$. On peut trouver un tel opérateur tel que de plus $(Ta,a) > 0$ pour un $a \neq 0$ donné et $(Tx,x) \geq 0$ dans tous les cas : par exemple $Tx = (\overline{a,x})\, a$, car $(Ta,a) = \|a\|^4$, $(Tx,x) = |(a,x)|^2 \geq 0$ et $\left|\sum (Ta_i,b_i)\right|^2 = \left|\sum (\overline{a,a_i})(a,b_i)\right|^2 \leq \sum |(a,a_i)|^2 \sum |(a,b_i)|^2 \leq \|a\|^4 \sum \|b_i\|^2$ d'après les inégalités de Parseval et Cauchy-Schwarz. Par contre un opérateur scalaire $\neq 0$ ne peut être du type de Hilbert-Schmidt que si $\mathcal{H}$ est de dimension finie : en effet, prenant $a_i = b_i$ et $T = \lambda.1$ on a $n^2|\lambda|^2 \leq M.n$ d'où $\dim \mathcal{H} \leq M|\lambda|^{-2}$.

Dans une représentation unitaire irréductible d'un groupe G , il n'y a pas d'autre opérateur commutant aux $\rho(g)$ que les scalaires. Partons d'un opérateur T continu et formons $N_{a,b}(g) = (T\,\rho(g)a, \rho(g)b)$; si c est dans le centre de G , $\rho(c)$ est un scalaire, et de module 1 puisque $\rho(c)$ est unitaire donc on voit tout de suite que $N_{a,b}(gc) = N_{a,b}(g)$, donc $N_{a,b}$ est en réalité une fonction définie sur le groupe compact G/C ; comme elle est continue, on peut l'intégrer par rapport à dk ($\int dk = 1$) et l'on obtient une forme sesquilinéaire $f_{a,b}$ qui de plus est continue car $|N_{a,b}(g)| \leq \|T\|\,\|a\|\,\|b\|$ les $\rho(g)$ étant unitaires, et par suite $|f_{a,b}| \leq \|T\|\,\|a\|\,\|b\|$. D'après les propriétés de l'espace de Hilbert, on a donc $f_{a,b} = (T^\natural a,b)$, l'opérateur $T^\natural$ étant continu. Comme on a $N_{\rho(h)a,\, \rho(h)b}(g) = N_{a,b}(gh)$ et que l'intégration est invariante, on a $(T^\natural \rho(h)a, \rho(h)b) = (T^\natural a,b)$ ce qui $\rho(h)$ étant unitaire signifie que $T^\natural$ commute aux $\rho(h)$ et est un scalaire. Si l'on est parti d'un opérateur T non nul et positif $((Tx,x) \geq 0)$, on a $N_{a,a}(g) \geq 0$ avec inégalité stricte pour un g au moins si a est bien choisi, donc $f_{a,a} > 0$ et $T^\natural \neq 0$.

Enfin si T est du type de Hilbert-Schmidt, $T^{\natural}$ l'est également, car

$$\left|\sum (T^{\natural}a_i, b_i)\right|^2 = \left|\int \sum_i N_{a_i,b_i}\right|^2 \leq \int \left|\sum (T\rho(g)a_i, \rho(g)b_i)\right|^2 d(p(g))$$

$\leq M \int dk \sum \|b_i\|^2$ car $\rho(g)$ étant unitaire ne change par les normes et transforme les a_i en un système orthonormal. Comme on peut trouver un T positif non nul de Hilbert-Schmidt, il existe un scalaire non nul du type de Hilbert-Schmidt et $\mathcal{H}$ est bien de dimension finie.

Ceci achève la démonstration du lemme.

Combinant le lemme et le résultat cité de Raikov, on voit que sous les hypothèses du lemme, G possède un système fondamental de représentations de dimension finie. Revenons au cas où K est semi-simple de Lie compact et où G est son revêtement universel ; nous supposerons K connexe donc G connexe. G étant connexe et simplement connexe, ses représentations de dimension finie sont en correspondance avec celles de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ qui est la même que celle de K, donc semi-simple. Si on considère des représentations dans des espaces vectoriels complexes, il revient au même de considérer les représentations linéaires de $\mathfrak{g}$ ou celles de sa complexifiée $\mathfrak{g}_C$ qui est une algèbre de Lie semi-simple sur un corps algébriquement clos. D'après les résultats de l'exposé 17 il existe une représentation ρ de $\mathfrak{g}$, telle que toute autre représentation soit contenue dans une puissance tensorielle de ρ, par suite, la représentation de G qui correspond à ρ est une représentation de G fidèle et complètement réductible. Comme $\mathfrak{g}$ est égale à sa dérivée, toute représentation est unimodulaire, et C étant dans le centre de G est représenté par des opérateurs scalaires dans toute représentation irréductible, mais un scalaire de déterminant 1 est une racine de l'unité dont l'ordre est égal à la dimension de l'espace de la représentation ; donc si (ρ, V) est irréductible, $\rho(C)$ est fini ; on passe de là immédiatement au cas des représentations complètement réductibles. Donc C est fini et il en résulte comme plus haut que G est compact

C.Q.F.D.

2.- Théorie des groupes semi-simples.

Soit G un groupe de Lie connexe semi-simple, i.e. dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple. On sait par l'exposé 12 qu'il existe une sous-algèbre compacte $\mathfrak{k}$ et une sous-algèbre résoluble $\mathfrak{m}$ de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ de sorte que $\mathfrak{g}$ soit somme directe de $\mathfrak{k}$ et de $\mathfrak{m}$. De plus on sait par le même exposé que le groupe adjoint G_0 isomorphe au quotient de G par son centre C se décompose sous la forme $G_0 = K_0.N_0$ (i.e. tout g_0 s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $g_0 = k_0 n_0$) K_0 et N_0 étant respectivement les groupes analytiques correspondant aux sous-algèbres $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$. Nous allons maintenant étendre ce résultat à G lui-même.

<u>Théorème 3</u> : <u>Soit</u> G <u>un groupe de Lie connexe semi-simple</u>, $\mathfrak{g}$ <u>son algèbre de Lie ; si</u> $\mathfrak{g}$ <u>est somme directe de la sous-algèbre compacte</u> $\mathfrak{k}$ <u>et de la sous-algèbre résoluble</u> $\mathfrak{n}$ $([\mathfrak{k}, \mathfrak{n}] \neq (0))$ <u>et si</u> K <u>et</u> N <u>sont les sous-groupes analytiques correspondants</u>, K <u>est produit direct d'un groupe compact</u> K' <u>et d'un groupe abélien simplement connexe</u> A <u>et</u> N <u>est résoluble simplement connexe. Le centre de</u> G <u>est contenu dans</u> K <u>et l'application</u> $(k',a,n) \longrightarrow k'an$ <u>de</u> $K' \times A \times N$ <u>dans</u> G <u>est un homéomorphisme analytique de la première variété sur la seconde ; de plus les mesures de Haar étant convenablement normées, on a</u> :

$$(14) \qquad \int f(g)\, dg = \iiint f(k'an^{-1})\, dk'\, da\, dn$$

Soit p la projection de G sur G_0 ; comme le centre de $\mathfrak{g}$ est nul, C est discret et G est un revêtement de G_0 . Si N est la composante connexe de $p^{-1}(N_0)$, N est un revêtement de N_0 mais ce dernier est simplement connexe donc le revêtement en question est trivial et la restriction de p à N est biunivoque ; en particulier $N \cap C = (\underline{e})$. Comme G est revêtement de G_0 on peut identifier les algèbres de Lie de ces deux groupes et N est alors un sous-groupe résoluble fermé de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$.

Posons $K = p^{-1}(K_0)$ donc $K \supset C$; si $g \in K \cap N$, on a $p(g) \in K_0 \cap N_0 = (\underline{e})$ donc $g \in C$ et comme $N \cap C = (\underline{e})$, il en résulte que $g = \underline{e}$ et finalement $K \cap N = (\underline{e})$. De plus si g est quelconque dans G , on a $p(g) = k_0 n_0 = p(kn)$ et $g = knc = (kc)n \in K.N$; donc tout g se décompose en kn l'unicité étant presque évidente : $kn = k'n'$ implique $k'^{-1}k = n'n^{-1} \in K \cap N = (\underline{e})$ donc $k = k'$ et $n = n'$.

L'application $\varphi : (k , n) \longrightarrow kn$ est évidemment analytique ; d'autre part, en tout point l'application linéaire tangente est biunivoque et $K \times N$ et G ont même dimension donc sont analytiquement isomorphes comme variétés. Pour démontrer la biunivocité de l'application linéaire tangente, on procède ainsi : si X est générique dans $\mathfrak{k}$ et Y générique dans $\mathfrak{n}$, $(\delta_k * X, \delta_n * Y)$ est un vecteur tangent à $K \times N$ en (k,n) générique ; son image dans G est le vecteur $\delta_k * X * \delta_n + \delta_k * \delta_n * Y = \delta_{kn} * (\mathrm{ad}\, n^{-1}.X + Y)$.

Or $\operatorname{ad} n^{-1} X + Y = 0$ implique $X + \operatorname{ad} n\, Y = 0$ donc $X = Y = 0$ car la somme de $\mathfrak{k}$ et de $\mathfrak{n}$ est directe.

φ étant un homéomorphisme et G étant connexe, il en résulte que K est connexe donc est le groupe analytique correspondant à $\mathfrak{k}$; de plus K contient C donc $K_0 = K/C$ donc (cor. 2 du th. 2) $K = K' \times A$ avec K' compact et A abélien simplement connexe. Il résulte immédiatement de cela que G est analytiquement isomorphe à la variété $K' \times A \times N$ et que les sous-groupes K', A et N sont fermés.

Enfin, G est un groupe unimodulaire puisque semi-simple, donc dg est invariante à droite et à gauche. Posons $f(g) = f'(k)f''(n)$ si $g = kn$; pour f' fixée, l'intégrale $\int f(g)\, dg$ est une forme linéaire positive en f'' invariante à droite, donc proportionnelle à $\int f''(n^{-1})\, dn$, et par suite $\int f(g)\, dg = N(f') \int f''(n^{-1})\, dn$. Fixant f'' on voit tout de suite que $N(f')$ est une forme linéaire positive invariante à gauche en f' donc $N(f') = \int f'(k)\, dk$. Enfin comme K est produit direct de K' et de A, la mesure $dk'da$ sur K est invariante à gauche, donc en vertu de l'unicité, on peut supposer $dk = dk'da$ et la formule (14) est vraie pour les f considérées. Comme celles-ci sont suffisamment nombreuses, la formule (14) est démontrée.

C.Q.F.D.

Nous allons maintenant procéder à l'étude des groupes de Lie semi-simples complexes. De manière générale, on appelle <u>groupe de Lie complexe</u> G, un groupe dont l'ensemble des points est muni d'une structure de variété analytique complexe telle que l'application $(g,g') \longrightarrow gg'^{-1}$ de $G \times G$ dans G soit holomorphe. L'espace tangent complexe $T(p)$ en un point p d'une variété analytique complexe V est l'ensemble des formes linéaires X sur l'espace vectoriel des fonctions holomorphes définies au voisinage de p et qui vérifient $X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g)$. Il existe alors une forme linéaire et une seule définie sur les fonctions analytiques (réelles) à valeurs complexes au voisinage de p, vérifiant la même identité et de plus $X(\bar{f}) = \overline{X(f)}$ ce qui permet de définir un isomorphisme d'espace vectoriel réel de $T(p)$ sur l'espace tangent en p défini dans T.L.G. ; mais par transport de structure, ceci permet de transporter la structure d'espace vectoriel complexe à l'espace tangent usuel en p.

En particulier, on peut munir l'algèbre de Lie d'un groupe complexe d'une structure d'espace ~~vectoriel complexe~~ ; la formule $\langle [X,Y], f \rangle = \iint f(xy)\, dX(x)\, dY(y) - \iint f(xy)\, dY(x)\, dX(y)$ où f est holomorphe montre aussitôt que $\mathfrak{g}$ devient ainsi une algèbre de Lie sur le corps complexe, algèbre que nous noterons $\mathfrak{g}_0$. Réciproquement si on se donne sur l'algèbre de Lie réelle d'un groupe de Lie G une structure d'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}_0$ qui induise la structure réelle de $\mathfrak{g}$ par restriction des scalaires de C à R, on peut montrer qu'il existe une structure analytique complexe sur G et une seule pour laquelle $\mathfrak{g}_0$ soit l'algèbre de Lie du groupe complexe G.

La multiplication par i dans $\mathfrak{g}_0$ définit un opérateur Γ dans et pour qu'une fonction f différentiable sur G soit holomorphe, il faut et il suffit que l'on ait $\Gamma X * f = i(X * f)$. Une représentation linéaire (ρ, V) de G est dite holomorphe si pour tout $v \in V$ et $v' \in V^*$, la fonction $\langle \rho(g)v , v' \rangle$ de g est holomorphe. Pour cela, il faut et il suffit en vertu de la caractérisation des fonctions holomorphes que l'on ait $d\rho(\Gamma X) = i\, d\rho(X)$ pour tout X ; soit $\mathfrak{g}_C$ l'algèbre de Lie complexifiée de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{g}_C$ tels que $\Gamma X = iX$ et $\mathfrak{g}''$ l'ensemble des X tels que $\Gamma X = -i X$(*). Comme on a $\Gamma^2 = -1$ et $[\Gamma X, Y] = \Gamma[X,Y]$ dans $\mathfrak{g}$ ces formules sont encore vraies dans $\mathfrak{g}_C$ et il en résulte facilement que $\mathfrak{g}_C$ est somme directe des sous-espaces $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{g}''$ correspondant aux valeurs propres $+i$ et $-i$ de Γ, et que si $X \in \mathfrak{g}'$, $Y \in \mathfrak{g}$, on a $\Gamma[X,Y] = [\Gamma X, Y] = i[X,Y]$ donc $\mathfrak{g}'$ est un idéal de $\mathfrak{g}_C$ et il en est de même de $\mathfrak{g}''$. Les représentations holomorphes de G correspondent alors aux représentations linéaires réelles de $\mathfrak{g}$ dans des espaces vectoriels complexes, donc à des représentations linéaires complexes de $\mathfrak{g}_C$ nulles sur $\mathfrak{g}''$ car ce sont les représentations nulles sur les éléments $\Gamma X - iX$ et il est bien clair que ces éléments forment exactement $\mathfrak{g}''$. De même les représentations linéaires de G antiholomorphes correspondent aux représentations de $\mathfrak{g}_C$ nulles sur $\mathfrak{g}'$.

$\mathfrak{g}_C$ étant produit direct de $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{g}''$, $U(\mathfrak{g})$ est isomorphe au produit tensoriel des algèbres $U(\mathfrak{g}')$ et $U(\mathfrak{g}'')$. Or toute représentation linéaire irréductible du produit tensoriel de deux algèbres associatives est le produit tensoriel d'une représentation irréductible de l'une et d'une telle représentation de l'autre, la réciproque étant aussi vraie par le théorème de Burnside. En effet soit $A = B \otimes C$ et (ρ, V) une représentation irréductible de A ; soit V_1 un sous-espace de V invariant par B minimal, L l'espace des B-homomorphismes de V_1 dans V muni de la

(*) Γ est prolongé par linéarité à $\mathfrak{g}_C$.

représentation de C donnée par $f \longrightarrow \rho(c) \circ f$ et V_2 un sous-espace de L invariant par C minimal ; l'application $v_1 \otimes f \longrightarrow f(v_1)$ de $V_1 \otimes V_2$ dans V est non nulle et commute aux opérations de B et de C par construction ; mais le théorème de Burnside montre que la représentation de $B \otimes C$ dans $V_1 \otimes V_2$ est irréductible et le lemme de Schur achève la démonstration de l'équivalence de V et de $V_1 \otimes V_2$.

On en déduit alors la proposition suivante :

<u>Proposition</u> : <u>toute représentation irréductible d'un groupe de Lie complexe dans un espace vectoriel complexe est isomorphe au produit tensoriel d'une représentation irréductible holomorphe et d'une représentation irréductible antiholomorphe</u>.

Soit maintenant G un groupe de Lie complexe semi-simple, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie ; $\mathfrak{g}$ étant une algèbre de Lie semi-simple réelle, $\mathfrak{g}_C$ est une algèbre semi-simple complexe. Or $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_C$ ne rencontre ni $\mathfrak{g}'$ ni $\mathfrak{g}''$, car si un élément $X \in \mathfrak{g}$ était dans $\mathfrak{g}'$ ou $\mathfrak{g}''$ on aurait $\Gamma X = \pm iX$ mais $\Gamma X \in \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g} \cap i\,\mathfrak{g} = (0)$ donc $X = 0$; il en résulte que les projections de $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_C$ sur $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{g}''$ sont biunivoques et comme $\Gamma X = iX$ dans $\mathfrak{g}'$, on en déduit que les algèbres de Lie complexes $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}'$ sont isomorphes, et de même que les algèbres de Lie complexes $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}''$ sont anti-isomorphes (i.e. il existe une application anti-linéaire biunivoque et multiplicative de l'une sur l'autre). En particulier $\mathfrak{g}_0$ est une algèbre complexe semi-simple ; soit $\mathfrak{k}$ une forme réelle compacte de $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{k}'$ et $\mathfrak{k}''$ les formes réelles compactes de $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{g}''$ respectivement qui lui correspondent dans les isomorphismes de $\mathfrak{g}_0$ avec $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{g}''$. $\mathfrak{k}' \times \mathfrak{k}''$ est une forme réelle compacte de $\mathfrak{g}_C = \mathfrak{g}' \times \mathfrak{g}''$ et il est clair que l'intersection de $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_C$ avec $\mathfrak{k}' \times \mathfrak{k}''$ est égale à $\mathfrak{k}'$. On peut appliquer les résultats de l'exposé 11 et le th.3 du présent exposé qui montrent que le sous-groupe K de G correspondant à $\mathfrak{k}$ est produit direct d'un groupe compact et d'un groupe abélien simplement connexe ; mais $\mathfrak{k}$ est semi-simple et son centre est nul donc K est compact. Soit $\widetilde{G}$ le revêtement universel de G et C le noyau de la projection de $\widetilde{G}$ sur G ; si $\widetilde{K}$ est le sous-groupe de $\widetilde{G}$ correspondant à $\mathfrak{k}$, on sait par le th. 3 que $\widetilde{K}$ contient le centre de $\widetilde{G}$ et en particulier C . K étant compact possède d'après le théorème de Peter-Weyl une représentation linéaire fidèle ρ dans un espace vectoriel réel V de dimension finie ; la représentation infinitésimale $d\rho$ correspondante de $\mathfrak{k}$ est fidèle donc se prolonge en une représentation linéaire complexe fidèle de $\mathfrak{k}_C = \mathfrak{g}_0$ dans V_C. Comme G est simplement connexe cette représentation de $\mathfrak{g}_0$ se prolonge en une représentation linéaire de $\widetilde{G}$ qui est de plus holomorphe ; la représentation de $\mathfrak{g}_0$ étant fidèle, le noyau de la représentation de G est un sous-groupe invariant discret donc contenu dans le centre de G (cf. démonstration du th.2) donc contenu dans $\widetilde{K}$. Mais on sait que $\widetilde{K}/C = K$ et il est alors clair que la représentation de $\widetilde{K}$ obtenue par restriction de celle de $\widetilde{G}$ est composée de la projection $\widetilde{K} \longrightarrow K$ et de la représentation ρ de K, donc comme ρ est fidèle, que son noyau est C. Le noyau de la représentation de $\widetilde{G}$ que nous avons construite, étant contenu dans $\widetilde{K}$ est donc égal à C et par passage au quotient, on en déduit une représentation fidèle de G d'où le théorème :

<u>Théorème 4</u> : <u>Un groupe de Lie semi-simple complexe admet toujours une représentation linéaire holomorphe fidèle dans un espace vectoriel de dimension finie</u>.

Par un raisonnement analogue, on voit qu'il y a correspondance biunivoque entre les représentations linéaires holomorphes de dimension finie de G et les représentations linéaires de dimension finie de K, d'où résulte facilement que G est le groupe algébrique associé au groupe de Lie compact K (T.L.G. ch. VI, paragraphe VIII) (une représentation linéaire de K définit une représentation de $\widetilde{K}$, dont le noyau contient C, puis une représentation de $\mathfrak{k}$ qui se prolonge de manière unique en une représentation complexe de $\mathfrak{g}_0$ qui détermine à son tour une représentation holomorphe de $\widetilde{G}$; donc toute représentation de $\widetilde{K}$ se prolonge de manière unique en une représentation holomorphe de $\widetilde{G}$; si la représentation de $\widetilde{K}$ est triviale sur C, celle de $\widetilde{G}$ le sera aussi sur C, donc définira bien par passage au quotient une représentation de $G = \widetilde{G}/C$)

3.- <u>Groupes de Lie généraux</u>.

Nous allons maintenant passer à l'étude des groupes de Lie généraux et montrer que leur topologie se ramène à celle des groupes compacts et donc même essentiellement à celle des groupes compacts semi-simples.

<u>Théorème 5</u> : <u>Pour toute algèbre de Lie</u> $\mathfrak{g}$ <u>sur le corps des réels, il existe un groupe de Lie</u> G <u>simplement connexe et un seul (à un isomorphisme près) admettant</u> $\mathfrak{g}$ <u>comme algèbre de Lie</u>. <u>Il existe un sous-groupe compact</u> K, <u>un sous-groupe abélien simplement connexe</u> A <u>et un sous-groupe résoluble</u>[(1)] N <u>tel que</u> $G = K.A.N.$ (<u>tout</u> g <u>a une décomposition unique</u> $g = kan$).

(1) - homéomorphe à un espace euclidien.

Faisons d'abord la remarque suivante : soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie admettant un idéal $\mathfrak{I}$ et une sous-algèbre $\mathfrak{S}$ tels que $\mathfrak{I} \cap \mathfrak{S} = (0)$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{I} + \mathfrak{S}$. Pour $\underline{S} \in \mathfrak{S}$, la restriction à $\mathfrak{I}$ de ad $\underline{S}$ est une dérivation $D_{\underline{S}}$ de $\mathfrak{I}$ et la structure de $\mathfrak{g}$ est définie par celle de $\mathfrak{I}$, celle de $\mathfrak{S}$ et l'homomorphisme $\underline{S} \longrightarrow D_{\underline{S}}$ de $\mathfrak{S}$ dans l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{I}$ comme on s'en convaint aisément. Soit S un groupe de Lie simplement connexe ayant $\mathfrak{S}$ pour algèbre de Lie et de même I pour $\mathfrak{I}$; puisque S est simplement connexe, la représentation linéaire $\underline{S} \longrightarrow D_{\underline{S}}$ de $\mathfrak{S}$ dans l'espace $\mathfrak{I}$, se prolonge en une représentation linéaire de S dans $\mathfrak{I}$ soit D(s) et comme les $D_{\underline{S}}$ sont des dérivations de $\mathfrak{I}$, les D(s) en sont des automorphismes (T.L.G. prop.1 p.137). Comme I est simplement connexe, il existe un automorphisme $\varphi(s)$ et un seul de I qui induise l'automorphisme D(s) de $\mathfrak{I}$; considérons alors le produit semi-direct G de I et de S relativement à φ et identifions I et S à des sous-groupes de G . G est simplement connexe comme produit de deux espaces simplement connexes et I est un sous-groupe invariant de G tel que $\varphi(s)i = sis^{-1}$; φ est un homomorphisme de S dans le groupe de Lie des automorphismes de I donc est analytique d'où résulte que G est bien un groupe de Lie. Son algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ contient un idéal isomorphe à $\mathfrak{I}$ et une sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{S}$; on fera les identifications en question, alors $\mathfrak{g}'$ est somme directe de $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{I}$; de plus comme $\varphi(s)i = sis^{-1}$ on a $(\mathrm{ad}\ s)(\underline{I}) = D(s)\underline{I}$ et donc $[\underline{S}, \underline{I}] = D_{\underline{S}}(\underline{I})$ ce qui prouve que $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ sont isomorphes.

Pour prouver alors la première assertion du th. 5 , on remarque que si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, sa représentation adjointe est fidèle donc que le groupe Int $\mathfrak{g}$ (cf. Exp. 16) admet $\mathfrak{g}$ comme algèbre de Lie ; considérant son revêtement universel, on voit qu'il existe un groupe simplement connexe ayant $\mathfrak{g}$ comme algèbre de Lie. Si $\mathfrak{g}$ est résoluble, raisonnons par récurrence sur sa dimension ; soit $\mathfrak{h}$ un sous-espace de codimension 1 de $\mathfrak{g}$ contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, c'est donc un idéal, et soit $\mathfrak{v}$ une droitesupplémentaire de l'hyperplan $\mathfrak{h}$. Par hypothèse de récurrence, $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe simplement connexe H homéomorphe à un espace euclidien ; d'autre part, $\mathfrak{v}$ est l'algèbre de Lie du groupe additif R qui est simplement connexe. Faisant comme plus haut le produit semi-direct de H et de R , on obtient un groupe résoluble G simplement connexe homéomorphe à un espace euclidien, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Pour passer de là au cas général on utilise une décomposition de Lévi de $\mathfrak{g}$ en le radical et une sous-algèbre semi-simple et on fait le produit semi-direct des groupes correspondants. La décomposition des groupes semi-simples obtenues au th.3 se transporte au cas général en remarquant que si N_1 est le sous-groupe résoluble de la décomposition de la composante semi-simple de G, et N_2 le sous-groupe invariant résoluble de G correspondant au radical de $\mathfrak{g}$, $N = N_1 N_2$ est un sous-groupe parce que N_2 est invariant et qu'il est résoluble comme extension d'un résoluble par un résoluble. Que N soit homéomorphe à un espace euclidien est alors clair puisqu'il en est de même pour N_1 et N_2

C.Q.F.D.

Le théorème précédent contient en particulier la réciproque du "3e théorème de Lie" à savoir le théorème d'existence des groupes de Lie. C'est un théorème d'existence global ; on verra à la fin de cet exposé comment on peut obtenir par d'autres procédés un théorème local. Nous allons maintenant énoncer et démontrer un théorème dû pour une bonne part à Iwasawa comme du reste une grande partie des résultats du présent exposé.

<u>Théorème 6 : Si</u> G <u>est un groupe de Lie connexe, on peut trouver un sous-groupe compact</u> K <u>et des groupes à un paramètre</u> $H_1, H_2, \ldots, H_m$ <u>tels que l'application</u> $(k, h_1, h_2, \ldots, h_m) \longrightarrow k h_1 h_2 \ldots h_m$ <u>de</u> $K \times H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_m$ <u>dans</u> G <u>soit un isomorphisme de la première variété sur la seconde</u>.

Si G est un groupe abélien simplement connexe, c'est un groupe isomorphe à un R^n et le théorème est vrai dans ce cas. Si G est résoluble et simplement connexe, la construction d'un tel groupe par produits semi-directs successifs montre que le théorème est aussi vrai dans ce cas. Si maintenant G est semi-simple, on sait d'après le théorème 3 qu'il admet une décomposition $G = K.A.N$ et d'après ce qu'on vient de voir sur les groupes résolubles ou abéliens, il n'est pas difficile de trouver les sous-groupes à un paramètre en question.

Dans le cas général, nous raisonnerons par récurrence sur la dimension de G. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie et $\mathfrak{r}$ son radical ; $\mathfrak{r}$ étant résoluble, la suite de ses algèbres dérivées se termine par (0), donc il existe un k tel que $\mathfrak{r}^{(k)} \neq (0)$ et $\mathfrak{r}^{(k+1)} = (0)$ donc $\mathfrak{I} = \mathfrak{r}^{(k)}$ est une algèbre abélienne ; comme on sait que si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux de $\mathfrak{g}$, il en est de même de $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$, $\mathfrak{I}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$. Soit I le sous-groupe invariant de G correspondant à $\mathcal{J}$; si I n'est pas fermé, en tout cas son adhérence est un sous-groupe invariant abélien fermé de G. On sait que $\bar{I}$ est isomorphe au produit d'un espace euclidien R^n et d'un tore T^p ; ce dernier sous-groupe de $\bar{I}$ est, s'il n'est pas réduit à $(\underline{e})$, le plus grand sous-groupe compact de $\bar{I}$ donc invariant par tous les automorphismes de $\bar{I}$ en particulier par les automorphismes induits par les automorphismes intérieurs de G, donc c'est un sous-groupe invariant de G. En résumé, G possède un sous-groupe invariant fermé J isomorphe à un R^n ou un T^p.

L'hypothèse de récurrence s'applique à G/J donc $G/J = K'.H_1' \dots H_r'$ avec décomposition unique, les termes de la décomposition dépendant analytiquement du g considéré. Les sous-groupes à un paramètre H_i' se remontent en des sous-groupes à un paramètre H_i de G car il suffit pour cela de remonter les sous-algèbres de Lie à un paramètre qui leur correspondent. Soit L l'image réciproque de K' ; si g est un élément quelconque de G et $\bar{g}$ sa classe modulo J, on a $\bar{g} = k'h_1' \dots h_r' = k'\bar{h}_1 \dots \bar{h}_r$ où h_i est l'unique élément de H_i qui se projette sur h_i' ; tout homomorphisme de groupe de Lie étant analytique, les h_i dépendent analytiquement de g et on a $g = \ell.h_1 \dots h_r$. Dans cette décomposition les h_i sont bien déterminés car ce sont nécessairement les éléments respectifs de H_i qui se projettent sur les éléments h_i' de la décomposition de $\bar{g}$. De même ℓ est bien déterminé par g et dépend analytiquement de lui car $\ell = g(h_1 \dots h_r)^{-1}$.

Le sous-groupe L de G possède un sous-groupe abélien invariant J tel que $L/J = K'$ soit compact ; si J est isomorphe à T^p, donc compact, L lui-même est compact et l'on pose $L = K$; si au contraire J est isomorphe à R^n, le théorème 1 montre que L possède un sous-groupe compact K tel que $L = J.K$ (produit semi-direct) cette décomposition étant évidemment analytique. Comme on peut écrire

$J = H_{r+1}H_{r+2} \dots H_{r+n}$ et $L = K.J = K.H_{r+1} \dots H_{r+n}$, on en déduit immédiatement le théorème dans l'un et l'autre cas.

C.Q.F.D.

B. THÉORÈMES LOCAUX

1.- Formule de Campbell-Hausdorff.

Soit P_n l'algèbre des polynomes non commutatifs à n variables x_i à coefficients rationnels, L_n la sous-algèbre de Lie de P_n (pour le crochet $[a,b] = ab - ba$) engendrée par les x_i . On a démontré au premier exposé de ce séminaire les résultats suivants :

a) Si Δ est l'homomorphisme de P_n dans $P_n \otimes P_n$ qui envoie x_i sur $x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$, les éléments de L_n sont caractérisés par la condition

(15) $\quad \Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$

b) Il existe un projecteur de P_n sur L_n donné par

(16) $\quad P(x_{i_1} \dots x_{i_p}) = \frac{1}{p}[x_{i_1}, [x_{i_2}, [\dots [x_{i_{p-1}}, x_{i_p}]] \dots]$

Soit $\overline{P}_n$ l'ensemble des séries formelles non commutatives en les x_i à coefficients dans Q (corps des rationnels) , un polynome étant identifié de manière usuelle à une série formelle, et soit $\overline{L}_n$ l'ensemble des séries dont toutes les composantes homogènes sont dans L_n . On voit immédiatement que les résultats a) et b) sont encore vrais si l'on remplace P_n par $\overline{P}_n$ et L_n par $\overline{L}_n$.

Les séries formelles dont le terme constant est 1 sont inversibles ; parmi celles-ci on peut distinguer celles qui vérifient $\Delta(b) = b \otimes b$ elles forment évidemment un sous-groupe S . Or on définit une correspondance biunivoque de l'ensemble des séries sans terme constant sur les séries dont le terme constant est 1 en posant : $e^x = \sum_{n \geq 0} x^n/n!$ et $\log(1+y) = \sum_{n>0} (-y)^n/n$. Or $e^{x+x'} = e^x e^{x'}$ si x et x' commutent d'où $e^{1 \otimes a + a \otimes 1} = e^{a \otimes 1} e^{1 \otimes a} = (e^a \otimes 1)(1 \otimes e^a) = e^a \otimes e^a$, donc l'exponentielle applique $\overline{L}_n$ sur S . Par transport de structure on déduit une loi de groupe $a \circ a'$ sur $\overline{L}_n$ en posant $a \circ a' = \log(e^a e^{a'})$. Nous allons expliciter cette loi de groupe : il suffit de le faire évidemment lorsque $a = x_1$ et $a' = x_2$ le cas général s'en déduira par spécialisation $x_1 \to a$ $x_2 \to a'$. Comme $x_1 \circ x_2$ est dans $\overline{L}_n$ on ne change pas sa valeur en lui appliquant le projecteur P ; de plus :

(17) $\quad (e^{x_1} e^{x_2} - 1)^m = \sum x_1^{p_1} x_2^{q_1} x_1^{p_2} x_2^{q_2} \dots x_1^{p_m} x_2^{q_m} / p_1! p_2! \dots p_m! q_1! \dots q_m!$

la somme étant étendue aux systèmes (p,q) tels que $p_i + q_i \neq 0$ pour tout i . Appliquant P au développement de $\log(e^{x_1}e^{x_2}) = \sum_{m>0} (-1)^m(e^{x_1}e^{x_2}-1)^m$ on trouve finalement la formule suivante dite formule de Campbell-Hausdorff et dont la forme précise est due à Dynkin :

$$(18)\qquad x_1 \circ x_2 = \sum_{p,q} \frac{(-1)^{p_i+q_i}}{\sum_i (p_i+q_i)} \left(\prod_i p_i!q_i!\right)^{-1} [x_1^{p_1},[x_2^{q_1},[x_1^{p_2},\ldots[x_1^{p_m},x_2^{q_m}]\ldots]$$

où l'on a posé $[x^k,y] = \mathrm{ad}^k x.y$.

<u>Convergence de la formule de Campbell-Hausdorff</u> : si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sur le corps des réels de dimension finie, on va montrer que la formule précédente où l'on interprète le crochet comme l'opération dans $\mathfrak{g}$ est convergente pour $x_1 = x$ et $x_2 = y$ assez voisins de 0 . Précisément soit e_i une base de $\mathfrak{g}$, $(1 \leq i \leq n)$ $c_{ij}^{\ k}$ les constantes de structure de $\mathfrak{g}$ que l'on suppose de module $\leq 1/n$ cas auquel on se ramène toujours par une homothétie ; on pose $z = x \circ y$, $x = \sum x^i e_i$ $y = \sum y^i e_i$ $z = \sum z^i e_i$ les z^i sont alors des séries entières en les x^i et les y^i dont nous allons chercher une majorante de Cauchy. On sait que les majorantes de Cauchy s'additionnent et se multiplient entre elles, donc si $A = (A^i)$ et $B = (B^i)$ sont deux systèmes de séries entières en x^i et y^i de majorantes respectives α^i et β^j $C = [A,B]$ $(C^i = \sum c_{jk}^{\ i} A^j B^k)$ admet une majorante γ^i et l'on a $\gamma^i \leq \sum |c_{jk}^{\ i}| \alpha^j \beta^k \leq \sum \alpha^j \sum \beta^k /n$ donc $\sum \gamma^i \leq \sum \alpha^i \sum \beta^i$.
Finalement, en posant $\|x\| = \sum |x_i|$ on voit que le développement de $x \circ y$ est majoré par le développement de $\sum_{m>0} (e^{\|x\|} e^{\|y\|} -1)^m/m$ convergent dès que $|e^{\|x\|}e^{\|y\|} -1| < 1$ i.e. $\|x\| + \|y\| < \log 2$.

La série de Campbell-Hausdorff est donc bien convergente. Formellement la loi $x \circ y$ est associative et admet 0 comme élément neutre, il en résulte, comme elle est convergente, qu'elle définit un germe de groupe de Lie dans un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$; les droites de $\mathfrak{g}$ sont des groupes à un paramètre car on a $e^{aX} e^{bX} = e^{(a+b)X}$ donc tout système de coordonnées cartésiennes dans $\mathfrak{g}$ définit des coordonnées canoniques dans le germe de groupe G .

Si H est un germe de groupe de Lie admettant $\mathfrak{h}$ comme algèbre de Lie et si f est une fonction analytique au voisinage de $\underline{e}$, on aura par définition de l'exponentielle si $f(\exp. tX.h) = f'(t)$, $df'(t)/dt = \langle X * \delta_{\exp tX.h} , f \rangle = (\check{X} * f)\ (\exp tX.h)$ d'où par récurrence sur n $d^n f'(t)/dt = (\check{X}^n * f)\ (\exp tX.h)$. D'autre part f' est analytique en t

donc admet un développement de Taylor convergent pour t assez petit ; remplaçant X par un homothétique assez petit, on peut supposer que ce développement converge pour $t = 1$. Faisant alors tout d'abord $h = \underline{e}$ on trouve

$f(\exp X) = \sum_{n\geq 0} \langle X^n, f \rangle /n!$ puis en faisant $h = \exp Y$

$f(\exp X. \exp Y) = \sum_{m,n\geq 0} \langle X^m * Y^n, f \rangle /m!\, n!$. Ceci montre en prenant successivement pour f les fonctions coordonnées canoniques que la loi de groupe est donnée en coordonnées canoniques par la formule de Campbell-Hausdorff.

Théorème 7 : Si G est un germe de groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, la loi de composition est donnée en coordonnées canoniques par la formule de Campbell-Hausdorff ; par ailleurs, cette formule est convergente pour toute algèbre de Lie de dimension finie et définit un germe de groupe de Lie ayant $\mathfrak{g}$ comme algèbre de Lie.

3.- Application aux groupes nilpotents.

Rappelons qu'une algèbre de Lie est dite nilpotente si $\operatorname{ad} X$ est nilpotent pour tout élément X de cette algèbre. En conséquence du théorème de Engel, il existe une suite d'idéaux $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_n = (0)$ tels que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+1}$ d'où l'on déduit que les crochets itérés $[x_1,[x_2,[\dots\dots[x_{p-1}, x_p] \dots]$ sont tous nuls pour p assez grand et il n'y a donc dans la formule de Campbell-Hausdorff qu'un nombre fini de termes non nuls ; elle définit donc une loi de groupe polynomiale dans $\mathfrak{g}$; autrement dit, si G est un groupe de Lie dont l'algèbre est nilpotente (on dira que G est nilpotent) et s'il est simplement connexe, l'exponentielle définit un homéomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur G et en coordonnées canoniques, la loi de groupe est polynomiale.

Il y a plus : si (ρ, V) est une représentation linéaire de G et que $d\rho(X)$ soit nilpotent pour tout $X \in \mathfrak{g}$, en vertu de la formule $\rho(\exp X) = \exp d\rho(X)$ il en résulte que cette série n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, ce nombre étant uniformément borné pour tous les X en vertu du théorème d'Engel, donc $\rho(\exp X)$ est une fonction polynomiale de X et en coordonnées canoniques, la représentation de G est polynomiale. Réciproquement, toute représentation linéaire rationnelle de G définit une représentation nilpotente $d\rho$ de $\mathfrak{g}$; en effet, toute sous-représentation et toute représentation quotient d'une représentation rationnelle étant de la même espèce on voit facilement qu'il suffit de démontrer qu'une telle représentation possède toujours un vecteur annulé par tous les $d\,\rho(X)$. Or $\mathfrak{g}$ est résoluble donc possède au moins un poids λ ; soit $v \in V_\lambda$, donc, $d\,\rho(X)v = \lambda(X)v$ et $\rho(\exp X)v = \exp d\,\rho(X)v = e^{\lambda(X)}v$; mais comme la représentation a tous ses coefficients par rapport à une base quelconque qui sont des fonctions rationnelles sur G, on en déduit que $e^{\lambda(X)}$ doit être une fonction rationnelle de X ce qui n'est manifestement possible que si $\lambda = 0$ donc si v est un vecteur annulé par $d\,\rho(X)$ pour tout X.

Enfin on peut préciser ce dernier résultat en montrant que toute fonction polynome sur G est coefficient d'une représentation linéaire polynomiale : en effet comme la loi de composition de G est polynomiale, $P(gh)$ est pour tout polynome P sur G, une fonction polynomiale sur $G \times G$, donc $P(gh) = \sum_{i=1} P_i(g)Q_i(h)$ ce qui prouve que le sous-espace engendré par les translatées à droite de P est contenu dans le sous espace engendré par les P_i donc de dimension finie. Soit $R(h)$ la représentation induite dans ce sous-espace par la représentation régulière droite et δ la forme linéaire $Q \longrightarrow Q(\underline{e})$; alors $P(h) = \langle R(h)P, \delta \rangle$ est bien un coefficient d'une représentation linéaire qui comme les Q_i sont des polynomes, est bien polynomiale.