

SÉMINAIRE SUR LES SINGULARITÉS DES SURFACES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. TEISSIER

Résolution simultanée : II - Résolution simultanée et cycles évanescents

Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 9, p. 1-66

http://www.numdam.org/item?id=SSS_1976-1977____A10_0

© Séminaire sur les singularités des surfaces
(École Polytechnique), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire sur les singularités des surfaces implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E S U R L E S S I N G U L A R I T E S

D E S S U R F A C E S

RESOLUTION SIMULTANEE :

II - RESOLUTION SIMULTANEE ET CYCLES EVANESCENTS

*Respectueusement dédié à Oscar Zariski
à l'occasion du 10ème anniversaire de
"Studies in Equisingularity"*

B. TEISSIER

7 Décembre 1976

INTRODUCTION

Dans cet exposé, on définit l'homologie évanescence locale d'une famille de singularités d'espaces analytiques complexes, et on s'intéresse au problème de la relation entre l'absence d'homologie évanescence locale et la possibilité de résoudre simultanément les singularités des fibres de la famille donnée au voisinage du point considéré. Comme on le verra, d'une part la réponse dépend du sens que l'on veut donner à l'expression "résoudre simultanément" et d'autre part en dehors du cas des familles de courbes planes et du cas où les fibres de la famille sont des surfaces ayant comme singularités au pire des points doubles rationnels, on n'a pas encore obtenu de réponse satisfaisante à ce problème, pas plus d'ailleurs qu'au problème connexe de décider si la constance du type topologique des fibres (resp. de leur résolution) entraîne l'existence d'une résolution simultanée.

On trouvera ici, outre une partie des résultats concernant les points doubles rationnels (pour le reste, consulter les exposés de Pinkham), quelques résultats généraux sur la résolution simultanée, et l'étude du cas des familles de courbes planes. On trouvera aussi les résultats du type : "absence d'homologie évanescence implique topologie constante dans la famille" (essentiellement Lê-Ramanujam).

Les §§ 3, 4 ci-dessous reprennent presque sans changement une partie d'un pré-tirage :

"Sur la résolution simultanée comme condition d'équisingularité" (Ecole Polytechnique, Nov. 1975),

et le § 5 reprend de même une partie d'un autre pré-tirage :

"Sur diverses conditions numériques d'équisingularité des familles de courbes (et un principe de spécialisation de la dépendance intégrale)" (Ecole Polytechnique, Juin 1975).

Une autre partie de ce travail a été reprise dans "Résolution simultanée I".

Le matériel des §§ 3, 4 et 5 n'a pas été abordé lors de l'exposé oral.

Note : Après l'exposé de Résol. Sim. I, j'ai appris que la proposition qui y est démontrée a pour corollaire immédiat une conjecture de Gudkov (cf. Gudkov : The topology of real projective algebraic varieties, Russ. Math. Surveys 29, 4 (1974) 1-79) qui revient à : $\delta(X_0) \geq \delta(X_y)$.



1. MONODROMIE (en grande partie d'après [Mi], [D], [H], un manuscrit non publié de Hironaka, et des conversations avec Lê Dung Trang).

1.0 On étudie ici une fonction $f: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ holomorphe dans un voisinage de 0 et ayant en 0 un point critique isolé. Ceci équivaut par le théorème des zéros de Hilbert à

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\} / (f, \frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}) < \infty$$

et en fait, puisque f est intégralement dépendant sur l'idéal

$(z_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, z_n \cdot \frac{\partial f}{\partial z_n})$ et donc a fortiori sur l'idéal $j(f) = (\frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n})\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$ (cf. [CEW]) l'hypothèse équivaut aussi à :

$$\mu(f) \stackrel{\text{def.}}{=} \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\} / j(f) < \infty .$$

Il n'est pas difficile de montrer (cf. loc. cit.) que $\mu(f)$ ne dépend pas du générateur de l'idéal (f) choisi, ni des coordonnées. Ainsi $\mu(f)$ ne dépend en réalité que du germe d'hypersurface à singularité isolée $(X_0, 0) = (f^{-1}(0), 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ et l'on écrira volontiers $\mu(X_0, 0)$ au lieu de $\mu(f)$. On voit aussitôt que $\mu(f) = 0$ si et seulement si 0 n'est pas un point critique de f , et que $\mu(f) = 1$ si et seulement si l'on peut écrire dans des coordonnées convenables

$$f = z_0^2 + \dots + z_n^2 .$$

1.1 Lemme de Whitney (cf. [H₁], [H₂]) : Soient X un espace analytique complexe réduit et $x \in X$. Pour tout plongement local (i.e. d'un voisinage de x dans X) $(X, x) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ on a :

$$\lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ x' \in X^0}} d(T_{X, x'}, \overline{xx'}) = 0$$

où X^0 désigne la partie non-singulière de X , $T_{X, x'}$ l'espace tangent à X en $x' \in X^0$, $\overline{xx'}$ la droite de \mathbb{C}^N joignant x à x' et enfin $d(L, \ell)$ la distance (ou angle) entre les directions des deux sous-espaces affines L et ℓ de \mathbb{C}^N .

Remarque : En utilisant certains des résultats de finitude de la géométrie analytique, on peut montrer (cf. [L.T.]) qu'en fait il existe un plus grand

$\theta \in \overline{\mathbf{R}}_+ = \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que $d(T_{X, x'}, \overline{xx'}) \leq C \operatorname{dist}(x, x')^\theta$ pour tout x' assez voisin de x , et pour une certaine constante $C \in \mathbf{R}_+$. On peut montrer non seulement que $\theta > 0$, mais que en fait $\theta \in \mathbf{Q}_+ \cup \{+\infty\}$.

En particulier, si f est un polynôme homogène, on a $\theta = +\infty$ par l'identité d'Euler. Le calcul du meilleur θ possible pour f quelconque en fonction d'invariants de f n'est pas fait à ma connaissance.

1.1.1 Corollaire : Dans la situation de 1.0, il existe un nombre réel positif ρ_0 tel que pour tout nombre réel $0 < \rho \leq \rho_0$, la boule $B_\rho = B(0, \rho) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ de centre 0 et de rayon ρ soit contenue dans le domaine de convergence de f , et que son bord $\partial B_\rho = \mathbb{S}_\rho = \mathbb{S}(0, \rho)$, i.e. la sphère de rayon ρ , soit transverse à X_0 dans $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbf{R}^{2n+2}$.

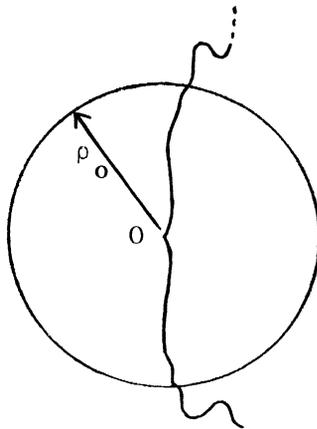
On applique en effet le lemme de Whitney à $(X_0, 0)$ et on en déduit que pour $|x'| = \rho$ assez petit, $T_{X_0, x'}$ fait un angle petit avec le "rayon vecteur" $\overline{0x'}$, donc est transverse à $T_{\mathbb{S}_\rho, x'}$.

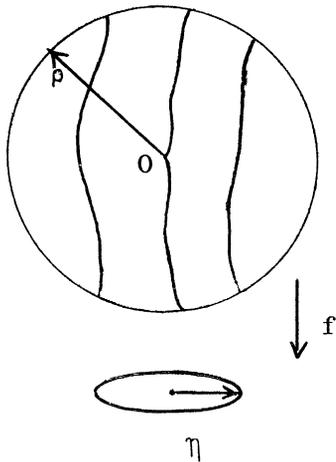
1.1.2 Définition : On dira que ρ_0 est un rayon permis pour $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$.

Remarques : 1) La restriction à $X_0 - \{0\}$ de la fonction "distance à l'origine" n'a donc pas de point critique dans $(X_0 - \{0\}) \cap B_\rho$ pour tout $\rho < \rho_0$, et $K = \mathbb{S}_\rho \cap X_0$ est une variété différentiable de dimension $2n-1$. Enfin $X_0 \cap B_\rho$ est homéomorphe au cône construit dans $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbf{R}^{2n+2}$ sur K , et cet homéomorphisme peut être choisi de façon à s'étendre à l'espace ambiant (cf. [Mi₁]).

2) Le corollaire s'étend à une singularité isolée d'espace analytique quelconque, et même à un espace analytique quelconque et à la transversalité de \mathbb{S}_ρ aux strates d'une stratification de Whitney (exercice).

3) On peut montrer (ouverture de la transversalité) que pour tout $\rho \leq \rho_0$, il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{C}$ avec $|t| < \eta$ on ait : $f^{-1}(t)$ est transverse à \mathbb{S}_ρ dans \mathbb{C}^{n+1} .





1.2 Cycles évanescents d'un morphisme plat dont le but est une courbe non singulière.

L'ingrédient technique essentiel est un résultat de fibration topologique :

1.2.1 Théorème (Hironaka, dans [H₁] démonstration du Corollaire 1) :

Soit $f: X \rightarrow \mathbb{D}$ un morphisme analytique plat et surjectif d'un espace analytique complexe réduit X dans le disque unité du plan complexe. Il existe une partition localement finie $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ de X en sous-espaces analytiques non singuliers appelés strates telle que $f^{-1}(0)$ soit union de strates et que :

- ① $\alpha \neq \beta \implies X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$.
- ② $X_\alpha \cap \overline{X_\beta} \neq \emptyset \implies X_\alpha \subset \overline{X_\beta} - X_\beta$ et la paire de strates (X_β, X_α) satisfait la condition d'incidence de Whitney (cf. [H₁]) en tout point de X_α .
- ③ Supposons $X_\alpha \subset \overline{X_\beta} - X_\beta$ et $f(X_\alpha) = \{0\}$, $f(\overline{X_\beta}) = \mathbb{D}$. Pour toute suite de points $x_i \in X_\beta$ tendant vers $x \in X_\alpha$, posant $F_{x_i} = f^{-1}(f(x_i)) \cap X_\beta$ et

$$T = \bigcap_{x_i} f^{-1}(f(x_i)) \cap X_\alpha, x \quad \text{on a :}$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_{F_{x_i}, x_i} \supseteq T .$$

(Cette condition s'appelle : condition A_f de Thom).

De plus tout point $x \in X$ possède un voisinage V dans X tel qu'il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que la trace dans $V \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\eta)$ de chaque strate X_α , si elle n'est pas contenue dans $f^{-1}(0)$, s'envoie surjectivement sur \mathbb{D}_η , où \mathbb{D}_η est le

disque de rayon η (supposé ≤ 1) dans \mathbb{C} . On peut traduire ceci en disant que si l'on stratifie \mathbb{D}_η par $\mathbb{D}_\eta = \mathbb{D}_\eta^* \cup \{0\}$, où $\mathbb{D}_\eta^* = \mathbb{D}_\eta - \{0\}$, $f|_{f^{-1}(\mathbb{D}_\eta) \cap V} : f^{-1}(\mathbb{D}_\eta) \cap V \rightarrow \mathbb{D}_\eta$ est un morphisme stratifié (i.e. chaque strate de la source est envoyée surjectivement et submersivement sur une strate du but).

Choissant un plongement d'un voisinage de x dans X , encore noté X , dans $\mathbb{D} \times \mathbb{C}^N$:

$$\begin{array}{ccc} X & \subset & \mathbb{D} \times \mathbb{C}^N \\ f \searrow & 0 & \swarrow \text{pr}_1 \\ & \mathbb{D} & \end{array}$$

on peut prendre le voisinage V de la forme $(\mathbb{D}_\eta \times \mathbb{B}_\varepsilon) \cap X$ où \mathbb{B}_ε est une boule de rayon ε dans \mathbb{C}^N , à condition de bien choisir η et ε (condition de transversalité du bord aux strates X_α) et alors, ayant donc choisi ε assez petit pour que en particulier \mathbb{B}_ε , soit transverse dans \mathbb{C}^N à toutes les strates de $f^{-1}(0)$, pour tout $\varepsilon' \leq \varepsilon$ la condition (3) ci-dessus donne suffisamment de transversalité des fibres de f au bord des strates $X_\alpha \cap V$ pour que l'on puisse utiliser au-dessus de \mathbb{D}_η^* la méthode de démonstration du théorème d'isotopie de Thom (cf. [Ma₁], [E.M.S.], [Ma₂]) pour prouver :

1.2.2 Théorème d'isotopie de Hironaka-Thom : Dans les conditions du théorème, tout point $x \in X$ possède un voisinage V tel que pour tout nombre réel $\eta > 0$ assez petit, posant $\mathbb{D}_\eta^* = \mathbb{D}_\eta - \{0\}$, on ait : la restriction de f à $V_\eta^* = V \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\eta^*)$

$$f : V_\eta^* \longrightarrow \mathbb{D}_\eta^*$$

est une fibration topologique (cf. aussi [Le₄]).

Soit $\rho : \widetilde{\mathbb{D}_\eta^*} \rightarrow \mathbb{D}_\eta^*$ le revêtement universel. $\widetilde{\mathbb{D}_\eta^*}$ est contractile, donc après changement de base on a un homéomorphisme ψ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V_\eta^* \times \widetilde{\mathbb{D}_\eta^*} & \xrightarrow{\psi} & F \times \widetilde{\mathbb{D}_\eta^*} \\ \mathbb{D}_\eta^* \searrow f \times \text{id} & & \swarrow \text{pr}_2 \\ & \widetilde{\mathbb{D}_\eta^*} & \end{array}$$

où F est une "fibre type" : $F = f^{-1}(t) \cap V$, $t \in \mathbb{D}_\eta^*$,

d'où l'on tire un homéomorphisme bien défini à isotopie près $H: F \rightarrow F$ qui relève la rotation d'un tour autour de l'origine du point t tel que $F = f^{-1}(t) \cap V$. De plus, $V \cap f^{-1}(0)$ est contractile (par la conicité topologique des strates X_α résultant de l'exercice donné ci-dessus) et pour tout ouvert non vide $V' \subset V$, il existe $t \in \mathbb{D}_\eta^*$ tel que $f^{-1}(t) \cap V'$ soit rétracte par déformation de $f^{-1}(t) \cap V$ et en particulier $H_*(f^{-1}(t) \cap V', \mathbb{Z}) = H_*(f^{-1}(t) \cap V, \mathbb{Z}) = H_*(F, \mathbb{Z})$. (Ceci résulte de l'existence de bons voisinages en géométrie analytique). Tout ceci justifie :

Définition : On appelle homologie évanescence du morphisme f en x le groupe gradué $H_*(f, x) = H_*(X_V \cap f^{-1}(t), \mathbb{Z})$ pour $t \in \mathbb{D}_\eta^*$.

Remarque : D'après les résultats rappelés ci-dessus, la définition a bien un sens, et ne dépend pas du voisinage V de x choisi pourvu qu'il soit assez petit.

1.2.3 Définition : On appelle monodromie de f en x l'endomorphisme h de $H_*(f, x)$ induit par H .

Exemple 1 : Prenons f comme en 1.0, prenons pour X le sous-espace défini (dans un voisinage ouvert de 0×0) dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}$ par l'équation $f(z_0, \dots, z_n) - t = 0$, et pour $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ le morphisme induit par la seconde projection. Enfin on prend pour V l'ouvert $X \cap (\mathbb{B}_\rho \times \mathbb{D}_\eta)$, où $\rho < \rho_0$ (ρ_0 étant le rayon permis) et η est tel que $f^{-1}(t)$ soit transverse à \mathbb{S}_ρ pour tout $t \in \mathbb{D}_\eta$. On retrouve la situation de $[M_1]$, et Milnor a montré que dans ce cas l'homologie évanescence est concentrée en dimension n , et que l'on a

$$H_n(f, x) = \mathbb{Z}^\mu \quad \text{où } \mu = \mu(f) = \mu(X_0, 0) .$$

En particulier, on voit que dans ce cas la nullité de l'homologie évanescence de (f, x) entraîne la non-singularité de $(X_0, 0)$.

1.2.4 Exemple 2 (un peu plus général) : Soit $F(z_0, \dots, z_n, t)$ $F(z_0, \dots, z_n, t) \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n, t\}$, $F(0) = 0$ telle que dans un polycylindre $U: (|z_i| < \varepsilon, |t| < \eta) = \bigcup_{t \in \mathbb{D}_\eta} \mathbb{B}_\varepsilon \times \{t\}$ où F converge, on ait, en notant $X \subset U$

l'hypersurface définie par $F = 0$ et $f: X \rightarrow \mathbb{D}_\eta$ la projection sur l'axe des t ;

1) $f^{-1}(0)$ n'a de singularité qu'en 0 , et donc, si l'on a pris η assez petit :

2) pour tout $t \in \mathbb{D}_\eta$, les points critiques de $F_t: \mathbb{B}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$F(z_0, \dots, z_n, t)$ sont en nombre fini et toutes les composantes irréductibles de la courbe définie dans U par $(\frac{\partial F}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_n})$ contiennent 0 .

De plus le nombre des points critiques de F_t qui sont dans $X_t = F_t^{-1}(0)$ est indépendant de $t \in \mathbb{D}_\eta^*$.

3) X satisfait les conclusions du théorème d'isotopie.

Alors, l'homologie évanescence de f est concentrée en dimension n , et si l'on note x_i ($1 \leq i \leq r$) les points critiques de F_t ($t \in \mathbb{D}_\eta^*$) qui sont dans $X_t = F_t^{-1}(0)$, i.e., les points singuliers de X_t , on a :

$$H_n(f, 0) = \mathbb{Z}^{\mu_0 - \sum_{i=1}^r \mu_i}$$

où $\mu_0 = \mu(X_0, 0)$ et $\mu_i = \mu(X_t, x_i)$.

Démonstration : Considérons le morphisme $\Phi = F \times f: U \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{D}_\eta$. Le sous-espace critique de Φ est le sous-espace de U défini par l'idéal $(\frac{\partial F}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_n})$, qui est une courbe d'après nos hypothèses, (et en fait aussi une intersection complète) et fini au-dessus de $\mathbb{C} \times \mathbb{D}_\eta$. Nous pouvons donc parler de son image par Φ , (cf. [H.I.]) qui est une courbe $D \subset \mathbb{C} \times \mathbb{D}_\eta$; pour chaque $t_0 \in \mathbb{D}_\eta$, $D \cap (\mathbb{C} \times \{t_0\})$ est le discriminant du morphisme $F_{t_0}: U_{t_0} \rightarrow \mathbb{C}$ induit par F , où $U_{t_0} = \{(z_0, \dots, z_n, t_0) \in U\}$. Du fait que la multiplicité d'un tel discriminant en un de ses points est égale à la somme des nombres de Milnor des points critiques de F_{t_0} dont l'image est ce point critique (cf. [H.I.]), nous voyons que, choisissant une coordonnée v sur \mathbb{C} (i.e. (v, t) sur $\mathbb{C} \times \mathbb{D}_\eta$)

1) la multiplicité d'intersection de D avec $\mathbb{C} \times \{0\}$ vaut μ_0 .

2) On peut écrire $D = D_1 \cup D_2$, où D_1 est une courbe d'équation

$$v^{\sum_{i=1}^r \mu_i} = 0, \text{ et } D_2 \text{ est une courbe ne contenant pas } 0 \times \mathbb{D}_\eta, \text{ et dont la}$$

multiplicité d'intersection avec $\mathbb{C} \times \{0\}$ est $\mu_0 - \sum_{i=1}^r \mu_i$.

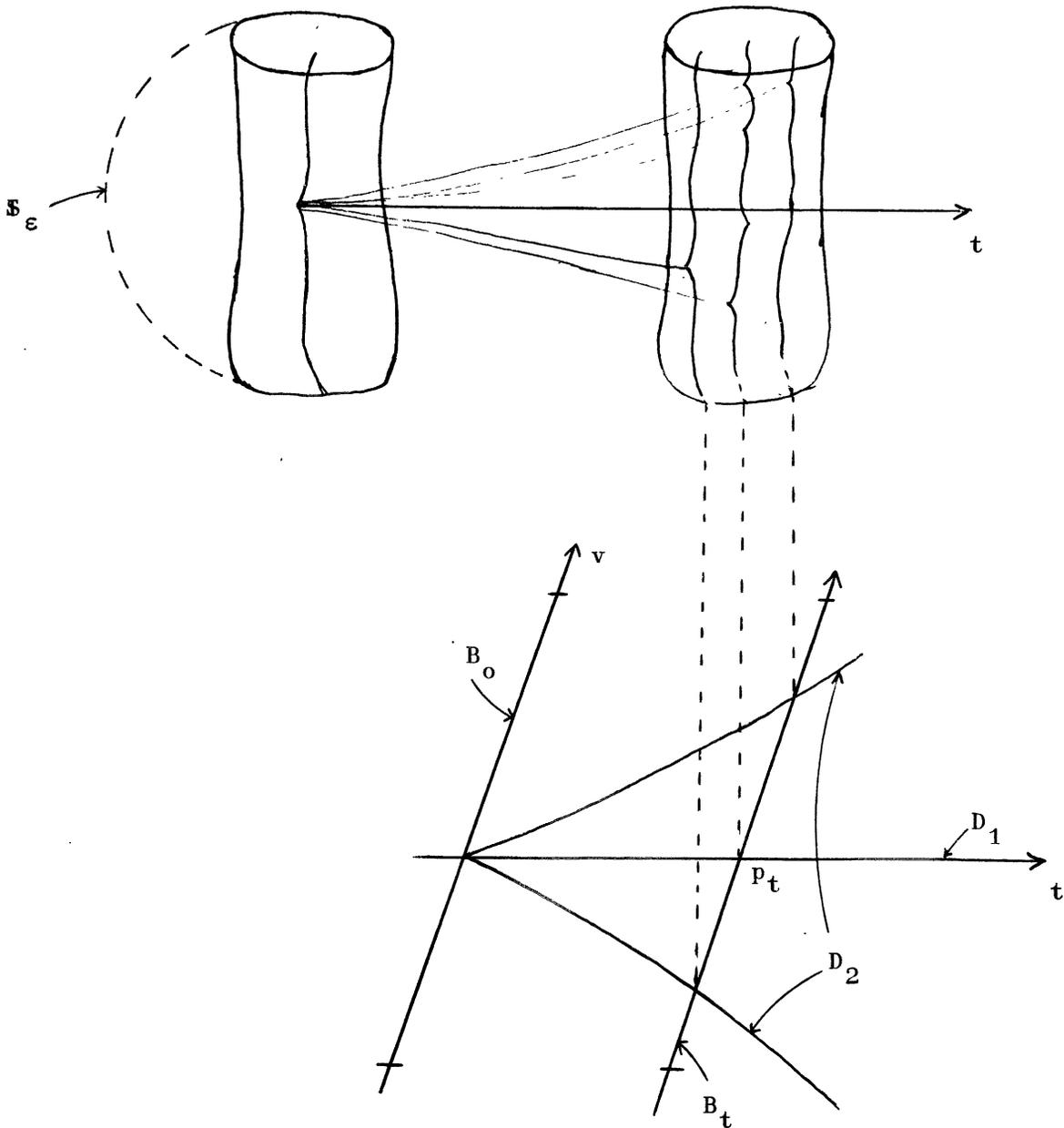
(Voir dessin page suivante).

On raisonne maintenant comme suit :

$\alpha)$ Si η est assez petit, on peut trouver un nombre réel $\gamma > 0$ tel que posant $B_t = \mathbb{D}_\gamma \times \{t\}$, on ait :

i) B_t contient tous les points d'intersection de $\mathbb{C} \times \{t\}$ avec D qui tendent vers 0 avec t , et $D \cap \partial B_t = \emptyset$.

ii) $\Phi^{-1}(B_t)$ est contractile ($t \in \mathbb{D}_\eta$) (en fait homotopiquement équivalent à la boule $\mathbb{B}_\varepsilon = U \cap (t=0)$ (cf. [H.L.]).



iii) $\Phi^{-1}(p)$ est transverse à \mathbb{E}_ε pour tout $p \in B_t$.

β) D'après la théorie de Morse, et un calcul d'indices, cf. [Le₃], on construit (à homotopie près) $\Phi^{-1}(B_t)$ à partir de $\Phi^{-1}(p_t)$ (où $p_t = \{0\} \times \{t\}$) par adjonction de cellules de dimension $n+1$, en nombre égal à la somme des nombres d'intersection de B_0 avec D_2 , et le résultat étant contractile, ces cellules ne peuvent que servir à "tuer" l'homologie en dimension n de $\Phi^{-1}(p_t) = X_t$. Ceci montre que $H_*(X_t)$ est égal à $H_n(X_t, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\mu_0 - \sum \mu_i}$ puisque $\mu_0 - \sum \mu_i$ est d'après le point i) de α), la somme des nombres d'intersection de B_0 avec D_2 .

Il reste donc à prouver le point α) : L'existence de γ vérifiant i) résulte simplement du fait que D_2 ne contient pas $\mathbb{C} \times \{0\}$ i.e. l'axe des v , puisque $F(z_0, \dots, z_n, 0)$ est à singularité isolée.

Par ailleurs, l'énoncé de transversalité iii) provient encore de l'ouverture de la transversalité.

Pour le point ii), remarquons d'abord que d'après ([Mi] 5.9), pour ε assez petit, il existe un champ de vecteurs V_0 sur $B_\varepsilon - X_0$ qui permet, par intégration, de rétracter par déformation B_ε sur $\Phi^{-1}(B_0)$. Ceci prouve la contractibilité de $\Phi^{-1}(B_0)$ qui d'ailleurs se rétracte aussi par déformation sur $\Phi^{-1}(p_0) = X_0$, qui est contractile puisque ε est assez petit pour être un rayon permis.

De plus, Φ n'a aucun point critique dans $U \setminus \bigcup_{t \in \mathbb{D}_\eta} \Phi^{-1}(B_t)$ et n'a pas non plus de point critique dans $\bigcup_{t \in \mathbb{D}_\eta} \Phi^{-1}(\partial B_t)$. Un argument facile permet alors de per-

turber le champ de vecteurs V_0 en un champ de vecteurs relevant le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial t}$ de façon à construire un champ de vecteurs dont les courbes intégrales permettront de rétracter par déformation $B_\varepsilon \times \{t\}$ sur $\Phi^{-1}(B_t)$, prouvant ainsi la contractibilité de ce dernier espace.

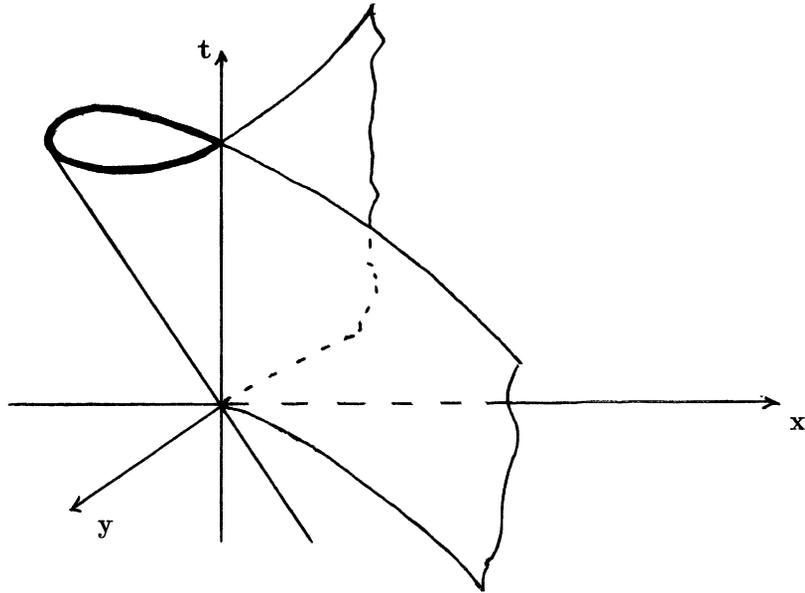
1.2.5 Corollaire : Dans la situation de l'exemple 2, supposant $n \neq 2$, on a :

$H_n(f, 0) = 0$ si et seulement si X est topologiquement trivial le long de l'axe des t au voisinage de 0, en ce sens que pour ε et η assez petits, il existe un homéomorphisme de paires $(X, \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{D}_\eta) \approx (X_0 \times \mathbb{D}_\eta, \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{D}_\eta)$ commutant à la projection sur \mathbb{D}_η .

Preuve du Corollaire : Tout d'abord, l'hypothèse équivaut à : $\sum_{i=1}^r \mu_i = \mu_0$ et ceci d'après le "non-splitting principle" (cf. [I.E.P.]) démontré par Lê Dũng Tráng (cf. [Le₁]), et aussi par Lazzeri ([La]) et Gabrielov ([G]), implique que l'on a $r = 1$, c'est-à-dire que pour chaque $t \in \mathbb{D}_\eta$, X_t a un seul point singulier, que l'on peut supposer être l'origine, et que $\mu(X_t, 0) = \mu(X_0, 0)$. D'après un théorème de Lê et Ramanujam ([L.R.], voir plus bas) et Timourian ([Ti]) cette dernière hypothèse implique à son tour la trivialité topologique de X le long de $0 \times \mathbb{D}_\eta$.

1.2.6 Exemple 3 : L'exemple le plus simple de famille de singularités ayant une homologie évanescence non nulle est le suivant : considérons la famille de courbes planes d'équation

$$y^2 - x^3 - tx^2 = 0.$$



Il est facile de calculer $\mu(X_0) = 2$, $\mu(X_t) = 1$ et donc $H_1(f, 0) = \mathbb{Z}$. Le cycle dessiné en gras, qui est contenu dans la partie réelle de X , est un générateur de l'homologie évanescence.

1.2.7 Remarque : Dans le cas où $f: (\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ est la restriction de la seconde projection à l'hypersurface X définie par $f(z_0, \dots, z_n) - t = 0$, Lê Dũng Tráng a démontré ([Le₂]) que l'homéomorphisme de monodromie de (1.2.2) pouvait être choisi sans point fixe (on peut en fait dans ce cas prendre un difféomorphisme, la situation étant différentiablement localement triviale au-dessus de \mathbb{D}_η^*). On voit sur l'exemple ci-dessus qu'il n'en est rien en général : l'homéomorphisme de monodromie doit respecter le lieu singulier de X_t . On peut se demander en général quelle information on peut obtenir sur le nombre de Lefschetz $\Lambda(h) = \sum (-1)^i \text{Tr } h_i$.

2. UNE AUTRE CLASSE D'EXEMPLES DE RESOLUTION SIMULTANEE TRES FAIBLE (cf. Résolution simultanée I)

2.1 Considérons une famille $f: X \rightarrow Y$ de surfaces normales, avec Y non-singulier, et demandons-nous à quelle condition il existe une résolution simultanée très faible $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ de f . Plus particulièrement, fixons $0 \in Y$, et supposons que notre famille possède des fibres non-singulières X_y au voisinage de 0 , d'une part, et que la résolution π vérifie : le morphisme induit

$f_0 : (\tilde{X})_0 \rightarrow X_0$ est une résolution minimale de la surface X_0 . (Ceci permet d'écrire \tilde{X}_0 ou (\tilde{X}_0) indifféremment.)

On se ramène tout d'abord à étudier le cas où $Y = \mathbb{D}$ d'une part, et d'autre part à étudier la question au voisinage d'un point singulier de X_0 .

2.1.1 Nous étudions donc $\tilde{f} : (\tilde{X}, f^{-1}(0)) \xrightarrow{\pi} (X, 0) \xrightarrow{f} (\mathbb{D}, 0)$ avec l'hypothèse que $(\tilde{X}_0, \pi^{-1}(0)) \rightarrow (X_0, 0)$ est une résolution minimale de $(X_0, 0) = (f^{-1}(0), 0)$, et que X_t est non-singulier pour $t \in \mathbb{D}^*$, dans tout représentant assez petit du germe de morphisme f . Le résultat principal de cette partie est le suivant, dû à Brieskorn et Tjurina ($[Tj_1]$, $[B_1]$).

2.1.2 Théorème : Si X_0 est une hypersurface, une situation comme ci-dessus n'est possible que si $(X_0, 0)$ est un point double rationnel.

Remarque : En fait, Tjurina ($[Tj_1]$, th. 2) énonce : \tilde{X}_0 est diffeomorphe à X_t pour un choix convenable de représentant du germe de morphisme p si et seulement si $(X_0, 0)$ est un point double rationnel.

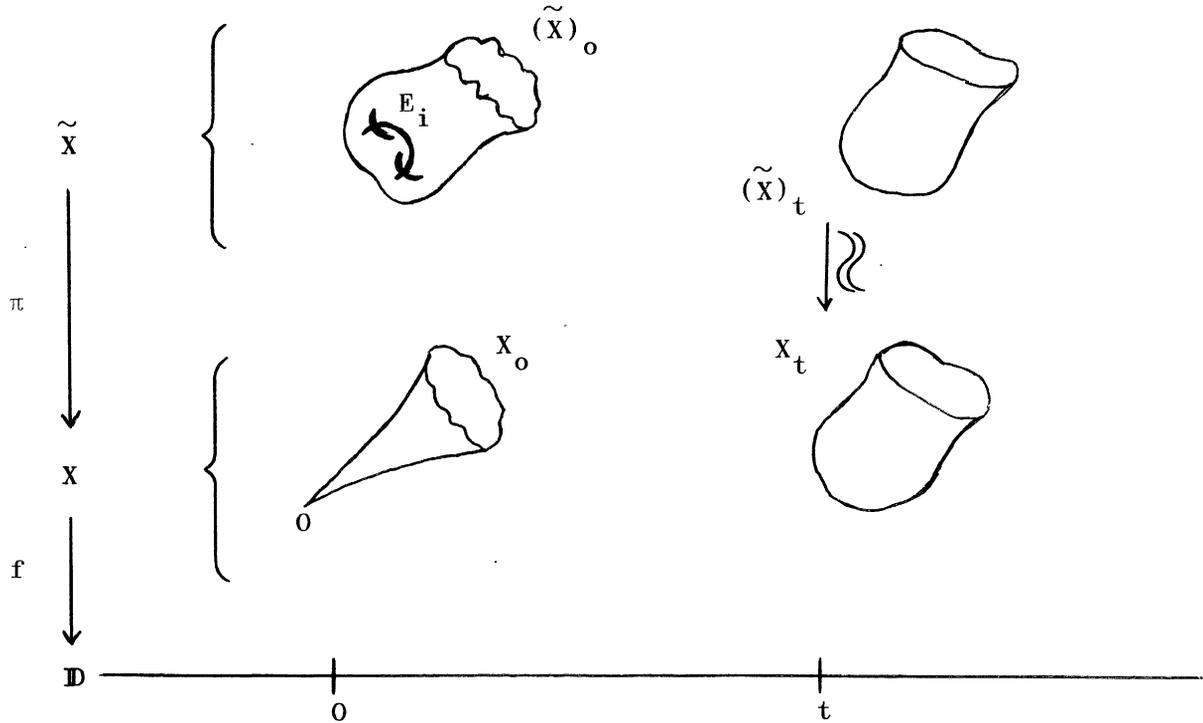
Remarque 1 : Dans un exposé ultérieur, Pinkham montrera que, réciproquement, une famille de surfaces ayant au pis des points doubles rationnels admet une résolution simultanée très faible après un changement de base destiné à trivialisier la monodromie.

Remarque 2 : En effet, il est en tous cas nécessaire de trivialisier la monodromie dans le cas où la fibre générale de notre famille est non-singulière, puisque une famille admettant une résolution simultanée très faible, à laquelle on peut relever l'homéomorphisme de monodromie de telle façon qu'il respecte le diviseur exceptionnel a sûrement une monodromie triviale, puisque c'est le cas pour $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{D}$. [Cette condition est réalisée si la fibre générale est non-singulière, mais n'est pas réalisée dans l'exemple donné en 1.2.6.]

Le théorème ci-dessus a beaucoup de démonstrations différentes, au moins dans le cas où l'on suppose que $(X_0, 0)$ est une hypersurface. Nous allons indiquer quelques unes des approches.

2.2 Prenons donc $f : (X, 0) \rightarrow (Y, 0)$ comme en 2.1.1, et admettons l'existence d'une résolution simultanée très faible induisant une résolution minimale pour $(X_0, 0)$.

A) Première approche dans le cas où $(X_0, 0)$ est une hypersurface.
 On imagine une résolution simultanée comme ceci :



Soit D le diviseur exceptionnel de $\tilde{X}_0 \rightarrow X_0$, et notons $D = \bigcup_{i=1}^{\mu} E_i$ sa décomposition en composantes irréductibles. Le fait que X_0 soit contractile (pour un représentant assez petit, cf. Remarque après 1.1.2) et l'existence de bons voisinages en géométrie analytique impliquent que les cycles $[E_i]$ engendrent l'homologie $H_2(\tilde{X}_0, \mathbb{Z})$ (pour des représentants assez petits). Puisque la matrice d'intersection (E_i, E_j) sur $(\tilde{X})_0$ est négative non dégénérée, les $[E_i]$ forment en fait une base de $H_2(\tilde{X}_0, \mathbb{Z})$. Par ailleurs la famille des \tilde{X}_t est différentiablement triviale au-dessus de \mathbb{D} au voisinage de $\tilde{f}^{-1}(0)$, d'après T.F. 1) et 2). On peut donc pousser par une trivialisatation différentiable les cycles $[E_i]$ dans \tilde{X}_t , qui est difféomorphe à \tilde{X}_0 et donc les images $[E_i]_t$ des $[E_i]$ forment encore une base de l'homologie $H_2(\tilde{X}_t, \mathbb{Z})$. Par ailleurs, par définition d'une résolution des singularités de X , pour tout $t \in \mathbb{D}^*$, le morphisme π induit en fait un isomorphisme $\tilde{X}_t \xrightarrow{\sim} X_t$. L'image par cet isomorphisme des $[E_i]_t$ forme donc une base de $H_2(X_t, \mathbb{Z})$, c'est-à-dire de l'homologie évanescence $H_2(f, 0)$ de notre famille.

2.2.1 Corollaire : Dans la situation de 2.1.1, à chaque trivialisatation différentiable locale de $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{D}$ on peut associer une famille de bases $\{[E_i]_t\}_{1 \leq i \leq \mu}$ de l'homologie évanescence $H_2(X_t, \mathbb{Z})$. De plus pour chaque t , la matrice d'inter-

section des $[E_i]_t \in H_2(X_t, \mathbb{Z})$ est négative non dégénérée.

2.2.2 Remarque : On peut donc considérer que dans la situation de 2.1.1, les composantes E_i du diviseur exceptionnel de la résolution minimale $\tilde{X}_0 \rightarrow X_0$ de X_0 sont les limites "dans \tilde{X} " des cycles évanescents qui vivent sur X_t . On peut se demander ce qu'il advient pour une famille $p: X \rightarrow \mathbb{D}$ ne vérifiant pas TF 1), 2), avec encore X_t non-singulier pour $t \in \mathbb{D}^*$, ou bien lorsque on ne suppose plus que $\tilde{X}_0 \rightarrow X_0$ est une résolution minimale.

2.3 Nous allons maintenant esquisser la démonstration de Tjurina pour 2.1.2 dans le cas où X_0 est une hypersurface : l'idée est de montrer que si $(X_0, 0)$ a une singularité plus compliquée qu'un point double rationnel, on peut par une déformation, faire apparaître une singularité du type de Pham-Brieskorn $z_0^{a_0} + z_1^{a_1} + z_2^{a_2} = 0$, avec $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \leq 1$, la déformation étant telle que de plus l'homologie évanescence $H_2(g, 0)$, où $g: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ est donné par $z_0^{a_0} + z_1^{a_1} + z_2^{a_2}$ s'injecte dans l'homologie évanescence $H_2(f, 0)$, de façon que la forme d'intersection des cycles évanescents de $H_2(f, 0)$ induise celle de $H_2(g, 0)$. Puisqu'il résulte des travaux de Pham ([P]) que la forme d'intersection en question n'est négative non-dégénérée que si $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} > 1$, on obtient ainsi une contradiction.

2.3.1 Considérons une famille d'hypersurfaces à singularités isolées

$F(z_0, \dots, z_n, t) = 0$, et remarquons l'équivalence des conditions suivantes :

- 1) pour $t \in \mathbb{D}_\eta$, η assez petit, chacune des fonctions $f_t(z_0, \dots, z_n) = F(z_0, \dots, z_n, t)$ a pour seul point critique l'origine, dans un voisinage petit de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$.
- 2) Posant $S = (z_0, \dots, z_n) \mathbb{C}\{\underline{z}, t\}$, $J = (\frac{\partial F}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_n}) \mathbb{C}\{\underline{z}, t\}$, il existe un entier r tel que $S^r \subset J$.
- 3) $\mu(f_t, 0)$ est indépendant de $t \in \mathbb{D}_\eta$.
- 4) Le discriminant $D \subset \mathbb{C} \times \mathbb{D}_\eta$ du morphisme $F \times f: U \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{D}_\eta$ (déjà considéré en (1.2.4) coïncide avec $\{0\} \times \mathbb{D}_\eta$.

L'équivalence de ces conditions résulte du théorème des zéros de Hilbert et des considérations de 1.2.4. En fait, nous allons préciser le résultat de 1.2.4 en montrant que l'homologie évanescence $H_n(f_t, 0)$ est indépendante de $t \in \mathbb{D}_\eta$ lorsque les conditions ci-dessus sont satisfaites, et même (Théorème de Lê-Ramanujam) que si $n \neq 2$, toutes les fibres $(f_t^{-1}(0), 0)$ ont le même type topologique (comme germes d'espaces topologiques plongés dans $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$). Nous ne donnerons pas la démonstration de Timourian ([Ti]) du fait que ceci implique

que la famille est topologiquement triviale.

2.3.2 On fixe une fois pour toutes un rayon permis ρ_0 pour $(X_0, 0) = (f_0^{-1}(0), 0)$. Par ouverture de la transversalité, il existe η et ζ réels positifs tels que $f_t^{-1}(v)$ soit transverse (dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \{t\}$, qui sera noté \mathbb{C}^{n+1} pour alléger) à la sphère \mathbb{S}_{ρ_0} , pour tout $t \in \mathbb{D}_\eta$ et $|v| \leq \zeta$. Puisque par hypothèse $F \times f$ n'a aucun point critique hors que $0 \times \mathbb{D}_\eta$ d'une part, et puisque l'on a transversalité de $f_t^{-1}(v)$ à \mathbb{S}_{ρ_0} d'autre part on peut relever le champ de vecteurs constant $\frac{\partial}{\partial t}$ sur $\mathbb{C} \times \mathbb{D}_\eta$ en un champ de vecteurs C^∞ sur $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{D}_\eta$ qui soit tangent aux variétés différentiables (par transversalité)

$$\{(z, t) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{D}_\eta / |z| = \rho_0, |f_t(z)| < \zeta\} \quad \text{et}$$

$$\{(z, t) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{D}_\eta / |z| = \rho_0, |f_t(z)| = \zeta\} \quad \text{et aussi}$$

$$\{(z, t) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{D}_\eta / |z| < \rho_0, |f_t(z)| = \zeta\},$$

ceci résulte du théorème des fonctions implicites par utilisation d'une partition de l'unité pour interpoler : on prend le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial t}$ sur un petit voisinage de $0 \times \mathbb{D}_\eta$ dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{D}_\eta$, et on l'interpole au moyen d'une partition de l'unité jusqu'au relèvement de $\frac{\partial}{\partial t}$ sur chacune des trois variétés différentiables susnommées, relèvement qui existe grâce au théorème des fonctions implicites.

L'intégration de ce champ de vecteurs fournit une trivialisatation différentiable de chacune des trois variétés ci-dessus, au-dessus de \mathbb{D}_η , et en particulier pour tout $t \in \mathbb{D}_\eta$, les deux morphismes induits par f_0 et f_t

$$f_0 : \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |z| \leq \rho_0, |f_0(z)| = \zeta\} \longrightarrow \mathbb{S}_\zeta = \{v \in \mathbb{C} / |v| = \zeta\}$$

$$f_t : \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |z| \leq \rho_0, |f_t(z)| = \zeta\} \longrightarrow \mathbb{S}_\zeta$$

sont différentiablement isomorphes.

2.3.3 La difficulté provient du fait que en général ρ ne sera pas un rayon permis pour $(f_t^{-1}(0), 0)$, si petit que soit η , et que a priori rien n'assure que $G = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |z| \leq \rho_0, f_t(z) = \zeta\}$ est difféomorphe, ou même topologiquement équivalente, à une fibre F de la fibration de Milnor de f_t alors que nous venons de voir qu'elle était difféomorphe (qua variété à bord) à une fibre de la fibration de Milnor de f_0 . Le point crucial de la démonstration est donc le lemme suivant, dont les hypothèses résument ce que nous savons de $f_t : \mathbb{B}_{\rho_0} \times \{t\} \rightarrow \mathbb{C}$ d'après ce qui précède :

2.3.4 Lemme (Lê et Ramanujam [L.R.]) : Soit $f \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$, $f(0) = 0$, et soit ρ_0 un nombre réel > 0 , tels que :

- 1) l'origine soit le seul point critique de f dans \mathbb{B}_{ρ_0} ,
- 2) $f^{-1}(0)$ est transverse à \mathbb{S}_{ρ_0} dans \mathbb{C}^{n+1} ,
- 3) soit ζ tel que $f^{-1}(v)$ soit transverse à \mathbb{S}_{ρ_0} pour tout v tel que $|v| \leq \zeta$.

Alors $f^{-1}(v)$ a le type d'homotopie d'un bouquet de μ sphères, où $\mu = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\} / \left(\frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right)$.

Dans ces conditions, le morphisme induit par f

$$f : C_0 = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |z| \leq \rho_0, |f(z)| = \zeta\} \longrightarrow \mathbb{S}_{\zeta}$$

est une fibration différentiable homotope fibre à fibre à la fibration de monodromie de f , cf. 1.2.2, si $n \neq 2$ elle est même difféomorphe à la fibration de monodromie et il y a un homéomorphisme pour tout $\rho > 0$ assez petit :

$$\{z / |z| \leq \rho_0, |f(z)| = \zeta\} \cup \{z / |z| = \rho_0, |f(z)| \leq \zeta\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{S}_{\rho}$$

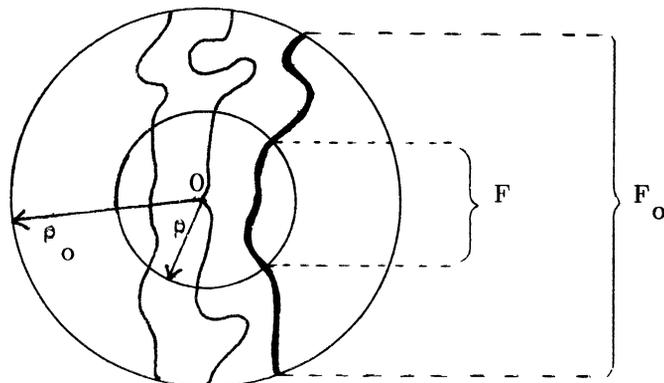
qui envoie $\{z / |z| = \rho_0, f(z) = 0\}$ sur $\{z / |z| = \rho, f(z) = 0\}$.

Remarque : Les hypothèses du lemme sont bien satisfaites par f_t puisque, d'après nos hypothèses, d'une part $\mu(f_t, 0) = \mu(f_0, 0)$ et d'autre part $\{z / |z| \leq \rho_0, f_t(z) = v\}$ est difféomorphe à $\{z / |z| \leq \rho_0, f_0(z) = v\}$ qui a le type d'homotopie d'un bouquet de $\mu = \mu(f_0, 0)$ sphères parce que ρ_0 est un rayon permis pour f_0 .

Démonstration du lemme : Soit $\rho < \rho_0$ un rayon permis pour f . Posons $F_0 = \{z / |z| \leq \rho_0, f(z) = v\}$ et $F = \{z / |z| \leq \rho, f(z) = v\}$, posons enfin

$$C = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |z| \leq \rho, |f(z)| = \zeta\}.$$

On peut schématiser la situation par le dessin suivant :



En utilisant le fait que F et F_0 n'ont pas d'homotopie jusqu'en dimension n , et la suite exacte d'homotopie d'une fibration, on voit que pour montrer que les deux fibrations $C_0 \rightarrow \mathbb{S}_\zeta^1$ et $C \rightarrow \mathbb{S}_\zeta^1$ sont homotopiquement équivalentes, il suffit de vérifier que l'inclusion $F \subset F_0$ est une équivalence d'homotopie. Or, nous savons que F et F_0 ont toutes deux le type d'homotopie d'un bouquet de μ sphères : pour F_0 c'est l'hypothèse 3) et pour F c'est le théorème de Milnor.

Or puisque F_0 est transverse à \mathbb{S}_ρ et \mathbb{S}_{ρ_0} on peut par une petite perturbation générique de la fonction "distance à l'origine" (par exemple en prenant la fonction distance à un point p proche de l'origine et assez général) obtenir une fonction sur \mathbb{C}^{n+1} , disons Δ , telle que la paire (F, F_0) soit difféomorphe à $(\{z/f(z) = v, \Delta(z) \leq \rho\}, \{z/f(z) = v, \Delta(z) \leq \rho_0\})$ et que de plus la restriction de Δ à F_0 soit une fonction de Morse. D'après le principe de Thom et Andreotti-Frankel ([A.F.]) une telle perturbation de la fonction distance n'a, une fois restreinte à F_0 , que des points critiques d'indice $\leq n$, dans \mathring{F}_0 qui est variété analytique complexe. Ainsi F_0 et F ont tous deux le type d'homotopie d'un bouquet de μ n -sphères et F_0 est construit à homotopie près en ajoutant à F des cellules de dimension $\leq n$. Par la classification des surfaces ceci implique aussitôt, dans le cas $n=1$, que l'inclusion $F \subset F_0$ est une équivalence d'homotopie.

Si $n > 1$, F_0 et F sont simplement connexes et on se ramène par un théorème d'Hurewicz ([Sp] p. 394) à montrer que le morphisme naturel $H_i(F, \mathbb{Z}) \rightarrow H_i(F_0, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour tout i . Les deux sont nuls pour $i \neq n$, et on peut écrire la suite exacte d'homologie relative :

$$0 = H_{n+1}(F, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n+1}(F_0, F, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(F, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(F_0, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(F_0, F, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-1}(F, \mathbb{Z}) = 0,$$

mais $H_{n+1}(F_0, F, \mathbb{Z}) = 0$ puisque F_0 est obtenu de F en ajoutant des cellules de dimension $\leq n$, et pour la même raison $H_n(F_0, F, \mathbb{Z})$ est sans torsion, donc nul puisque conoyau d'une flèche injective entre deux \mathbb{Z} -modules libres de rang μ .

Remarque : Arrivés ici, nous avons bien montré que la fibration de Milnor de f_0 et celle de f_t étaient homotopiquement équivalentes.

Pour obtenir que si $n \neq 2$ la fibration $f : C_0 \rightarrow \mathbb{S}_\zeta^1$ est en fait difféomorphe à la fibration de monodromie de f , il nous faut utiliser le théorème du h-cobordisme comme ceci :

Posons $\Delta T = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / \rho \leq |z| \leq \rho_0, |f(z)| \leq \zeta\}$. Puisque l'on a transversalité à S_{ρ_0} et S_ρ , f induit une fibration différentiable (les fibres étant des variétés à

bord) $f: \Delta T \rightarrow \mathbb{D}_\zeta$. Nous voulons maintenant montrer que les inclusions des composantes $\partial F \subset F_0 - \mathring{F}$ et $\partial F_0 \subset F_0 - \mathring{F}$ du bord d'une fibre de cette fibration sont des équivalences d'homotopie. Le point est que d'après ce que nous venons de voir, $H_*(F_0 - \mathring{F}, \partial F; \mathbb{Z}) = H_*(F_0, F, \mathbb{Z}) = 0$, ce qui montre, au vu de la suite exacte d'homologie relative, que l'injection $\partial F \subset F_0 - \mathring{F}$ induit un isomorphisme

$$H_*(\partial F, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_*(F_0 - \mathring{F}, \mathbb{Z}) .$$

A nouveau, pour $n=1$, ceci implique d'après la classification des surfaces à bord que $F_0 - \mathring{F}$ est difféomorphe à $I \times \partial F$ où $I = [0,1]$, et on a même dans ce cas que ΔT est difféomorphe à $\mathbb{D}_\zeta \times I \times \partial F$. Dans le cas $n > 2$ l'inclusion $\partial F \subset F_0 - \mathring{F}$ est une équivalence d'homotopie parce que ∂F est simplement connexe (cf. [Mi₁]) et que l'on a un isomorphisme $H_*(\partial F, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_*(F_0 - \mathring{F}, \mathbb{Z})$ (toujours le théorème d'Hurewicz). Par ailleurs, Milnor montre ([Mi₁] § 6, 6.4) que F_0 peut être construite à partir d'un voisinage $\partial F_0 \times [0, \eta]$ de son bord par adjonction d'anses d'indice $\geq n$. Il en résulte, puisque $n \geq 3$ ici, que $\pi_1(\partial F_0)$ est un sous-groupe de $\pi_1(F_0) = \{0\}$ i.e., ∂F_0 est simplement connexe. Donc, pour montrer que l'inclusion $\partial F_0 \subset F_0 - \mathring{F}$ est une équivalence d'homotopie, il nous suffit de montrer que $H_*(F_0 - \mathring{F}, \partial F_0, \mathbb{Z}) = 0$.

Utilisant le triangle d'homologie relative associé au triple $(F_0, F_0 - \mathring{F}, \partial F_0)$, on voit qu'il suffit de montrer que le morphisme naturel $H_*(F_0, \partial F_0, \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(F_0, F_0 - \mathring{F}, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme. Par le théorème de dualité de Lefschetz ([Sp] p. 298), ceci équivaut encore à dire que le morphisme $H_c^*(\mathring{F}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_c^*(\mathring{F}_0, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme, ce qui par dualité de Poincaré, revient à : $H_*(F, \mathbb{Z}) = H_*(F_0, \mathbb{Z})$, ce que nous savons déjà.

Maintenant puisque $n \geq 3$ par hypothèse ici, la dimension réelle de $F_0 - \mathring{F}$ est au moins 6 et nous sommes exactement dans les conditions d'application du théorème du h-cobordisme ([Mi₂] § 9) qui nous apprend que $F_0 - \mathring{F}$ est difféomorphe à $\partial F \times [0,1]$. Comme par ailleurs la fibration $f: \Delta t \rightarrow \mathbb{D}_\zeta$ vue plus haut doit être triviale puisque \mathbb{D}_η est contractile, il existe un difféomorphisme

$$\rho : \Delta T \xrightarrow{\cong} \partial F \times [0,1] \times \mathbb{D}_\zeta$$

compatible avec les projections sur \mathbb{D}_ζ , et par conséquent, en utilisant le fait que la restriction de la fibration $f: C \rightarrow \mathbb{S}_\zeta$ au bord de C est triviale, on voit que l'on peut rétracter, par un difféomorphisme Ψ, C_0 sur C , ce qui montre que la fibration $f: C_0 \rightarrow \mathbb{S}_\zeta$ est difféomorphe à la fibration de Milnor de f . De plus, notant $T_\rho(\zeta) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |z| \leq \rho, |f(z)| \leq \zeta\}$, l'existence de l'isomorphisme différentiable φ ci-dessus nous montre que l'on peut construire un difféomorphisme $T_{\rho_0}(\zeta) \approx T_\rho(\zeta)$ envoyant $f^{-1}(0) \cap \mathbb{B}_{\rho_0}$ sur $f^{-1}(0) \cap \mathbb{B}_\rho$ (puisque φ respecte les

fibres au-dessus des points de \mathbb{D}_ζ).

La restriction de ce difféomorphisme à $\{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |z| \leq \rho_0, |f(z)| = \zeta\} \cup \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |z| = \rho_0, |f(z)| \leq \zeta\}$ envoie homéomorphiquement cet espace sur $\{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |z| \leq \rho, |f(z)| = \zeta\} \cup \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |z| = \rho, |f(z)| \leq \zeta\}$ et ce dernier espace est homéomorphe, comme l'a montré Milnor [Mi₁] à \mathbb{S}_ρ , par un homéomorphisme qui induit l'identité sur $\{z \in \mathbb{S}_\rho / f(z) = 0\}$. Ceci prouve la dernière assertion du Lemme.

Arrivés ici, nous avons montré :

2.3.5 Théorème (Lê-Ramanujam) : Soit $F(z_0, \dots, z_n, t) = 0$ une équation définissant une famille à un paramètre d'hypersurfaces $(X_t, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ telle que $\mu(X_t, 0)$ soit indépendant de $t \in \mathbb{D}_\eta$.

- 1) Pour tout $t \in \mathbb{D}_\eta$ la fibration de monodromie de $f_t = F(z_0, \dots, z_n, t)$ est homotope fibre à fibre à la fibration de monodromie de f_0 , et en particulier $H_*(f_t, 0)$ est indépendant de $t \in \mathbb{D}_\eta$ (résultat dû à Tjurina).
- 2) Si $n \neq 2$ tous les germes $(X_t, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ sont topologiquement équivalents i.e. pour $t, t' \in \mathbb{D}_\eta$ il existe un germe en 0 d'homéomorphisme de paires $(\mathbb{C}^{n+1}, X_t) \approx (\mathbb{C}^{n+1}, X_{t'})$.

En effet, d'après Milnor ([Mi₁]), posant

$T_\rho(t, \zeta) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |z| \leq \rho, |f_t(z)| \leq \zeta\}$, il existe un homéomorphisme $(\mathbb{B}_{\rho_0}, X_0 \cap \mathbb{B}_{\rho_0}) \approx (T_{\rho_0}(0, \zeta), X_0 \cap \mathbb{B}_{\rho_0})$ pour $\zeta > 0$ assez petit. D'autre part nous avons un homéomorphisme compatible avec la projection sur l'axe des t : (cf. 2.3.2) $T_{\rho_0}(0, \zeta) \approx T_{\rho_0}(t, \zeta)$, qui envoie $\{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |z| = \rho_0, |f_0(z)| \leq \zeta\}$ sur $\{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |z| = \rho_0, |f_t(z)| \leq \zeta\}$, ce qui montre en particulier l'existence d'un homéomorphisme de paires :

$$(\mathbb{S}_{\rho_0}, X_0 \cap \mathbb{S}_{\rho_0}) \approx (\{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |z| \leq \rho_0, |f_t(z)| = \zeta\} \cup \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |z| = \rho_0, |f_t(z)| \leq \zeta\}, X_t \cap \mathbb{S}_{\rho_0})$$

puisque, ρ_0 étant un rayon permis, il existe un homéomorphisme de paires :

$$(\mathbb{S}_{\rho_0}, X_0 \cap \mathbb{S}_{\rho_0}) \approx (\{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |z| \leq \rho_0, |f_0(z)| = \zeta\} \cup \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |z| = \rho_0, |f_0(z)| \leq \zeta\}, X_0 \cap \mathbb{S}_{\rho_0}),$$

comme l'a montré Milnor ([Mi₁]).

Par ailleurs, le lemme appliqué à f_t nous fournit précisément un homéomorphisme de paires :

$$(\mathbb{S}_\rho, X_t \cap \mathbb{S}_\rho) \approx$$

$$(\{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |z| \leq \rho_0, |f_t(z)| = \zeta\} \cup \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |z| = \rho_0, |f_t(z)| \leq \zeta\}, X_t \cap \mathbb{S}_{\rho_0})$$

et il ne reste plus qu'à utiliser le fait, encore dû à Milnor (loc. cit.), que

$$(\mathbb{B}_{\rho_0}, X_0 \cap \mathbb{B}_{\rho_0}) \approx (\mathbb{B}_{\rho_0}, \text{cône sur } X_0 \cap \mathbb{S}_{\rho_0}) \text{ et aussi}$$

$$(\mathbb{B}_\rho, X_t \cap \mathbb{B}_\rho) \approx (\mathbb{B}_\rho, \text{cône sur } X_t \cap \mathbb{S}_\rho), \text{ ce qui montre } (\mathbb{B}_{\rho_0}, X_0 \cap \mathbb{B}_{\rho_0}) \approx (\mathbb{B}_\rho, X_t \cap \mathbb{B}_\rho)$$

$t \in \mathbb{D}_\eta$, et donc le résultat.

2.3.6 Définition 1 (essentiellement due à Tjurina) : Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_{n+1} = \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$ deux germes de fonctions holomorphes. On dit que la singularité de f_1 en 0 est μ -dominée par celle de f_2 , et l'on note $f_1 \prec f_2$, si il existe une famille à un paramètre $F(z_0, \dots, z_n, t)$ de fonctions telle que

- a) il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$ tels que $F(z_0, \dots, z_n, t_1) = f_1$, $F(z_0, \dots, z_n, t_2) = f_2$;
- b) la famille satisfait la condition : " $\mu(f_t, 0)$ est constant au voisinage de $t = t_1$ ".

2.3.7 Définition 2 : Si de plus on peut trouver une famille comme ci-dessus satisfaisant " $\mu(f_t, 0)$ est constant pour $t \in U$, où U est un domaine de \mathbb{C} contenant t_1 et t_2 " on dit que f_1 et f_2 sont μ -isotopes et l'on note $f_1 \simeq f_2$.

2.3.8 Théorème (Tjurina [Tj]) : Si $f_1 \prec f_2$, il y a une injection $H_n(f_1, 0) \hookrightarrow H_n(f_2, 0)$ respectant le produit d'intersection. Si $f_1 \simeq f_2$, $H_n(f_1, 0) = H_n(f_2, 0)$.

Démonstration : La seconde assertion du théorème résulte aussitôt du théorème Lê-Ramanujam, 2.3.5. Par ailleurs l'ensemble des $t \in \mathbb{C}$, au voisinage desquels $\mu(f_t, 0)$ est constant, est le complémentaire d'un fermé analytique strict de \mathbb{C} comme il résulte aussitôt du point 4) de 2.3.1 (et du fait que le discriminant D est une courbe analytique !). Ainsi dans tout voisinage de t_2 l'ensemble des t tels que $H_*(f_t, 0) = H_*(f_{t_1}, 0)$ est dense.

Prenons donc un rayon permis ρ_0 pour f_{t_2} , et une valeur de t telle que

$$H_*(f_t, 0) = H_*(f_{t_1}, 0) \text{ et de plus assez proche de } t_2 \text{ pour qu'il existe } \varepsilon \text{ tel que}$$

$f_t = v$ soit transverse à \mathbb{S}_{ρ_0} pour tout v tel que $|v| \leq \varepsilon$. Soit maintenant $\rho \leq \rho_0$

un rayon permis pour f_t . Prenant si nécessaire $\varepsilon' < \varepsilon$, la fibre $f_t = v$ est trans-

verse à \mathfrak{B}_ρ et à \mathfrak{B}_{ρ_0} si $|v| \leq \varepsilon'$. Or la partie F de cette fibre contenue dans \mathfrak{B}_ρ a pour homologie $H_*(f_t, 0)$ et est contenue dans la partie F_0 de cette même fibre qui est contenue dans \mathfrak{B}_{ρ_0} , et qui est difféomorphe à une fibre de Milnor de f_{t_2} . Enfin, par un argument de Théorie de Morse comme celui utilisé plus haut, F_0 est obtenu à partir de f par adjonction de cellules de dimension $\leq n$, ce qui entraîne que le morphisme $H_n(F) \rightarrow H_n(F_0)$ est injectif, d'où le résultat.

Remarque : Tjurina appelle (c)-isotopie ce que nous appelons μ -isotopie. Nous avons voulu éviter les risques de confusion avec la (c)-cosécance de [I.E.P.]

2.3.9 Nous devons rappeler ici (cf. [L.T.], [H_2]) qu'à tout idéal I d'un anneau A , on peut associer l'idéal \bar{I} formé des éléments $h \in A$ satisfaisant une relation de dépendance intégrale de la forme :

$$h^k + a_1 h^{k-1} + \dots + a_k = 0, \quad a_i \in I^i.$$

Si A est une algèbre analytique, $h \in \bar{I}$ si et seulement si pour tout morphisme $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}\{t\}$ on a, en notant v la valuation t -adique, $v(\varphi(h)) \geq \min_{f \in I} v(\varphi(f))$.

Enfin, si I est un idéal primaire pour l'idéal maximal d'une algèbre équidimensionnelle, \bar{I} est le plus grand idéal de A contenant I et tel que $e(\bar{I}) = e(I)$, où $e(I)$ désigne la multiplicité au sens de Samuel. Enfin dans le cas où I est engendré par une suite régulière, on a $e(I) = \dim_{\mathbb{C}} A/I$.

2.3.10 Proposition (essentiellement dans [T_j]) : Posant, pour $f \in \mathcal{O}_{n+1}$, $j(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right) \cdot \mathcal{O}_{n+1}$; on a

$$\text{si } \overline{j(f_1)} \supset \overline{j(f_2)} \quad , \quad f_1 \preccurlyeq f_2 \quad , \quad \text{et si } \overline{j(f_1)} = \overline{j(f_2)} \quad , \quad f_1 \times f_2 \quad .$$

Démonstration : Considérons la famille $F(\underline{z}, t) = (1-t)f_1(\underline{z}) + tf_2(\underline{z})$. Posant $f_t(\underline{z}) = F(\underline{z}, t)$, on a

$$j(f_t) = \left((1-t) \frac{\partial f_1}{\partial z_0} + t \frac{\partial f_2}{\partial z_0}, \dots, (1-t) \frac{\partial f_1}{\partial z_n} + t \frac{\partial f_2}{\partial z_n} \right)$$

et d'après notre hypothèse, $j(f_t) \subseteq \overline{j(f_1)}$. Donc pour toute valeur de t , $e(j(f_t)) \geq e(j(f_1))$, par conséquent $t=0$ appartient à l'ouvert analytique dense (par semi-continuité de la longueur $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n+1}/j(f_t)$) où $e(j(f_t)) = \mu(f_t, 0)$ est constant, d'où la première assertion. La seconde se démontre de la même façon puisque l'hypothèse implique alors que $t=1$ appartient aussi à l'ouvert dense en question.

Corollaire : Pour tout élément inversible $U \in \mathcal{O}_{n+1}$, on a $Uf \asymp f$. En effet, il suffit de vérifier que $f \in \overline{j(f)}$, ce qui est un résultat bien connu (cf. [H.I.] §2, 2nd part Exercice 2), et conséquence facile du critère valuatif mentionné plus haut.

Corollaire : Si P est un polynôme homogène de degré k non dégénéré, et si $f \in \mathfrak{m}^k$, où \mathfrak{m} désigne l'idéal maximal de \mathcal{O}_{n+1} , on a $P \preccurlyeq f$. En effet, par définition, dire que P est non dégénéré signifie que le cône défini par $P=0$ est à singularité isolée à l'origine, et ceci équivalent ([C.E.W.] chap. II) à dire que $\overline{j(P)} = \mathfrak{m}^{k-1}$, d'où $j(f) \subseteq \overline{j(P)}$.

2.3.11 Nous allons seulement esquisser la fin de la démonstration de Tjurina : Soit donc $f(x,y,z) = t$ définissant une famille de surfaces à résolution simultanée (cf. 2.2). Alors la matrice d'intersection des cycles évanescents, i.e. de $H_2(f,0)$ est négative non dégénérée. Ceci entraîne aussitôt que $f \notin \mathfrak{m}^3$ puisque sinon, d'après le Corollaire précédent, $f \succcurlyeq x^3 + y^3 + z^3 = P_3$, donc (2.3.8) $H_2(P_3,0) \subset H_2(f,0)$, or d'après Pham ([P]) la matrice d'intersection de $H_2(P_3,0)$ n'est pas négative non dégénérée.

Donc, à changement de variable et multiplication par une unité près, on peut, grâce au théorème de préparation de Weierstrass, écrire :

$$f = x^2 + \varphi(y,z) \quad \text{avec} \quad \varphi(y,z) \in (y,z)^2 .$$

Si φ est d'ordre 2, on peut écrire $f = x^2 + y^2 + z^k$, $k \geq 2$ et on reconnaît une singularité du type A_{k-1} .

Si φ est d'ordre ≥ 4 , on vérifie comme plus haut que $f \geq x^2 + y^4 + z^4$ et l'on raisonne comme ci-dessus pour obtenir une contradiction. Donc on peut supposer φ d'ordre 3 et écrire par Weierstrass :

$$f = x^2 + y^3 + yz^k U_1(z) + z^{\ell} U_2(z) \quad \text{avec} \quad U_1(0) \neq 0, U_2(0) \neq 0 .$$

Une analyse cas par cas suivant les mêmes idées que ci-dessus élimine tous les cas sauf ceux où f est à isomorphisme près de l'une des formes suivantes (ou bien n'a pas de point critique) :

$$x^2 + y^2 + z^{n+1} \quad \text{type } A_n \quad (n \geq 1)$$

$$x^2 + y^2 z + z^{n-1} \quad \text{type } D_n \quad (n \geq 4)$$

$$x^2 + y^3 + z^4 \quad \text{type } E_6$$

$$x^2 + y^3 + yz^3 \quad \text{type } E_7$$

$$x^2 + y^3 + z^5 \quad \text{type } E_8 ,$$

qui sont bien, comme nous l'avons vu, tous les points doubles rationnels.

2.3.12 Remarque : La construction faite en 2.2 ci-dessus, jointe aux résultats de Milnor sur la topologie de $f = t$ montre qu'une famille d'hypersurfaces de dimension n dont la fibre générale est non singulière ne saurait admettre de résolution simultanée très faible que dans le cas $n \leq 2$, i.e. dans le cas des surfaces (cf. Résolution simultanée I). En effet, la construction de 2.2 montre (en poussant les cycles exceptionnels) que, notant $f: X \rightarrow Y$ notre famille, au voisinage de $0 \in X$, on a $H_{2n-2}(f, 0) \neq 0$ et non de torsion, alors que d'après Milnor, $H_i(f, 0)$ est de torsion [et même nul en fait, mais l'argument ci-dessus s'applique encore si l'on suppose seulement X_0 intersection complète] si $i > n$: d'où $2n - 2 \leq n$ et $n \leq 2$.

2.3.13 Donnons rapidement une esquisse de quelques autres démonstrations de l'assertion 2.1.2.

a) La démonstration de Brieskorn [Br] : admettant l'existence d'une résolution simultanée très faible $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ de $f: X \rightarrow Y$, Brieskorn démontre tout d'abord que pour tout voisinage ouvert assez petit U de $0 \in X$, on a, en utilisant la non-singularité de \tilde{X} , une injection : $H^1(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \hookrightarrow H^1(\pi^{-1}(U - \{0\}), \mathcal{O}_{\tilde{X}})$. Or en utilisant que π est un isomorphisme hors de $\pi^{-1}(0)$, ce dernier groupe est isomorphe à $H^1(U - \{0\}, \mathcal{O}_X)$ qui, puisque 0 est de codimension ≥ 3 , est égal à $H^1(U, \mathcal{O}_X)$. On peut choisir U de Stein, et donc $H^1(U, \mathcal{O}_X) = 0$ d'où $H^1(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0$, ce qui entraîne aussitôt (cf. [Sém. Cartan]) que $(R^1 f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_0 = 0$. Soit maintenant I l'idéal définissant la fibre \tilde{X}_0 de $f \circ \pi$ au-dessus de 0 . De la suite $0 \rightarrow I \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}_0} \rightarrow 0$, on déduit une suite exacte longue :

$$\dots \longrightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \longrightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}_0} \longrightarrow R^2 f_* I \longrightarrow \dots$$

D'après (Loc. cit.), on a

$$(R^2 f_* I)^\wedge = \varprojlim_{v \rightarrow \infty} R^2 f_* I / \mathfrak{m}^v \cdot R^2 f_* I = \varprojlim_v R^2 f_* (I / (\mathfrak{m} \circ \pi)^v \cdot I)$$

or $I / (\mathfrak{m} \circ \pi)^v \cdot I$ est concentré sur la fibre spéciale qui est de dimension 1, donc son H^2 est nul, d'où $(R^2 f_* I)^\wedge = 0$ et par cohérence $(R^2 f_* I)_0 = 0$, et puisque nous savons déjà que $R^1 f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} = 0$, nous obtenons $R^1 f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}_0} = 0$, c'est-à-dire (puisque par hypothèse $\tilde{X}_0 \rightarrow X_0$ est une résolution des singularités) le fait que $(X_0, 0)$ est une singularité rationnelle. Ensuite il suffit d'appliquer le fait, assez facile à prouver, que la dimension de plongement d'une singularité rationnelle est égale à sa multiplicité augmentée de 1. En particulier une singularité

rationnelle d'hypersurface de dimension 2 est un point double rationnel.

b) Par semi-continuité du conducteur (voir l'exposé "Conditions d'adjonction" ci-dessous) : A chaque singularité isolée d'hypersurface $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ on associe un idéal $\mathfrak{C}_0 \subset \mathcal{O}_{X_0, 0}$ défini comme suit : prenons des coordonnées z_0, \dots, z_n sur \mathbb{C}^{n+1} et considérons

$$\omega = \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{\frac{\partial f}{\partial z_0}} \in \Omega_{X_0}^n \otimes \mathfrak{M},$$

où \mathfrak{M} = faisceau des germes de fonctions méromorphes. Alors

$$\mathfrak{C}_0 = \{h \in \mathcal{O}_{X_0, 0} / \int_{X_0 - \{0\}} |h|^2 \omega \wedge \bar{\omega} < \infty\}$$

(la considération de telles fonctions h pour les surfaces remonte au moins à Picard). Un résultat récent de Elkik permet de répondre à une des questions posées dans l'exposé "Conditions d'adjonction" : résolution simultanée très faible pour une famille d'hypersurfaces implique $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X_t} / \mathfrak{C}_t$ constant, et en général on a $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X_0, 0} / \mathfrak{C}_0 \geq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X_t} / \mathfrak{C}_t$ (où bien sûr $\dim \mathcal{O}_{X_t} / \mathfrak{C}_t$ est la somme des colongueurs des idéaux \mathfrak{C}_t associés aux points singuliers (isolés et en nombre fini) de X_t).

Or si X_t est non-singulière, $\mathfrak{C}_t = \mathcal{O}_{X_t}$, et donc si il existe une résolution simultanée à fibre générale non singulière, $\mathfrak{C}_0 = \mathcal{O}_{X_0}$, c'est-à-dire que $(X_0, 0)$ "n'affecte pas les conditions d'adjonction", ce qui d'après le résultat fondamental de Du Val, [DV.] implique que $(X_0, 0)$ est un point double rationnel.

c) Question : Peut-on donner une démonstration complètement topologique de 2.1.2 fondée sur la construction de 2.2 (il s'agirait de montrer, en utilisant ce que l'on sait ([Mi₁]) sur la topologie de X_t , que le graphe d'intersection des composantes E_i du diviseur exceptionnel d'une résolution minimale de X_0 est un des arbres A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 , et que $E_i^2 = -2$. En effet, on déduit du fait, dû à Milnor [Mi₁], que X_t a son homologie engendrée par des 2-sphères, que les E_i doivent être des droites projectives complexes $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.)

3. RESOLUTION SIMULTANEE FAIBLE, FORTE, ET A PLAT.

Nous allons maintenant donner une autre définition de la résolution simultanée, correspondant au fait que dans la pratique, on cherche souvent à définir une notion d'équisingularité pour un morphisme plat $f: X \rightarrow Y$ d'espaces analytiques complexes le long de l'image d'une section $\sigma: Y \rightarrow X$ de f . On reprend

ici les hypothèses (Résolution simultanée I, §1).

3.1.1 Définition : Soit $f : (X,0) \rightarrow (Y,0)$ un morphisme plat d'espaces analytiques complexes, à fibres réduites. On dira que f admet une résolution simultanée faible le long de l'image Y_1 d'une section $\sigma : Y \rightarrow X$ si pour tout représentant assez petit, il existe un morphisme $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$, modification propre de X et tel que de plus :

TF1) le morphisme composé $\tilde{f} = f \circ \pi : \tilde{X} \rightarrow Y$ soit une submersion d'espaces analytiques, i.e. plat et tel que pour tout $y \in Y$, la fibre $\tilde{X}_y = \tilde{f}^{-1}(y)$ soit non-singulière (en particulier, π est une résolution des singularités de X).

TF2) Pour tout $y \in Y$, le morphisme induit $\pi_y : \tilde{X}_y \rightarrow X_y$ est une résolution des singularités de la fibre $X_y = f^{-1}(y)$.

FA) Le morphisme induit par restriction $\tilde{f} : (\pi^{-1}(Y_1))_{\text{red}} \rightarrow Y$ est simple, c'est-à-dire est une déformation localement (sur $\pi^{-1}(Y_1)$) triviale de sa fibre au-dessus de tout point de Y ; tout point $\tilde{x} \in \pi^{-1}(Y_1)$ possède un voisinage ouvert $U \subset (\pi^{-1}(Y_1))_{\text{red}}$ tel que l'on ait un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\sim} & V \times \tilde{Y}_0 \\ \tilde{f}|_U \searrow & & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & V \end{array}$$

où V est un ouvert de Y et \tilde{Y}_0 un ouvert de la fibre de $\tilde{f} : \pi^{-1}(Y_1)_{\text{red}} \rightarrow Y$ passant par \tilde{x} .

Note : On rappelle que les définitions et résultats sont valables pour un représentant assez petit du germe de morphisme f .

3.1.2 Supposons maintenant Y non-singulier pour simplifier : algébriquement, si nous notons S l'idéal définissant Y_1 dans X , nous pouvons exprimer (FA) comme suit : d'après TF1), tout champ de vecteurs holomorphes tangent à Y se relève au voisinage d'un point $\tilde{x} \in \tilde{X}$ en un champ de vecteurs tangent à \tilde{X} . (FA) exprime que l'on peut choisir ce relèvement tel qu'il soit de plus tangent à $(\tilde{Y})_{\text{red}}$, c'est-à-dire posant $\mathcal{O}_{Y,0} = \mathbb{C}\{v_1, \dots, v_k\}$, il existe par TF1) k (\mathbb{C} -) dérivations \tilde{D}_i ($1 \leq i \leq k$) de $\mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{x}}$, pour tout $\tilde{x} \in \tilde{p}^{-1}(0)$, telles que si nous notons $\Psi_{\tilde{x}}$ l'homomorphisme $\mathbb{C}\{v_1, \dots, v_k\} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{x}}$ correspondant au germe de \tilde{f} en \tilde{x} , on ait :

i) $\tilde{D}_i(\Psi_{\tilde{x}}(v_j)) = \delta_{ij}$ (de Kronecker), i.e. \tilde{D}_i étend $\frac{\partial}{\partial v_i}$

ii) $\tilde{D}_i(\sqrt{S \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{x}}}) \subseteq \sqrt{S \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{x}}}$.

TF1) nous assure de l'existence de \tilde{D}_i satisfaisant i) et la condition FA) apparaît dans ii), qui exprime que les champs de vecteurs correspondant aux \tilde{D}_i sont tangents à $(\tilde{Y}_1)_{\text{red}}$.

3.1.3 Exemples : La famille de courbes planes de l'exemple 1.2.6 n'admet sûrement aucune résolution faible. En effet, pour une famille de courbes, une résolution simultanée ne peut être obtenue que par normalisation, et dans 1.2.2 la fibre de $(\tilde{Y}_1)_{\text{red}} \rightarrow Y$ consiste en deux points si $v \neq 0$, un point (double) si $v = 0$ [ici la section est bien sûr celle qui pique l'unique point singulier de chaque fibre]. ♦

Par contre, dans l'exemple 3) de "Résol. sim. I", la normalisation fournit une résolution simultanée le long de $Y_1 = \mathbb{D} \times \{0\}$. En effet, un calcul facile nous montre que $S \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}} = (t^4) \mathbb{C}\{v, t\}$, et ici notre dérivation \tilde{D} est encore $\frac{\partial}{\partial v}$, qui respecte bien $\sqrt{S \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}} = (t) \mathbb{C}\{v, t\}$, et en fait respecte même S .

3.1.4 Exemples (Briançon et Speder) : Considérons la famille $X \rightarrow \mathbb{D}$ à un paramètre de surfaces à singularité isolée dans \mathbb{C}^3 d'équation :

$$(1) \quad z_2^3 + tz_0^3 z_2 + z_0^4 z_1 + z_1^9 = 0 \quad X_1$$

$$(2) \quad z_2^5 + tz_2 z_1^6 + z_0 z_1^7 + z_0^{15} = 0 \quad X_2$$

Dans les deux cas, toutes les fibres sont quasi-homogènes de même degré avec les mêmes poids, pour tout t et puisque les poids permettent de décrire une résolution des singularités (cf. [O.W.]) il en résulte que chacune des deux familles admet une résolution simultanée faible le long de son lieu singulier. Dans le cas (2) le calcul en a été fait par Monique Lejeune-Jalabert. Ce fait résulte aussi du travail de Pinkham ([Pi]) et de celui de Wahl [Wa] puisque Pinkham montre que dans la déformation miniverselle équivariante d'une singularité isolée de surface quasi-homogène X_0 , la strate qui correspond à des déformations des équations n'ajoutant à chaque équation que des monômes de degré quasi-homogène au moins égal à son degré est une "enveloppe" pour le foncteur des déformations admettant une résolution simultanée étudié par Wahl (Loc. cit.). Cependant, un calcul complet met en évidence le phénomène suivant : soit $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ le morphisme de résolution, et soit $S = (z_0, z_1, z_2) \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ l'idéal définissant la section $\sigma(\mathbb{D}) = 0 \times \mathbb{D}$ le long de laquelle on a résolution simultanée. Alors $S \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ a une composante immergée qui n'est pas localement (en haut) triviale au-dessus de \mathbb{D} . En d'autres termes, on peut remonter le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial t}$ en un champ de vecteurs \tilde{D} sur \tilde{X} qui vérifie

♦ Voir note p. 48.

$$\tilde{D}(\sqrt{S \cdot \mathcal{O}_{X,x}^{\sim}}) \subset \sqrt{S \cdot \mathcal{O}_{X,x}^{\sim}} \quad \text{pour tout } x \in \pi^{-1}(0)$$

mais on ne peut pas choisir \tilde{D} de telle façon que $\tilde{D}(S \cdot \mathcal{O}_{X,x}^{\sim}) \subset S \cdot \mathcal{O}_{X,x}^{\sim}$. Pour analyser la différence commençons par :

3.1.5 Définition : Soit $f: (X,0) \rightarrow (Y,0)$ comme en 3.1.1. On dira que f admet une résolution simultanée forte le long de l'image Y_1 d'une section $\sigma: Y \rightarrow X$ de f si f satisfait les conditions TF1) et TF2) et de plus

F) le morphisme induit par restriction $\tilde{f}: \pi^{-1}(Y_1) \rightarrow Y$ est simple.

3.1.6 Remarque : Ceci signifie précisément que dans 3.1.2 on peut choisir les \tilde{D}_i satisfaisant i) et

$$\text{ii')} \quad \tilde{D}_i(S \cdot \mathcal{O}_{X,x}^{\sim}) \subset S \cdot \mathcal{O}_{X,x}^{\sim} .$$

Nous avons déjà vu un exemple (cf. 3.1.3) de résolution simultanée forte.

Dans la même veine, il est utile de considérer :

3.1.7 Définition : Soit $f: (X,0) \rightarrow (Y,0)$ comme ci-dessus. On dit que f admet une résolution simultanée à plat le long de l'image Y_1 d'une section $\sigma: Y \rightarrow X$ de f si il existe une résolution $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ satisfaisant TF1), TF2) et de plus :

AP) le morphisme induit $\pi^{-1}(Y_1) \rightarrow Y_1$ est plat.

Il est clair qu'une résolution forte est une résolution à plat, mais il n'y a évidemment pas d'implication en général entre "à plat" et "faible".

Remarque : On peut imaginer encore d'autres définitions, par exemple que pour un plongement local $X \subset Y \times \mathbb{C}^{n+1}$, il existe une résolution plongée qui satisfasse TF1) et TF2). On peut également renforcer chacune des définitions précédentes en imposant que le morphisme $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ soit composé d'éclatements permis (i.e. à centre non singulier et avec une condition de platitude normale) c'est-à-dire obtenu par le procédé d'Hironaka.

3.1.8 Exemple : Dans le second exemple de 3.1.3, (i.e. 3) de Résolution simultanée I) nous avons résolution simultanée forte, mais cette résolution n'est pas obtenue par le processus de Hironaka : en effet, la surface X n'est pas normalement plate le long de Y_1 , (sinon la dimension des plongement des fibres serait constante [L.T.]), et donc le seul éclatement permis de $(X,0)$ est celui de l'origine, ce qui fait donc apparaître dans toute résolution à la Hironaka de X une composante du diviseur exceptionnel se projetant sur 0, ce qui exclut que TF2)

soit vérifiée. Cependant, l'éclatement $X' \rightarrow X$ de Y_1 , bien que non permis, est un morphisme fini puisque par la propriété universelle de l'éclatement, le fait que $S.\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ soit inversible implique que \tilde{X} domine X' .

3.1.9 Dans le même ordre d'idée, nous verrons plus bas que pour une famille de courbes planes, résolution simultanée faible équivaut à résolution simultanée forte, et c'est ce point qui constitue la principale difficulté du problème de la démonstration algébrique de l'assertion "μ constant entraîne équisingularité" pour une famille de courbes planes.

3.1.10 En fait, on doit à Zariski [Z_1] le premier résultat fondamental concernant la résolution simultanée, dans ce cadre des familles de courbes planes, résultat qui motive l'étude de la résolution simultanée dans la recherche d'une définition de l'équisingularité :

Théorème (Zariski [Z_1], voir aussi [I.E.P.]) : Une famille de germes de courbes planes $f : X \xrightarrow{\sigma} Y$ admet une résolution simultanée forte, dans un voisinage de Y_1 dans X si et seulement si toutes les fibres $(X_y, \sigma(y))$ sont des germes de courbes planes équisingulières (ou : ont le même type topologique).

Comme nous l'avons vu plus haut, cette dernière condition équivaut à : $H_*(f, 0) = 0$.

4. RESOLUTION SIMULTANEE, THEOREME DE BERTINI IDEALISTE, ET CONDITIONS DE WHITNEY.

4.1 Proposition 1 : Soit $f : X \rightarrow Y$ comme en 3.1.1. L'ensemble des points de X au voisinage desquels f admet une résolution simultanée très faible contient un ouvert analytique partout dense de X , dont le complémentaire a une image de mesure nulle dans Y (qui est un fermé analytique strict de Y si p est propre).

La preuve s'appuie bien sûr sur la résolution des singularités de Hironaka [H_2] et consiste en fait à montrer que l'ensemble des points où une résolution donnée $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ est une résolution simultanée très faible, contient un ouvert analytique dense de X . Tout d'abord, fixons une résolution des singularités $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ telle que l'image réciproque du sous-espace singulier de X soit un diviseur à croisements normaux de \tilde{X} . L'ensemble \tilde{U} des points de \tilde{X} où $f : \tilde{X} \rightarrow Y$ est lisse est un ouvert analytique partout dense de \tilde{X} , complémentaire

d'un fermé analytique rare \tilde{F} dont l'image dans Y par \tilde{f} est de mesure nulle (théorème de Sard). Par ailleurs, une très facile extension du théorème de Sard au cas d'un diviseur à croisements normaux montre qu'il existe un fermé analytique strict $\tilde{F}_1 \subset \tilde{D}$ tel que $\tilde{f}(\tilde{F}_1)$ soit de mesure nulle dans Y , et que $\tilde{D} \rightarrow Y$ soit simple en tout point $\tilde{x} \in \tilde{D} - \tilde{F}_1$, et en particulier si $\tilde{f}(\tilde{x}) = y \notin \tilde{f}(\tilde{F}_1)$, $\dim_{\tilde{x}}(\tilde{D} \cap \tilde{f}^{-1}(y)) = \dim_{\tilde{x}} \tilde{X} - 1$. Par ailleurs, puisque π est propre, $\pi(\tilde{F}_0)$ et $\pi(\tilde{F}_1)$ sont des sous-espaces analytiques fermés rares de X . La conjonction de tout ceci assure la proposition 4.1, puisque pour vérifier la condition TF2), il suffit de vérifier que $\dim_{\tilde{x}}(\tilde{D} \cap \tilde{f}^{-1}(y)) = \dim_{\tilde{x}} \tilde{X} - 1$, π étant un isomorphisme hors de \tilde{D} .

4.2 Proposition 2 : Soit $f: X \xrightarrow{\sigma} Y$; l'ensemble des points $y \in Y$ tels que f admette une résolution simultanée faible (resp. forte, resp. à plat) au voisinage de $\sigma(y)$ contient un ouvert analytique dense de Y .

A nouveau, fixons une résolution des singularités $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ de X , telle que l'image réciproque du sous-espace singulier de X soit un diviseur à croisements normaux \tilde{D} de \tilde{X} . Nous pouvons imposer de plus que l'image réciproque de \tilde{Y}_1 soit un diviseur à croisements normaux de \tilde{X} , et raisonner comme dans la preuve de la proposition précédente, pour établir 4.2, en utilisant maintenant le fait que le morphisme $\tilde{Y}_1 \rightarrow Y_1$ est propre ($\tilde{Y}_1 = \pi^{-1}(Y_1)$). Si l'on veut, dans le cas "à plat" il suffit d'utiliser cette propriété et le théorème de platitude générale de Frisch [F], mais "à plat" résulte bien sûr de "forte".

4.3 Je vais maintenant faire un calcul qui me sera utile plus bas : supposons X de dimension pure $d+1$, et Y de dimension 1 pour alléger les notations. Pour examiner f au voisinage d'un point $0 \in X$, nous pouvons plonger localement X dans $Y \times \mathbb{C}^{n+1}$ pour quelque n , de telle façon que f apparaisse comme restriction à X de la première projection. Soient $f_i(v, z_0, \dots, z_n)$ des générateurs de l'idéal définissant $X \subset Y \times \mathbb{C}^{n+1}$ au voisinage de 0 ($1 \leq i \leq m$, $m \geq n-d+1$). Continuant de noter X un voisinage de 0 dans X , soit $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ une résolution simultanée très faible. Alors, en tout point $\tilde{x} \in \tilde{f}^{-1}(0)$ nous pouvons choisir un système de coordonnées locales $(\tilde{v}, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_d)$ tel que $\tilde{v} \circ \tilde{f} = \tilde{v}$, puisque \tilde{f} est lisse en \tilde{x} . Par ailleurs, $f_i \circ \pi = 0$ sur \tilde{X} , et donc

$$(*) \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{v}} (f_i \circ \pi) = 0 = \frac{\partial f_i}{\partial v} \circ \pi + \sum_{j=0}^n \frac{\partial f_i}{\partial z_j} \circ \pi \cdot \frac{\partial (z_j \circ \pi)}{\partial \tilde{v}} \quad (1 \leq i \leq m)$$

(égalité dans $\mathcal{O}_{\tilde{X}, \tilde{x}}$).

4.4 Proposition 3 : Soit $f: X \rightarrow Y$ plat, avec X réduit de dimension pure $d+k$ et Y lisse, de dimension k . Notons \mathfrak{J}_X l'idéal ("jacobien") définissant le sous-espace singulier de X (\mathfrak{J}_X peut être défini comme $(d+k)$ -ième idéal de Fitting ([H.I], §1) du module des différentielles Ω_X^1 de X). Notons $\mathfrak{J}_{X/Y}$ l'idéal ("jacobien relatif") d -ième idéal de Fitting du module des différentielles relatives $\Omega_{X/Y}^1$. L'idéal définissant le sous-espace singulier de la fibre X_y est $\mathfrak{J}_{X/Y} \cdot \mathcal{O}_{X_y}$.

Alors, il existe un ouvert analytique partout dense V de X , dont le complémentaire a une image de mesure nulle dans Y (et est un sous-espace analytique fermé strict si f est propre) tel que si $x \in V$, on ait :

$$\overline{\mathfrak{J}_X \cdot \mathcal{O}_{X,x}} = \overline{\mathfrak{J}_{X/Y} \cdot \mathcal{O}_{X,x}}$$

et donc en particulier :

$$\overline{\mathfrak{J}_X \cdot \mathcal{O}_{X_y,x}} = \overline{\mathfrak{J}_{X/Y} \cdot \mathcal{O}_{X_y,x}} = \overline{\mathfrak{J}_{X_y} \cdot \mathcal{O}_{X_y,x}}$$

où la barre désigne la fermeture intégrale des idéaux.

Preuve ♦ : Prenons pour V l'ouvert analytique construit en 4.1, et effectuons la construction de 4.3 au voisinage de $x \in V$ (pour $k=1$ disons) $\mathfrak{J}_X \cdot \mathcal{O}_{X,x}$ est

engendré par les $\frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_{n-d+1}})}{\partial(z_{j_1}, \dots, z_{j_{n-d+1}})} \mathcal{O}_{X,x}$ et les $\frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_{n-d+1}})}{\partial(v, z_{j_1}, \dots, z_{j_{n-d}})} \mathcal{O}_{X,x}$ et

$\mathfrak{J}_{X/Y} \cdot \mathcal{O}_{X,x}$ par les seuls $\frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_{n-d+1}})}{\partial(z_{j_1}, \dots, z_{j_{n-d+1}})} \cdot \mathcal{O}_{X,x}$.

Cependant, le calcul de 4.3 montre que :

$\frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_{n-d+1}})}{\partial(v, z_{j_1}, \dots, z_{j_{n-d}})} \circ \pi \in \mathfrak{J}_{X/Y} \cdot \mathcal{O}_{X,x}^{\sim}$ pour tout $x \in \pi^{-1}(x)$ ce qui montre que

$\mathfrak{J}_{X/Y} \cdot \mathcal{O}_{X|\pi^{-1}(V)}^{\sim} = \mathfrak{J}_X \cdot \mathcal{O}_{X|\pi^{-1}(V)}^{\sim}$ et le résultat, puisque deux idéaux qui deviennent égaux après un morphisme propre, surjectif et biméromorphe (ici $\pi^{-1}(V) \rightarrow V$) ont même clôture intégrale (cf. [L.T.]).

♦ Pour une bien meilleure démonstration, cf. [H.I], § 2, 2nd part.

4.5 Remarques : 1) Dans le cas particulier où $f: X \rightarrow Y$ est la famille des sections d'une hypersurface réduite $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{N+1}, 0)$ par des hyperplans passant par 0, j'avais déjà prouvé un résultat analogue à 4.4, d'abord dans le cas où X_0 est à singularité isolée ([C.E.W.] ch.I, 2.7) puis X_0 réduite ([H.I.]). C'est le résultat dit : " $\overline{j(F \cdot \mathcal{O}_H)}_{\mathcal{O}_{H,0}} = \overline{j(F) \cdot \mathcal{O}_{H,0}}$ ". Pour tout ceci, cf. [H.I.] §2, 2nd part.

2) On peut dire que 4.4 est un "Théorème de Bertini idéalisé" puisque le théorème de Bertini-Sard nous fournit seulement un V tel que si $x \in V$, $\sqrt{\mathfrak{J}_X \cdot \mathcal{O}_{X_y, x}} = \sqrt{\mathfrak{J}_{X/Y} \cdot \mathcal{O}_{X_y, x}}$ ($y = f(x)$) ce qui est un résultat beaucoup moins fin que l'égalité des clôtures intégrales.

4.6 Proposition 4 : Soit $f: X \xrightarrow{\sigma} Y$ tel que X soit une hypersurface dans $Y \times \mathbb{C}^{N+1}$ ($N = d$). Alors, notant X^0 l'ouvert des points lisses de X :

- 1) si f admet une résolution simultanée faible le long de Y_1 , $(X^0 - Y_1, Y_1)$ satisfait la condition a) de Whitney.
- 2) Si f admet une résolution simultanée forte le long de Y_1 , $(X^0 - Y_1, Y_1)$ satisfait les conditions a) et b) de Whitney. [Le cas intéressant est celui où $Y_1 \subset \text{Sing } X$, donc $X^0 - Y_1 = X^0$.]

Preuve de 1) : Soit $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ la résolution simultanée en question, et $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Supposons $Y = \mathbb{D}$ pour simplifier (le calcul est le même en général). Le calcul de 4.3 nous montre que si $F(v, z_0, \dots, z_n) = 0$ définit $X \subset \mathbb{D} \times \mathbb{C}^{n+1}$ au voisinage de $\pi(\tilde{x})$, nous avons :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial v} \circ \pi \right)_{\tilde{x}} \in \sqrt{S \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}, \tilde{x}}} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial z_0} \circ \pi, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_n} \circ \pi \right)_{\tilde{x}} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}, \tilde{x}} \quad .$$

En effet, par définition de la résolution faible, avec $S = (z_0, \dots, z_n)$, nous pouvons choisir \tilde{v} , coordonnée locale sur (\tilde{X}, \tilde{x}) telle que $v \circ \pi = \tilde{v}$ et que $D = \frac{\partial}{\partial \tilde{v}}$ respecte $\sqrt{S \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}, \tilde{x}}}$, donc en particulier :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{v}} (z_j \circ \pi) \in \sqrt{S \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}, \tilde{x}}} \quad .$$

Prenons maintenant un disque d'épreuve $h: (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (X, x)$ (où $x \in Y_1$) tel que $h(\mathbb{D} - \{0\}) \subset X^0$. La propriété universelle de l'éclatement jointe au fait que π est un isomorphisme au-dessus de X^0 , nous permet de factoriser h en

$(\mathbb{D}, 0) \xrightarrow{\tilde{h}} (\tilde{X}, \tilde{x}) \xrightarrow{\pi} (X, x)$ où $\tilde{x} \in \tilde{Y}_1$. On en déduit que si v désigne la valuation naturelle de $\mathcal{O}_{\mathbb{D}, 0}$, on a :

$$v\left(\frac{\partial F}{\partial v} \circ h\right) = v\left(\frac{\partial F}{\partial v} \cdot \mathcal{O}_{X,x}^{\sim} \circ \tilde{h}\right) \geq v(\sqrt{S} \cdot \mathcal{O}_{X,x}^{\sim} \circ \tilde{h}) + v(\mathfrak{J}_{X/Y} \circ h)$$

(où $\mathfrak{J}_{X/Y} = \left(\frac{\partial F}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_n}\right)_{\mathcal{O}_{X,x}}$).

D'où $v\left(\frac{\partial F}{\partial v} \circ h\right) > \min_{i=0}^n \left\{v\left(\frac{\partial F}{\partial z_i} \circ h\right)\right\}$ pour tout $h: (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (X, x)$ tel que $h(\mathbb{D} - \{0\}) \subset X^0$

ce qui est précisément l'expression analytique de la condition a) de Whitney pour $(X^0 - Y_1, Y_1)$ (voir [C.E.W.], ch. II, § 3, [Z₂]).

Preuve de 2) : Remarquons maintenant que si $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ était en fait une résolution simultanée forte, nous pouvons supposer que :

$$\frac{\partial}{\partial v}(S \cdot \mathcal{O}_{X,x}^{\sim}) \subset S \cdot \mathcal{O}_{X,x}^{\sim} \text{ pour tout } \tilde{x} \in \tilde{X} \text{ ,}$$

et nous avons donc par (*) de 4.3

$$\left(\frac{\partial F}{\partial v} \circ \pi\right)_{\tilde{x}} \in \left(\frac{\partial F}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_n}\right) \cdot (z_0, \dots, z_n)_{\mathcal{O}_{X,x}^{\sim}}$$

puisque $\frac{\partial}{\partial v}(z_i \circ \pi) \in (z_0, \dots, z_n)_{\mathcal{O}_{X,x}^{\sim}}$. De ceci nous déduisons :

(**) $\frac{\partial F}{\partial v} \mathcal{O}_{X,x} \in \overline{S \cdot J} \cdot \mathcal{O}_{X,x}$ pour tout $x \in Y_1$

où $J = \left(\frac{\partial F}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_n}\right)_{\mathcal{O}_{X,x}}$.

Or, on a ([H.I.], § 3) :

4.6.1 Lemme : La condition (**) implique que $(X^0 - Y_1, Y_1)$ satisfait les conditions a) et b) de Whitney.

Preuve : En ce qui concerne la condition a), c'est encore plus facile que la preuve précédente : en effet, pour tout $h: (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (X, Y_1)$ nous avons ici $v\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right) \geq v(S \circ h) + v(J \circ h) > v(J \circ h)$ (par le critère valuatif de dépendance intégrale).

En ce qui concerne la condition b), il faut montrer que pour tout disque d'épreuve $h: (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (X, X_1)$, on a, en notant encore v la valuation naturelle de $\mathcal{O}_{\mathbb{D}, 0}$:

$$v\left(\sum_{i=0}^n z_i \circ h \cdot \frac{\partial F}{\partial z_i} \circ h\right) > v(S \cdot J \circ h) \text{ .}$$

La démonstration que voici, plus courte que ma démonstration originale, m'a été communiquée par J. Lipman :

Nommons t la coordonnée locale sur $(\mathbb{D}, 0)$, et $v_0 = v(S \circ h) = \min_i (v(z_i \circ h))$
 $\mu_0 = v(J \circ h) = \min_i (v(\frac{\partial F}{\partial z_i} \circ h))$. On peut donc écrire :

$$z_i \circ h = a_i t^{\nu_0} + \dots \quad (0 \leq i \leq n)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_i} \circ h = b_i t^{\mu_0} + \dots \quad (0 \leq i \leq n)$$

et :

$$\left(\sum_{i=0}^n z_i \frac{\partial F}{\partial z_i} \right) \circ h = \left(\sum_{i=0}^n a_i b_i \right) t^{\mu_0 + \nu_0} + \dots$$

or $\nu_0 + \mu_0 = v(S \cdot J \circ h)$ et il s'agit donc de montrer que $\sum_{i=0}^n a_i b_i = 0$; mais puisque $h(\mathbb{D}) \subset X$, $f \circ h = 0$ et donc :

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial F}{\partial z_i} \circ h \cdot \frac{d(z_i \circ h)}{dt} + \frac{\partial F}{\partial v} \circ h = 0$$

Donc :

$$-\frac{\partial F}{\partial v} \circ h = \nu_0 \left(\sum_{i=0}^n a_i b_i \right) t^{\mu_0 + \nu_0 - 1} + \dots$$

et notre hypothèse (**) entraîne par le critère valuatif de dépendance intégrale :
 $v(\frac{\partial F}{\partial v} \circ h) \geq v(S \cdot J \circ h) = \mu_0 + \nu_0$, il faut donc $\sum a_i b_i = 0$, Q.E.D.
 Ceci achève la preuve de 4.6.

4.7 Remarque : La réciproque de l'assertion 1) de 4.6 est fautive, comme le montre la famille $z_1^2 - z_0^3 + v^2 z_0^2 = 0$ (cf. 1.2.2).

4.8 Question : Si $f : X \xrightarrow{\sigma} Y$ est une famille d'hypersurfaces à singularité isolée, est-ce que l'existence d'une résolution faible de f implique que le nombre de Milnor $\mu^{(N+1)}(X_y, \sigma(y))$ des fibres est constant ? Il est connu que ceci implique la condition a) de Whitney (et même la condition a_f de Mather, cf. [C.E.W.], ch. II, §3). Par ailleurs, dans ce cas des singularités isolées, il est connu que résolution forte \Rightarrow Whitney (4.6) $\Rightarrow \mu^{(N+1)}$ constant (et même μ^* constant, après un travail de Briançon-Speder) (proposé aux Annales de l'Institut Fourier). [On rappelle qu'à toute singularité isolée d'hypersurface $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, on associe la suite d'entiers $\mu^*(X, 0) = (\mu^{(n+1)}(X, 0), \dots, \mu^{(1)}(X, 0), \mu^{(0)}(X, 0))$ où $\mu^{(i)}(X, 0)$ est le nombre de Milnor de l'intersection de $(X, 0)$ avec un i -plan général de $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. Il est

connu que " μ^* constant" implique que $(X - Y_1, Y_1)$ satisfait la condition d'incidence de Whitney le long de Y_1 , cf. [C.E.W.] et [H.I.] pour tout ceci.]

4.9 En fait, il résulte d'une formule de Laufer [Lf] que dans le cas d'une famille d'hypersurfaces de \mathbb{C}^3 , résolution simultanée faible implique $\mu^{(3)}(X_t)$ constant. Or, dans les deux exemples de 3.1.4, dus à Briançon et Speder, on a $\mu^{(3)}(X_t)$ constant mais pas $\mu^{(2)}(X_t)$ constant et l'on a une résolution simultanée faible, qui n'est pas résolution simultanée forte : nous avons vu plus haut que résolution simultanée forte $\Rightarrow \mu^*$ constant, ce qui montre qu'aucune des deux familles ne saurait avoir une résolution simultanée forte. Par ailleurs, Briançon et Speder ont donné l'exemple d'une famille X de surfaces satisfaisant $\mu^*(X_t)$ constant, mais pour laquelle le discriminant Δ d'aucune projection transversale $X \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$ n'était une famille équisingulière de courbes planes :

$$z_2^3 + tz_0^4 z_2 + z_1^6 + z_0^6 = 0 \quad .$$

Pour obtenir une éventuelle résolution simultanée à la Hironaka de S , il faut commencer par éclater l'idéal $S = (z_0, z_1, z_2) \mathcal{O}_X$ définissant l'axe des t , le long duquel X est normalement plat puisque équivariant (au vu du fait que X est une hypersurface). Or dans une carte, l'éclatement en question a pour équation

$$z_2'^3 + tz_0'^2 z_2' + z_0'^3 (1 + z_1'^6) = 0 \quad .$$

Or, cette variété de dimension 3 contient dans son lieu singulier le plan des (z_1', t) et peut (hors de $z_1' = 0$) être considéré comme une famille (à deux paramètres) de courbes planes. Si notre famille originelle avait une résolution simultanée forte à la Hironaka, cette famille de courbes planes devrait être équisingulière (au moins hors de $z_1' = 0$). Hors il n'en est rien, puisque les fibres de la rétraction évidente $X' \rightarrow \mathbb{C}^2(t, z_1')$ sont réduites et topologiquement équivalentes à la réunion de trois droites si $t \neq 0$, quel que soit z_1' , et non réduites pour $t = 0$, $1 + z_1'^6 = 0$. Cet exemple montre qu'une famille de surfaces à μ^* constant n'a pas nécessairement une résolution simultanée forte obtenue par le procédé de Hironaka.

On trouvera d'autres exemples pertinents dans l'article de Wahl [Wa].

4.10 Finalement, nous avons vu :

Si $n = 1$: résolution simultanée faible équivalent à $\delta(X_y)$ constant (cf. Résolution simultanée I).

Si $n = 2$: 1) résolution simultanée très faible avec fibre générale non singulière
 \Rightarrow fibre spéciale point double rationnel ;

- 2) résolution simultanée faible dans une famille d'hypersurfaces \Rightarrow
 $\mu^3(X_t)$ constant (i.e. $H_3(f,0) = 0$) mais n'entraîne pas $\mu^*(X_t)$ constant.

Pour tout n : 1) résolution simultanée forte $\Rightarrow \mu^*(X_t)$ constant.

- 2) $\mu^*(X_t)$ constant n'entraîne pas résolution simultanée à la Hironaka et forte.

4.10.1 Questions : a) Chercher si : $\mu^{(n+1)}(X_t)$ constant entraîne résolution simultanée faible ($n \geq 2$).

b) Chercher si : $\mu^*(X_t)$ constant entraîne résolution simultanée forte, ou au moins faible.

c) Chercher si, en général et pas seulement dans le cas des hypersurfaces, l'existence d'une résolution simultanée forte pour $f : (X,0) \rightarrow (Y,0)$ le long de Y_1 entraîne la même chose pour l'intersection de X avec un hyperplan "assez général" passant par Y_1 , pour un plongement $X \subset Y \times \mathbb{C}^{n+1}$.
 A défaut, chercher si résolution simultanée forte entraîne équimultiplicité.

5. Démonstration algébrique du fait que la constance de $\mu^{(2)}(X_t)$ dans une famille $f : X \rightarrow Y$ de courbes planes entraîne l'existence d'une résolution simultanée forte. Quelques conséquences et faits connexes.

5.0.1 Dans tout ce qui suit, on s'intéresse à un représentant assez petit d'un morphisme $f : (X,0) \rightarrow (Y,0)$ dont les fibres sont des courbes réduites. Si l'on s'est donné de plus une section $\sigma : Y \rightarrow X$ de f , pour chaque $y \in Y$, on notera r_y le nombre des composantes analytiquement irréductibles du germe de courbe $(X_y, \sigma(y))$, δ_y l'invariant $\delta(X_y, \sigma(y))$ (cf. Résol. Sim. I) et si les fibres sont des intersections complètes, en particulier des courbes planes, μ_y le nombre de Milnor $\mu(X_y, \sigma(y))$.

5.1 μ_y est constant si et seulement si δ_y et r_y le sont.

5.1.0 Proposition : Soit $f : X \xrightarrow{\sigma} Y$ une famille analytique complexe de germes de courbes planes réduites, où Y est réduit. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) μ_y est constant (localement sur Y)
- 2) δ_y et r_y sont constants (localement sur Y).

Démonstration : On dispose de l'égalité :

$$2\delta_y = \mu_y + r_y - 1$$

(cf. [Mi₁], [Ri] pour les courbes planes, [G] et [B] pour les intersections complètes),

et il suffit donc de montrer que la constance de μ_y entraîne celle de δ_y . Comme les conditions ne portent que sur les fibres, et que l'application $y \mapsto \delta_y$ est constructible (résulte facilement de Résol. sim. I) on peut, par un "lemme de sélection d'une courbe" usuel, se ramener au cas où Y est non-singulier et de dimension 1 : supposons donc $Y = \mathbb{D}$, et plongeons X dans $\mathbb{D} \times \mathbb{C}^2$, de telle façon que $\sigma(\mathbb{D}) = \mathbb{D} \times \{0\}$ (ceci bien sûr dans un voisinage de $0 \in X$).

L'idée de la démonstration est qu'il suffit de démontrer la semi-continuité supérieure de $\mu_y - \delta_y$ comme fonction de y . Or $\mu_y - \delta_y = \delta_y - r_y + 1$, et donc il suffit de montrer que si μ_y est constant, on a : $\delta_0 - r_0 \geq \delta_y - r_y$ ($y \in \mathbb{D}$), ou encore, $\delta_0 - \delta_y \geq r_0 - r_y$.

Notons R_0 le nombre de composantes irréductibles de X en 0 , et R_y le nombre des composantes irréductibles du germe de X au point $y \times \{0\}$ ($y \in \mathbb{D}$). Pour un choix convenable du représentant de f , R_y est indépendant de $y \in \mathbb{D}^* = \mathbb{D} - \{0\}$. Ceci résulte par exemple de l'existence d'une résolution simultanée forte au-dessus de \mathbb{D}^* (cf. 4.2) et du fait que R_y est égal au nombre de points dans une fibre d'une telle résolution, au vu du fait que celle-ci doit coïncider avec la normalisation (Résol. sim. I). Le même argument montre que $R_y = r_y$ pour $y \in \mathbb{D}^*$, et en écrivant la décomposition en facteurs irréductibles d'une équation pour $X \subset \mathbb{D} \times \mathbb{C}^2$, on voit aussitôt que $R_0 \leq r_0$.

5.1.1 Lemme : Si μ_y est constant, on a $R_0 \leq R_y$ ($y \in \mathbb{D}$).

Démonstration : Soit dans $\mathbb{C}\{y, z_0, z_1\}$, une équation $F(y, z_0, z_1) = 0$ définissant $X \subset \mathbb{D} \times \mathbb{C}^2$. F admet une décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}\{y, z_0, z_1\}$

$$F = F_1 \dots F_{R_0} \quad (\text{aucun } F_i \text{ inversible})$$

et pour démontrer le lemme, il suffit de prouver que pour tout i , $1 \leq i \leq R_0$, on a $F_i(y, 0, 0) \equiv 0$. En effet il en résultera que le germe de F au point $y \times \{0\}$ admet encore la décomposition écrite ci-dessus, d'où aussitôt $R_y \geq R_0$. Or il existe sûrement un indice i , disons $i = 1$, tel que $F_1(y, 0, 0) \equiv 0$ puisque par hypothèse $F(y, 0, 0) \equiv 0$. Pour obtenir une contradiction, soit i un indice tel que $F_i(y, 0, 0) \not\equiv 0$. L'intersection de $F_1 = 0$ et $F_i = 0$ est une courbe contenue dans le lieu singulier de X , et distincte de $\mathbb{D} \times \{0\}$. Or l'hypothèse μ_y constant implique que le lieu singulier de X coïncide avec $\mathbb{D} \times \{0\}$ (cf. condition 2) de 2.3.1), d'où la contradiction cherchée.

5.1.2 Lemme : Si μ_y est constant, on a le diagramme d'inégalités et égalités, pour tout $y \in \mathbb{D}$:

$$\begin{array}{ccc} r_o & \geq & R_o \\ \vee & & \wedge \\ r_y & = & R_y \end{array} .$$

Preuve : La seule inégalité non encore démontrée est : $r_o \geq r_y$, mais elle résulte aussitôt de la semi-continuité de δ_y (i.e. $\delta_o \geq \delta_y$, cf. Résol. sim. I) au vu de l'égalité $2\delta_y = \mu_y + r_y - 1$.

5.1.3 Lemme : Si μ_y est constant, on a l'inégalité : $\delta_o - \delta_y \geq r_o - R_o$.

Démonstration : Posons $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X,0}$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{D},0} = \mathbb{C}\{y\}$: D'après la première proposition de Résol. sim. I, on a :

$$\delta_o - \delta_y = \delta((\bar{X})_o)$$

où $n : \bar{X} \rightarrow X$ est la normalisation de la surface X , et $(\bar{X})_o$ désigne la fibre au-dessus de 0 du morphisme composé $\bar{X} \rightarrow X \rightarrow \mathbb{D}$.

La courbe $(\bar{X})_o$ est composée de $R_o = \# n^{-1}(0)$ germes de courbes $(\bar{X})_{o,i}$, et sa normalisée qui coïncide avec \bar{X}_o (Résol. sim. I) est composée de r_o germes de courbes non singulières. Notons e_i ($1 \leq i \leq R_o$) la multiplicité en son unique point singulier, du i -ème germe $(\bar{X})_{o,i}$ apparaissant dans $(\bar{X})_o$. On a :

$$\begin{array}{c} R_o \\ \sum_{i=1} e_i \geq r_o \end{array} ,$$

puisque chaque germe apparaissant dans \bar{X}_o provient d'un germe apparaissant dans $(\bar{X})_o$, donc contribuant au moins une unité à un des e_i . Par ailleurs, pour un germe de courbe réduite $(C,0)$ de multiplicité e , on a toujours $\delta(C,0) \geq e - 1$.

En effet soit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{C,0}$ et soit $\bar{\mathcal{O}} = \prod_{i=1}^r \mathbb{C}\{t_i\}$ sa normalisation. Soit n_i l'ordre minimum atteint par l'image de $m \subset \mathcal{O}$ dans $\mathbb{C}\{t_i\}$. On a $\sum_{i=1}^r n_i = e$ puisque

$m \cdot \bar{\mathcal{O}} = (t_i^{n_i})$. Par ailleurs les $e-1$ éléments obtenus comme suit : $a_1 = (1,0,\dots,0)$, $a_2 = (1,1,0,\dots,0)$, ..., $a_{r-1} = (1,1,1,\dots,1,0)$, puis $b_{i,j} = (0,\dots,0,t_i^j,0,\dots,0)$ avec $1 \leq i \leq r$, $0 < j < n_i$, sont clairement indépendants modulo \mathcal{O} , d'où l'inégalité

annoncée puisque les $b_{i,j}$ sont en nombre $\sum_{i=1}^r n_i - r$. Ecrivons $(\bar{X})_o = \bigcup_{i=1}^{R_o} (\bar{X})_{o,i}$,

et utilisons l'additivité de δ ; nous venons de justifier chacune des égalités et inégalités que voici :

$$\delta_o - \delta_y = \delta((\bar{X})_o) = \sum_{i=1}^{R_o} \delta((\bar{X})_{o,i}) \geq \sum_{i=1}^{R_o} (e_i - 1) \geq r_o - R_o .$$

5.1.4 Remarque : Joseph Lipman m'a proposé [Li₂] une démonstration plus directe de 5.1.3, que voici : tout d'abord on remarque qu'il suffit de démontrer que pour un anneau local de dimension 1, disons \mathcal{O}_o , on a :

$\delta(\mathcal{O}_o) = \dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{O}}_o / \mathcal{O}_o \geq r_o - 1$: on applique cette inégalité à chacun des R_o germes constituant $(\bar{X})_o$, et on fait la somme. Or on a : $r_o \leq \dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{O}}_o / m_o \cdot \bar{\mathcal{O}}_o$ puisque certainement chaque point de $n^{-1}(0)$ contribue au moins une copie de \mathbb{C} dans le quotient. D'où $r_o \leq \dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{O}}_o / m_o \cdot \bar{\mathcal{O}}_o \leq \dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{O}}_o / m_o = \delta_o + 1$.

Fin de la preuve de 5.1.0 : Nous savons déjà (Résol. sim. I) que $\delta_o \geq \delta_y$. Il suffit donc de montrer $\delta_o \leq \delta_y$. Or nous avons vu que ceci équivalait à :

$\mu_y - \delta_y \geq \mu_o - \delta_o$, et, que ceci équivalait à $\delta_o - \delta_y \geq r_o - r_y$. Nous avons : $R_o \leq r_y$ (5.1.2), donc 5.1.3 nous donne

$$\delta_o - \delta_y \geq r_o - R_o \geq r_o - r_y ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

5.2 Une nouvelle écriture de $\delta_o = \dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{O}}_o / \mathcal{O}_o$ pour l'algèbre \mathcal{O}_o d'un germe de courbe plane réduite.

5.2.1 Proposition : Soit \mathcal{O} l'algèbre d'un germe de courbe plane réduite $(X_o, 0)$. Considérons les multi-germes $(\bar{X}_o, n^{-1}(0))$ et $(\bar{X}_o \times \bar{X}_o, n^{-1}(0) \times n^{-1}(0))$ correspondant à l'algèbre semi-locale $\bar{\mathcal{O}}_o \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{O}}_o$ (où $\hat{\otimes}$ désigne le "produit tensoriel analytique"), ici $n^{-1}(0)$ est un espace analytique fini, fibre de la normalisation $n : \bar{X}_o \rightarrow X_o$ de X_o , et $\bar{\mathcal{O}}_o$ désigne le normalisé de \mathcal{O}_o .

Soit I_o le noyau de la surjection canonique

$$\bar{\mathcal{O}}_o \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{O}}_o \longrightarrow \bar{\mathcal{O}}_o \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_o} \bar{\mathcal{O}}_o \longrightarrow 0$$

correspondant à l'immersion localement fermée : $\bar{X}_o \times_{X_o} \bar{X}_o \rightarrow \bar{X}_o \times \bar{X}_o$. Alors on

peut écrire $I_o = K_o \cdot \mathfrak{N}_o$, où K_o est un idéal inversible, \mathfrak{N}_o un idéal de multiplicité au sens de Samuel $e(\mathfrak{N}_o)$ finie (ou de colongueur finie, si l'on préfère) de $\bar{\mathcal{O}}_o \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{O}}_o$, et l'on a :

$$e(\mathfrak{N}_o) = 2\delta_o ,$$

où $\delta_0 = \dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{O}}_0 / \mathcal{O}_0$.

5.2.2 Première démonstration : Montrons d'abord que 5.2.1 est vraie quand X_0 est irréductible, i.e. \mathcal{O}_0 intègre. Alors $\bar{\mathcal{O}}_0 \simeq \mathbb{C}\{t\}$, et pour tout choix d'un système de générateurs (z_0, z_1) de l'idéal maximal de \mathcal{O}_0 , l'inclusion $\mathcal{O}_0 \subset \bar{\mathcal{O}}_0$ s'écrit $\mathcal{O}_0 \simeq \mathbb{C}\{z_0(t), z_1(t)\}$ avec $z_0(t), z_1(t) \in \mathbb{C}\{t\}$. De plus, $\bar{\mathcal{O}}_0 \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{O}}_0 \simeq \mathbb{C}\{t, t'\}$, et $I_0 \simeq (z_0(t) - z_0(t'), z_1(t) - z_1(t')) \cdot \mathbb{C}\{t, t'\}$. On peut bien écrire

$$I_0 = (t - t') \left(\frac{z_0(t) - z_0(t')}{t - t'}, \frac{z_1(t) - z_1(t')}{t - t'} \right) \mathbb{C}\{t, t'\}, \text{ et, posant}$$

$$K_0 = (t - t') \mathbb{C}\{t, t'\}, \quad \mathfrak{N}_0 = \left(\frac{z_0(t) - z_0(t')}{t - t'}, \frac{z_1(t) - z_1(t')}{t - t'} \right) \mathbb{C}\{t, t'\}, \text{ il nous}$$

faut montrer que $e(\mathfrak{N}_0) = 2\delta_0$.

Remarquons d'abord que \mathfrak{N}_0 ne dépend pas du choix des générateurs (x, y) de l'idéal maximal de \mathcal{O}_0 . Nous pouvons choisir (x, y) de telle façon que $v(z_0(t)) = n_0 < v(z_1(t))$, où v désigne la valuation t -adique,

et, par un choix convenable de l'uniformisante locale t de $\bar{\mathcal{O}}_0$, écrire : $z_0(t) = t^{n_0}$; $z_1(t) = t^{m_0} \cdot u(t)$ avec $m_0 > n_0$ et $u(0) \neq 0$. La théorie des multiplicités nous fournit alors :

$$(*) \quad e(\mathfrak{N}_0) = \sum_{\alpha \in \mu_n - \{1\}} v \left(\frac{z_1(t) - z_1(\alpha \cdot t)}{(1 - \alpha)t} \right) \quad (\mu_n = \{\alpha \in \mathbb{C}/\alpha^n = 1\}).$$

Soit maintenant $\mathcal{O}'_0 \subset \mathbb{C}\{t\}$ l'algèbre locale de la courbe X'_0 obtenue par éclatement de l'origine dans X_0 , en l'unique point de X'_0 se projetant sur $0 \in X_0$.

Puisque $m_0 > n_0$, $\mathcal{O}'_0 \cong \mathbb{C}\{t^{n_0}, t^{m_0 - n_0} u(t)\}$, et l'idéal \mathfrak{N}'_0 correspondant à \mathcal{O}'_0 est :

$$\mathfrak{N}'_0 = \left(\frac{t^{n_0} - t'^{n_0}}{t - t'}, \frac{t^{m_0 - n_0} \cdot u(t) - t'^{m_0 - n_0} \cdot u(t')}{t - t'} \right) \mathbb{C}\{t, t'\}.$$

On vérifie immédiatement, en utilisant (*) pour \mathfrak{N}'_0 , que $e(\mathfrak{N}'_0) = e(\mathfrak{N}_0) - n_0(n_0 - 1)$. Il est par ailleurs connu (voir $[H_3]$ th. 1) que

$$2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{O}}_0^1 / \mathcal{O}'_0 = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{O}}_0 / \mathcal{O}_0 - n_0(n_0 - 1),$$

et l'on en déduit le résultat cherché par récurrence sur le nombre d'éclatements nécessaire pour normaliser \mathcal{O}_0 .

5.2.3 Passons maintenant au cas réductible ; $\bar{\mathcal{O}}_0 \cong \prod_{i=1}^r \mathbb{C}\{t_i\}$ et donc

$\bar{\mathcal{O}}_0 \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{O}}_0 \cong \prod_{i,j} \mathbb{C}\{t_i, t_j\}$, chaque composante irréductible $(X_{0,i}, 0)$ de $(X_0, 0)$ étant

paramétrée par $(z_0(t_i), z_1(t_i)) \in \mathbb{C}\{t_i\}$.

Il nous suffit de considérer l'idéal $I_{o,i,j}$ induit par I_o dans chaque $\mathbb{C}\{t_i, t'_j\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{o,i,i} = (t_i - t'_i) \left(\frac{z_0(t_i) - z_0(t'_i)}{t_i - t'_i}, \frac{z_1(t_i) - z_1(t'_i)}{t_i - t'_i} \right) \mathbb{C}\{t_i, t'_i\} \\ I_{o,i,j} = (z_0(t_i) - z_0(t'_j), z_1(t_i) - z_1(t'_j)) \mathbb{C}\{t_i, t'_j\} \quad (i \neq j) . \end{array} \right.$$

Nous avons bien $I_{o,i,i} = K_{o,i,i} \cdot \mathfrak{N}_{o,i,i}$, où $K_{o,i,i}$ est inversible et $e(\mathfrak{N}_{o,i,i}) = 2\delta_{o,i,i}$, $\delta_{o,i,i}$ étant l'invariant δ de l'algèbre $\mathcal{O}_{o,i}$ du germe $(X_{o,i}, 0)$. Calculons maintenant $e(\mathfrak{N}_{o,i,j})$, où $\mathfrak{N}_{o,i,j} = I_{o,i,j}$, pour $j \neq i$. Je dis que $e(\mathfrak{N}_{o,i,j}) = (X_{o,i} \cdot X_{o,j})_o$, nombre d'intersection en 0 des deux germes de courbes irréductibles $(X_{o,i}, 0)$ et $(X_{o,j}, 0)$. Il est en effet facile de vérifier par un calcul direct que si l'on désigne par $X'_{o,i}$ et $X'_{o,j}$ les courbes obtenues par éclatement à l'origine, elles ont au plus un point commun $0'$ dans l'espace $(\mathbb{C}^2)'$ obtenu par éclatement de l'origine dans \mathbb{C}^2 , et si l'on désigne par $\mathfrak{N}'_{o,i,j}$ l'idéal analogue à $\mathfrak{N}_{o,i,j}$ construit pour $X'_{o,i}$ et $X'_{o,j}$ au voisinage de $0'$, on a :

$$e(\mathfrak{N}'_{o,i,j}) = e(\mathfrak{N}_{o,i,j}) - n_{o,i} \cdot n_{o,j}$$

où $n_{o,i}$ est la multiplicité de $(X_{o,i}, 0)$. (La preuve est analogue à celle donnée dans le cas irréductible, et laissée au lecteur.)

Or il est bien connu que $(X_{o,i} \cdot X_{o,j})_o$ est la somme des produits des multiplicités de $X_{o,i}$ et $X_{o,j}$ en tous les points infiniment voisins de 0 communs à $X_{o,i}$ et $X_{o,j}$. Donc finalement

$$e(\mathfrak{N}_o) = \sum_{i=r}^r 2\delta_{o,i} + \sum_{i,j} (X_{o,i} \cdot X_{o,j})_o$$

et nous trouvons bien, d'après ($[H_3]$ prop. 4 ; $[Mi_1]$ p. 93), $e(\mathfrak{N}_o) = 2\delta_o$.

5.2.4 Remarque : Puisque $\bar{\mathcal{O}}_o \otimes_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{O}}_o \simeq \prod_{i,j} \mathbb{C}\{t_i, t'_j\}$ est de Cohen Macaulay, d'après un théorème de Samuel ($[Sa]$) :

$$e(\mathfrak{N}_o) = \dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{O}}_o \otimes_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{O}}_o / \mathfrak{N}_o .$$

5.2.5 Remarque : Si nous ne supposons plus que X_o soit un germe de courbe plane, il résulte aisément d'un autre théorème de Samuel (loc. cit.) que l'on a la même écriture $I = K \cdot \mathfrak{N}_o$, avec

$$e(\mathfrak{N}_0) = 2\dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{O}}'_0 / \mathcal{O}'_0 = 2\dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{O}}_0 / \mathcal{O}'_0 \quad ,$$

où $\mathcal{O}'_0 \subset \mathcal{O}_0$ est l'algèbre d'une projection plane "suffisamment générale" de $(X_0, 0)$.

5.2.6 La démonstration précédente s'applique évidemment à toute courbe algébrique géométriquement réduite sur un corps \bar{k} algébriquement clos (i.e. quotient \mathcal{O}_0 de $\bar{k}[[X, Y]]$ par un idéal principal (f) tel que $\bar{k}[[X, Y]]/(f)$ soit réduit), en remplaçant le produit tensoriel analytique par le produit tensoriel complété.

5.2.7 Autre démonstration de 5.2.1 : Je vais donner, en géométrie analytique complexe, une autre démonstration de 5.2.1, utilisant (Rés. Sim. I, th.1'). Cette démonstration est beaucoup plus conceptuelle que la précédente, mais un peu moins facile à transcrire en géométrie algébrique, en raison de son caractère semi-local, et c'est pour ceci que j'ai voulu donner les deux.

Par ailleurs, le lemme ci-dessous a son intérêt propre.

5.2.8 Lemme : Reprenons les notations de 5.2.3, et soient $\tilde{z}_0, \tilde{z}_1 \in \prod_{i=1}^r \mathbb{C}\{t_i\}$, fournissant un morphisme de multi-germes $\bigsqcup_{i=1}^r (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ dont l'image est une courbe $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ réduite. On identifie $\bigsqcup_{i=1}^r (\mathbb{C}, 0)$ à $(\bar{X}_0, n^{-1}(0))$. Pour chaque choix de $(\alpha_i, \beta_i)_{1 \leq i \leq r} \in (\mathbb{C}^2)^r$, considérons la famille de paramétrisations (elle-même paramétrée par $(Y, 0) = (\mathbb{C}, 0)$ de coordonnée y_1) donnée par :

$$(*) \quad (\tilde{z}_0(t_i) - \alpha_i y_1 t_i) \quad , \quad (\tilde{z}_1(t_i) - \beta_i y_1 t_i) \in \prod_{i=1}^r \mathbb{C}\{t_i\} \quad .$$

Pour presque tout choix de $(\alpha_i, \beta_i)_{1 \leq i \leq r} \in (\mathbb{C}^2)^r$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $y \in U - \{0\}$, où $U = \{y \in (Y, 0) / |y_1| < \varepsilon\}$, la courbe-fibre X_y (donnée par (*) avec $y_1 =$ coordonnée de $y \in U - \{0\}$) n'ait comme singularités au voisinage de 0 que des points doubles ordinaires, en nombre $\delta_0 = \dim_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{O}}_{X,0} / \mathcal{O}_{X,0}$.

Démonstration : Tout d'abord, il résulte de Résol. sim. I que si X_y n'a que des points doubles ordinaires, le nombre de ceux-ci est δ_0 , puisque l'invariant δ attaché à un point double ordinaire vaut 1. Par ailleurs, souvenons-nous que

$\tilde{z}_0, \tilde{z}_1 \in \prod_{i=1}^r \mathbb{C}\{t_i\}$ signifie que $\tilde{z}_0 = (z_0(t_i))$, $\tilde{z}_1 = (z_1(t_i))$, où $(z_0(t_i), z_1(t_i))$

est une paramétrisation pour la i -ème composante irréductible de $(X_0, 0)$. Nous pouvons considérer la courbe non singulière $\Gamma \subset \bar{X}_0 \times \mathbb{C}^2$, graphe de

$(\bar{X}_0, n^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, c'est-à-dire la courbe de $(\prod_{i=1}^r (\mathbb{D}, 0)_i) \times (\mathbb{C}^2, 0)$ (où $(\mathbb{D}, 0)_i$ est muni de la coordonnée t_i , et \mathbb{C}^2 des coordonnées z_0, z_1) décrite par $(\tilde{z}_0, \tilde{z}_1)$ et " $t_i = t'_i$ ". La courbe décrite par (*), pour une valeur donnée de y_1 , n'est autre que la projection de Γ sur un 2-plan "parallèlement à r directions de droites" (une dans chaque $(\mathbb{D}, 0)_i \times (\mathbb{C}^2, 0)$) données par $(y_1^{\alpha_i}, y_1^{\beta_i}, 1)$. Il suffit maintenant d'utiliser l'argument usuel de dimension de l'espace des sécantes, pour montrer que l'ensemble des multi-directions de droites (Δ_i) , $\Delta_i \in \mathbb{P}^2$, telles que la projection de Γ "parallèlement à $(\Delta_i)_{1 \leq i \leq r}$ " ait d'autres singularités que des points doubles ordinaires, est de codimension 1 dans l'espace des multi-directions, ce qui suffit pour prouver 5.2.8.

5.2.9 Choisissons maintenant $0 < |y_1| < \varepsilon$, pour un choix assez général des (α_i, β_i) , et considérons l'idéal I_y de 4.1 associé à la courbe X_y . En fait, X_y est paramétrisée par (*) et donc nous pouvons à nouveau écrire $I_y = K_y \cdot \mathfrak{N}_y$ où I_y, K_y, \mathfrak{N}_y sont des idéaux de $\mathcal{O}_{\bar{X}_y \times \bar{X}_y}$, K_y est l'idéal définissant la diagonale $\bar{X}_y \subset \bar{X}_y \times \bar{X}_y$, et le support de $\mathcal{O}_{\bar{X}_y \times \bar{X}_y} / \mathfrak{N}_y$ est $n^{-1}(\text{Sing } X_y) \times n^{-1}(\text{Sing } X_y)$. Puisque X_y n'a comme singularités que des points doubles ordinaires, et que, comme on le vérifie facilement, le nombre $e(\mathfrak{N})$ associé à un point double vaut 2, on trouve grâce à 5.2.8 : $e(\mathfrak{N}_y) = 2\delta_0$. Pour terminer, il reste à vérifier que $e(\mathfrak{N}_y) = e(\mathfrak{N}_0)$. Mais utilisant (*) on écrit :

$$(**) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{N}_y \cdot \mathbb{C}\{t_i, t'_i\} &= \left(\frac{z_0(t_i) - z_0(t'_i)}{t_i - t'_i} - \alpha_i y_1, \frac{z_1(t_i) - z_1(t'_i)}{t_i - t'_i} - \beta_i y_1 \right) \mathbb{C}\{t_i, t'_i\} \\ \mathfrak{N}_y \cdot \mathbb{C}\{t_i, t'_j\} &= (z_0(t_i) - z_0(t'_j) - (\alpha_i t_i - \alpha_j t'_j), \\ &\quad z_1(t_i) - z_1(t'_j) - (\beta_i t_i - \beta_j t'_j) y_1) \mathbb{C}\{t_i, t'_j\} \end{aligned} \right. ,$$

ce qui montre que le sous-espace défini par \mathfrak{N}_y (qui est lisse et a $2\delta_0$ points) tend, quand $y_1 \rightarrow 0$, vers le sous-espace défini par \mathfrak{N}_0 , ou si l'on préfère, que le morphisme d'algèbres $\mathbb{C}\{y\} \rightarrow \prod \mathbb{C}\{y_1, t_i, t'_j\} / \mathfrak{N}$, où \mathfrak{N} est l'idéal de $\mathbb{C}\{y_1, t_i, t'_j\}$ engendré par le second membre de (**), est plat, ce qui entraîne $e(\mathfrak{N}_y) = e(\mathfrak{N}_0)$ pour tout $y \in (Y, 0)$, car en fait dans ce cas-ci la multiplicité est égale à la colongueur, et la platitude entraîne la constance de la colongueur, ([Bourbaki], Alg. Comm. ch. II, § 3, No 2).

Ceci achève la seconde preuve de 5.2.1[♦].

[♦] Pendant la rédaction, j'ai appris qu'un résultat équivalent à 5.2.1 était énoncé dans le cas particulier des courbes irréductibles par M. Gusein-Zade

5.2.10 Joseph Lipman [Li₂] m'a proposé une troisième démonstration dont voici le principe : il résulte de l'argument de déformation (5.2.8) et de la compatibilité du discriminant avec les changements de base (passage aux fibres en particulier) que l'on a :

$$e(\mathfrak{N}_0) = v_x(\Delta_0) - v_x(\bar{\Delta}_0) \quad (v_x = \text{ordre en } x)$$

où on considère \mathcal{O}_0 et $\bar{\mathcal{O}}_0$ comme des $\mathbb{C}\{x\}$ -algèbres finies et où Δ_0 (resp. $\bar{\Delta}_0$) sont des éléments de $\mathbb{C}\{x\}$ donnés par la construction du discriminant d'une $\mathbb{C}\{x\}$ -algèbre finie. \mathcal{O}_0 et $\bar{\mathcal{O}}_0$ sont tous deux des $\mathbb{C}\{x\}$ -modules libres du même rang (égal à la multiplicité n_0 de l'idéal maximal de \mathcal{O}_0 si on suppose la projection $X_0 \rightarrow \mathbb{C}$ transversale) et si c_1, \dots, c_{n_0} et b_1, \dots, b_{n_0} sont des bases, on a

$$c_i = \sum_{j=1}^{n_0} a_{ij} b_j \text{ et } \Delta = \bar{\Delta} \cdot \det(a_{ij})^2 \text{ (cf. [Z.S.] t. I), mais par la théorie des}$$

modules sur un anneau principal, on a $\delta_0 = \dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{O}}_0 / \mathcal{O}_0 = v(\det(a_{ij}))$ d'où finalement $e(\mathfrak{N}_0) = 2\delta_0$. J. Lipman remarque de plus que $v_x(\bar{\Delta}) = n_0 - r_0$ (résulte très facilement du fait que $v_x(\bar{\Delta}) = \sum(e_i - 1)$, où e_i est l'indice de ramification, cf. [Z.S.] encore), et comme par ailleurs il résulte de la formule de Plücker locale ([C.E.W.] ch. II, et voir plus bas) que $v_x(\Delta) = \mu^{(2)} + \mu^{(1)} = \mu_0 + n_0 - 1$, on a une nouvelle démonstration de l'égalité $2\delta_0 = \mu_0 + r_0 - 1$.

5.3 Pour une famille de courbes planes, la constance du nombre de Milnor équivaut à l'équisingularité.

5.3.1 Théorème : Soit $f : (X, 0) \xrightarrow{\sigma} (Y, 0)$ une famille de germes de courbes planes, avec Y non singulier. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) L'application $y \mapsto \mu_y = \mu^{(2)}(X_y, \sigma_y)$ est (localement) constante.
- 2) Les applications $y \mapsto \delta_y$ et $y \mapsto r_y$ sont (localement) constantes.
- 3) f admet une résolution des singularités faible le long de $Y_1 = \sigma(Y)$.
- 4) L'hypersurface X est lipschitziennement équisaturée le long de Y_1 au voisinage de 0.
- 5) $y \mapsto \mu_y$ et $y \mapsto n_y$, où n_y est la multiplicité de $(X_y, \sigma(y))$ sont (localement) constantes.
- 6) f admet une résolution des singularités forte le long de Y_1 , obtenue par

dans son article de "Funktionalny Analiz i iego Prilojenie", Tome 8, Fasc. 4, Moscou (1974) p. 23, Funct. Anal. and Applications, Avril 1975), et aussi dans le cas irréductible par M. Fischer (Thèse de 3ème cycle, Orsay 1974-75). Si j'ai bien compris, la preuve proposée par M. Gusein-Zade est proche de la première, et celle de M. Fischer différente, des deux démonstrations données ici.

le procédé de Hironaka.

7) L'hypersurface X est équisingulière au sens de Zariski le long de Y_1 .

Démonstration : Il faut remarquer que l'énoncé est de nature locale sur X et Y . Dans les démonstrations, je me permettrai de remplacer X et Y par des représentants "suffisamment petits", i.e., de prendre un représentant convenable du germe de morphisme $f : (X,0) \rightarrow (Y,0)$, sans prévenir à chaque fois. Je crois que le lecteur n'aura aucun mal à préciser le "suffisamment petit" dans chaque cas. Par ailleurs, j'écris la démonstration en géométrie analytique complexe, mais de telle façon que la transcription en géométrie algébrique (ou algébrique au sens formel) sur un corps de caractéristique zéro algébriquement clos soit aussi immédiate que possible.

L'implication 1) \Rightarrow 2) résulte de 5.1. Montrons 2) \Rightarrow 3) : tout d'abord puisque δ_y est constant, la normalisation est une résolution simultanée très faible, d'après Résol. sim. I. Soit $n : \bar{X} \rightarrow X$ la normalisation, et posons $\tilde{Y}_1 = n^{-1}(Y_1)_{\text{red}}$. Le morphisme $\tilde{n} : \tilde{Y}_1 \rightarrow Y_1$ est un revêtement étale. En effet le nombre des points dans chaque fibre $\tilde{n}^{-1}(y)$ est égal à r_y puisque n est une normalisation simultanée, et \tilde{Y}_1 est un diviseur dans \bar{X} qui est non-singulier, donc \tilde{Y}_1 est de Cohen-Macaulay, ce qui entraîne d'une part que le morphisme \tilde{n} est plat, et d'autre part que son discriminant (qui existe puisqu'il est propre et plat) est vide [utiliser par exemple le fait que la formation du discriminant commute aux changements de base $\mathbb{D} \rightarrow Y$ (cf. [H.I.] § 2) et que la situation ci-dessus est préservée après un tel changement de base].

5.3.2 Remarque : La difficulté principale de la démonstration du Théorème 5.3.1 consiste en la preuve du fait que $n^{-1}(Y_1)$ est aussi un diviseur dans \bar{X} (i.e., n'a pas de composantes immergées).

Démonstration de 3) \Rightarrow 4) : Remarquons tout d'abord qu'il résulte du point 3) que \bar{X} est, localement au voisinage de chacun des points x_i ($1 \leq i \leq r$, où $r = r_0 = r_y$) de $n^{-1}(0)$, un produit analytique, i.e. que l'on a des isomorphismes de germes $(\bar{X}, x_i) \simeq (Y,0) \times ((\bar{X})_0, x_i)$. Il revient au même de dire que toute \mathbb{C} -dérivation D de $\mathcal{O}_{Y,0}$ (et en particulier, posant $\mathcal{O}_{Y,0} = \mathbb{C}\{y_1, \dots, y_k\}$, les $D_\ell = \frac{\partial}{\partial y_\ell}$ ($1 \leq \ell \leq k$)) se prolonge en une dérivation $\bar{D} : \bar{A} \rightarrow \bar{A}$, où $\bar{A} = \mathcal{O}_{\bar{X}, n^{-1}(0)}$ est l'algèbre semi-locale du multi-germe $(\bar{X}, n^{-1}(0))$. Le fait que $\tilde{Y}_1 \rightarrow Y_1$ soit étale équivaut au fait que l'on peut de plus choisir \bar{D}_ℓ (prolongeant $D_\ell = \frac{\partial}{\partial y_\ell}$) de telle façon que $\bar{D}_\ell(\sqrt{S}) \subset \sqrt{S}$, où $\sqrt{S} \subset \bar{A}$ est l'idéal définissant $\tilde{Y}_1 \subset \bar{X}$ au voisinage de $n^{-1}(0)$. Géométriquement, ceci signifie que l'on peut relever tout champ de vec-

teurs holomorphe sur Y (ou Y_1) en un champ de vecteurs sur \bar{X} tangent à \tilde{Y}_1 .
 Finalement, on voit que l'on peut écrire

$$\bar{A} = \prod_{i=1}^r \mathfrak{C}\{\underline{y}, t_i\} \quad \text{où } \underline{y} = (y_1, \dots, y_\ell)$$

et
$$\bar{D}_\ell = \frac{\partial}{\partial y_\ell} \quad (\text{dans } \bar{A}) \quad .$$

5.3.3 Remarque : Un champ de vecteurs holomorphe sur \bar{X} peut être considéré comme un champ de vecteurs méromorphe sur X , à coefficients localement bornés. L'étape suivante de la démonstration consiste en la preuve du fait que les champs de vecteurs correspondant aux \bar{D}_ℓ sont en fait à coefficients (localement) lipschitziens. Après les idées de [P.T.], ceci peut être traduit en un énoncé purement algébrique et toute la démonstration est valable sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0 quelconque, en géométrie formelle, bien qu'érédigée dans le cadre de la géométrie analytique complexe.

5.3.4 Considérons l'inclusion naturelle de produits fibrés :

$$\begin{array}{ccc} \bar{X} \times \bar{X} & \hookrightarrow & \bar{X} \times \bar{X} \\ X & & Y \end{array}$$

et soit $I \subset \mathcal{O}_{\bar{X} \times \bar{X}, n^{-1}(0) \times n^{-1}(0)}^Y$, l'idéal correspondant. On a

$$\begin{aligned} I &= \text{Ker} \left(\mathcal{O}_{\bar{X} \times \bar{X}, n^{-1}(0) \times n^{-1}(0)}^Y \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X} \times \bar{X}, n^{-1}(0) \times n^{-1}(0)}^X \right) \\ &= \text{Ker} \left(\mathcal{O}_{\bar{X}, n^{-1}(0)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{Y,0}} \mathcal{O}_{\bar{X}, n^{-1}(0)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}, n^{-1}(0)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,0}} \mathcal{O}_{\bar{X}, n^{-1}(0)} \right) \end{aligned}$$

où $\widehat{\otimes}$ est le produit tensoriel analytique, correspondant au produit fibré des germes d'espaces analytiques et égal au produit tensoriel usuel pour $\bar{X} \times \bar{X}$ parce que \bar{X} est fini sur X . A tout élément $h \in \mathcal{O}_{\bar{X}, n^{-1}(0)}$ on peut associer un élément

$h \widehat{\otimes} 1 - 1 \widehat{\otimes} h \in \mathcal{O}_{\bar{X}, n^{-1}(0)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{Y,0}} \mathcal{O}_{\bar{X}, n^{-1}(0)}$, qui correspond à la fonction $h(x) - h(x')$ pour $(x, x') \in \bar{X} \times \bar{X}$. Remarquons que le morphisme canonique $\gamma : \bar{X} \times \bar{X} \rightarrow Y$ est encore

lisse, et que pour tout $y \in Y$, $\gamma^{-1}(y) = \bar{X}_y \times \bar{X}_y$, et que l'idéal induit par I dans chaque fibre $\gamma^{-1}(y)$ n'est autre que l'idéal I_y définissant $\bar{X}_y \times \bar{X}_y$ dans $\bar{X}_y \times \bar{X}_y$, c'est-à-dire le noyau de la surjection $\bar{\mathcal{O}}_y \widehat{\otimes}_{\mathfrak{C}} \bar{\mathcal{O}}_y \rightarrow \bar{\mathcal{O}}_y \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_y} \bar{\mathcal{O}}_y$, où $\mathcal{O}_y = \mathcal{O}_{X_y, 0}$. Cet idéal a été étudié au § 5.2.

Ecrivons (ce qui est évidemment possible pour une famille de courbes planes)

$\mathcal{O}_{X,0} = \mathcal{O}_{Y,0}\{z_0, z_1\}/(F)$. D'après ce que nous avons vu plus haut, le morphisme

$\varphi : \mathcal{O}_{X,0} \rightarrow \overline{\mathcal{O}}_{X,0} = \mathcal{O}_{\overline{X},n^{-1}(0)}$ peut être décrit par :

$$\varphi(z_0) = (z_0(\underline{y}, t_i)) \in \prod_{i=1}^r \mathbb{C}\{\underline{y}, t_i\}$$

$$\varphi(z_1) = (z_1(\underline{y}, t_i)) \in \prod_{i=1}^r \mathbb{C}\{\underline{y}, t_i\}$$

$$\varphi(y_\ell) = y_\ell \quad (1 \leq \ell \leq k) \quad .$$

Il en résulte aussitôt que

$$\mathcal{O}_{\overline{X} \times \overline{X}, n^{-1}(0) \times n^{-1}(0)} \cong \prod_{i,j} \mathbb{C}\{\underline{y}, t_i, t'_j\}$$

et que l'idéal $I_{i,j}$ induit par I dans chaque $\mathbb{C}\{\underline{y}, t_i, t'_j\}$ n'est autre que

$$I_{i,j} = (z_0(\underline{y}, t_i) - z_0(\underline{y}, t'_j), z_1(\underline{y}, t_i) - z_1(\underline{y}, t'_j)) \mathbb{C}\{\underline{y}, t_i, t'_j\} \quad .$$

Considérons le sous-anneau $\tilde{\mathcal{O}}_{X,0}^Y \subset \mathcal{O}_{\overline{X},n^{-1}(0)}$ formé des éléments $h \in \mathcal{O}_{\overline{X},n^{-1}(0)}$ tels

que $h \otimes 1 - 1 \otimes h \in \overline{I}$, c'est-à-dire que $h \otimes 1 - 1 \otimes h$ est intégralement dépendant sur l'idéal I (cf. 2.3.9 pour la définition). Il a été prouvé dans [P.T.] que $\tilde{\mathcal{O}}_{X,0}^Y$

est encore une algèbre analytique, appelée algèbre saturée lipschitzienne de $\mathcal{O}_{X,0}$ par rapport à l'inclusion $\mathcal{O}_{Y,0} \rightarrow \mathcal{O}_{X,0}$ et que l'inclusion (évidente)

$\mathcal{O}_{X,0} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_{X,0}^Y$ due au fait que $I \subset \overline{I}$ correspond au morphisme "de saturation"

$s : \tilde{X}^Y \rightarrow X$ qui a la propriété qu'une fonction méromorphe sur X satisfaisant

(localement) une condition de Lipschitz $|h(x) - h(x')| \leq C|x - x'|$ par rapport

aux couples de points (x, x') situés dans une même fibre de $f : X \rightarrow Y$ devient holomorphe sur \tilde{X}^Y , et que s est le morphisme universel pour cette propriété. Nous allons

montrer que $f \circ s : \tilde{X}^Y \rightarrow Y$ est localement analytiquement trivial, i.e. que l'on a une décomposition en produit $(\tilde{X}^Y, 0) \simeq ((\tilde{X}^Y)_0 \times Y, 0)$. Il suffit pour cela de montrer

que pour tout ℓ , $1 \leq \ell \leq k$, la dérivation \overline{D}_ℓ construite plus haut induit une

dérivation de $\tilde{\mathcal{O}}_{X,0}^Y$, c'est-à-dire que $\overline{D}_\ell : \mathcal{O}_{\overline{X},n^{-1}(0)} \rightarrow \mathcal{O}_{\overline{X},n^{-1}(0)}$ satisfait :

$$\overline{D}_\ell(\tilde{\mathcal{O}}_{X,0}^Y) \subseteq \tilde{\mathcal{O}}_{X,0}^Y \quad (1 \leq \ell \leq k) \quad .$$

Par définition de $\tilde{\mathcal{O}}_{X,0}^Y$, ceci équivaut à :

$$h \widehat{\otimes} 1 - 1 \widehat{\otimes} h \in \overline{I} \implies \overline{D}_\ell h \widehat{\otimes} 1 - 1 \widehat{\otimes} \overline{D}_\ell h \in \overline{I}$$

et c'est ce que nous allons montrer, après quelques préliminaires :

5.3.5 Lemme : Soit $h \in \mathcal{O}_{\overline{X}, n^{-1}(0)}$ tel que $h \widehat{\otimes} 1 - 1 \widehat{\otimes} h \in \overline{I}$. Continuant de noter h un élément de $\Gamma(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ représentant le germe h , on a :

il existe un ouvert analytique dense $U = Y - F$ de Y tel que pour tout $y \in U$, on ait

$$(\overline{D}_\ell h)_y \widehat{\otimes} 1 - 1 \widehat{\otimes} (D_\ell h)_y \in \overline{I}_y \quad \text{pour tout } y \in U,$$

où $(\overline{D}_\ell h)_y$ désigne la restriction de $\overline{D}_\ell h$ à $\overline{X}_y = (f \circ n)^{-1}(y)$.

Démonstration : L'ensemble des points en lesquels un élément est intégralement dépendant sur un idéal cohérent est un ouvert analytique dense, d'où l'on déduit aussitôt que pour un représentant assez petit de f , on a $h \widehat{\otimes} 1 - 1 \widehat{\otimes} h \in \overline{\Gamma(\overline{X} \times \overline{X}, I)}$ et donc en particulier la même relation de dépendance intégrale en germe le long de $n^{-1}(y_1) \times n^{-1}(y_1)$ pour tout $y_1 = \sigma(y) \in Y_1 = \sigma(Y)$. Ainsi, pour prouver l'assertion, puisqu'une relation de dépendance intégrale peut être restreinte à un sous-espace fermé (tel que $\overline{X}_y \times \overline{X}_y \subset \overline{X} \times \overline{X}$) il suffit en fait de prouver que l'on a équisaturation lipschitzienne de X le long de Y_1 au voisinage de tout point y_1 d'un ouvert analytique dense $U_1 \subset Y_1$ ($U_1 = \sigma(U)$, $U \in Y$). Or il a été démontré dans [P.T.] que l'équisingularité à la Zariski le long de Y_1 , i.e. l'existence d'une projection $\pi : X \rightarrow Y_1 \times \mathbb{C}$ dont le discriminant Δ_π coïncide ensemblistement avec $Y_1 = Y_1 \times \{0\}$ implique l'équisaturation lipschitzienne (c'est-à-dire l'implication 7) \Rightarrow 4). Or cette condition est évidemment réalisée en chaque point d'un ouvert analytique dense, à savoir $U = Y_1 \setminus \overline{(\Delta_\pi \setminus Y_1)}$.

5.3.6 Lemme : Soient A un anneau résulte intégralement clos dans son anneau total de fractions, K un idéal inversible de A (i.e. engendré par un élément g de A non diviseur de zéro) et \mathfrak{N} un idéal quelconque de A . On a :

$$\overline{K \cdot \mathfrak{N}} = K \cdot \overline{\mathfrak{N}} .$$

Preuve : Par définition, si $h \in \overline{K \cdot \mathfrak{N}}$, il existe une relation $h^k + a_1 h^{k-1} + \dots + a_k = 0$, avec $a_i \in K^i \cdot \mathfrak{N}^i$, donc $a_i = g^i a'_i$, $a'_i \in \mathfrak{N}^i$. En divisant par g^k dans $\text{Tot}(A)$, ce qui est licite puisque g est non-diviseur de zéro, on en déduit $\frac{\xi}{g} \in A$ parce que A est intégralement clos, et en fait $\frac{\xi}{g} \in \overline{\mathfrak{N}}$, donc $\xi \in K \cdot \overline{\mathfrak{N}}$. L'inclusion inverse est non moins facile.

5.3.7 Fin de la preuve de 3) \Rightarrow 4) : Fixons un représentant "assez petit" du germe f et reprenons la situation de 5.3.4, et remarquons que l'on peut écrire (de façon analogue à ce qui a été vu en 5.2 (spécialement 5.2.3)

$$I = K \cdot \mathfrak{N} \quad ,$$

où K est un idéal inversible sur $\overline{X} \times_{\overline{Y}} \overline{X}$ et $\mathcal{O}_{\overline{X} \times_{\overline{Y}} \overline{X}} / \mathfrak{N}$ a pour support

$n^{-1}(Y_1)_{\text{red}} \times n^{-1}(Y_1)_{\text{red}}$. De plus, d'après l'hypothèse de 3) et 5.2.1, 5.3.4, on

a, pour tout $y \in Y$, $e(\mathfrak{N}_y) = 2\delta_y$, indépendant de $y \in Y$.

Soit $h \in \mathcal{O}_{\overline{X} \times_{\overline{Y}} \overline{X}}$ tel que $h \widehat{\otimes} 1 - 1 \widehat{\otimes} h \in \overline{I}$. Nous voulons montrer que

$$\overline{D}_\ell h \widehat{\otimes} 1 - 1 \widehat{\otimes} \overline{D}_\ell h \in \overline{I} \quad (1 \leq \ell \leq k) \quad .$$

D'après 5.3.5, il existe un fermé analytique nulle part dense $F \subset Y$ tel que, pour tout $y \in Y - F$, on ait

$$(\overline{D}_\ell h)_y \widehat{\otimes} 1 - 1 \widehat{\otimes} (\overline{D}_\ell h)_y \in \overline{I}_y \quad \text{dans } \mathcal{O}_{\overline{X}_y \times \overline{X}_y} \quad ,$$

ou encore

$$K^{-1} \cdot (\overline{D}_\ell h \widehat{\otimes} 1 - 1 \widehat{\otimes} \overline{D}_\ell h) \cdot \mathcal{O}_{\overline{X}_y \times \overline{X}_y} \in \mathfrak{N}_y$$

d'après 5.3.6. Or, nous venons de voir que la famille des idéaux $\overline{\mathfrak{N}}_y$ était équi-multiple. On applique donc le principe de spécialisation de la dépendance intégrale (cf. Appendice I ci-dessous) qui implique que l'on a

$$K^{-1} \cdot (\overline{D}_\ell h \widehat{\otimes} 1 - 1 \widehat{\otimes} \overline{D}_\ell h) \cdot \mathcal{O}_{\overline{X} \times_{\overline{Y}} \overline{X}} \in \overline{\mathfrak{N}} \quad ,$$

c'est-à-dire en appliquant à nouveau 5.3.6 :

$$\overline{D}_\ell h \widehat{\otimes} 1 - 1 \widehat{\otimes} \overline{D}_\ell h \in \overline{I} \quad \text{dans } \mathcal{O}_{\overline{X} \times_{\overline{Y}} \overline{X}} \quad ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

5.3.8 Démonstration de 4) + 1) \Rightarrow 5) : Il suffit de montrer que l'équisaturation lipschitzienne de X le long de Y_1 entraîne l'équimultiplicité de X le long de Y_1 . Or, il résulte aussitôt du fait que le morphisme $\overline{X} \rightarrow Y$ est localement analytiquement trivial au voisinage de chaque point de $n^{-1}(0)$, et de la construction de la saturation lipschitzienne (cf. aussi 5.3.4) que l'équisaturation lipschitzienne implique que pour chaque $y \in Y$, la fibre du morphisme $\widetilde{X}^Y \rightarrow Y$ au-dessus de y n'est autre que la courbe \widetilde{X}_y saturée lipschitzienne de la courbe

X_y , et enfin que pour chaque $y \in Y$, $(\tilde{X}, \sigma(y))$ est analytiquement isomorphe à $(\tilde{X}_0, 0)$. Pour montrer la constance de la multiplicité n_y , il suffit donc de montrer que la multiplicité en 0 du germe de courbe $(\tilde{X}_y, 0)$ est égale à celle de $(X_y, 0)$. Posons $\mathcal{O}_y = \mathcal{O}_{X_y, 0}$ et $\tilde{\mathcal{O}}_y = \mathcal{O}_{\tilde{X}_y, 0}$. Soient \mathfrak{m}_y et $\tilde{\mathfrak{m}}_y$ les idéaux maximaux respectifs. On a bien sûr $\mathfrak{m}_y \cdot \tilde{\mathcal{O}}_y \subset \tilde{\mathfrak{m}}_y$ et donc pour montrer que ces deux idéaux ont même fermeture intégrale il suffit de prouver : $\tilde{\mathfrak{m}}_y \subset \overline{\mathfrak{m}_y \cdot \tilde{\mathcal{O}}_y}$. Or par définition :

$$\tilde{\mathcal{O}}_y = \{h \in \overline{\mathcal{O}}_y / h \otimes 1 - 1 \otimes h \in \overline{\mathbb{T}}_y\} ,$$

où l'on a vu que l'on pouvait écrire $h \otimes 1 - 1 \otimes h = (h(t_i) - h(t'_j))$ et

$$I_y = (x(t_i) - x(t'_j)) \in \prod_{i,j} \mathbb{C}\{t_i, t'_j\}. \text{ Par conséquent, si } h \in \tilde{\mathfrak{m}}_y \text{ (i.e. } h(0) = 0),$$

on a en faisant $t'_j = 0$ pour tout j :

$$(h(t_i)) \in (x(t_i) \cdot \mathbb{C}\{t_i\}) \text{ donc } h \cdot \overline{\mathcal{O}}_y \subset \mathfrak{m}_y \cdot \overline{\mathcal{O}}_y ,$$

ce qui implique, puisque $\overline{\mathcal{O}}_y$ est entier sur \mathcal{O}_y et que $h \in \tilde{\mathcal{O}}_y$, que l'on a $h \in \overline{\mathfrak{m}_y \cdot \tilde{\mathcal{O}}_y}$, donc $\overline{\mathfrak{m}_y \cdot \tilde{\mathcal{O}}_y} = \tilde{\mathfrak{m}}_y$. De plus l'extension d'un idéal à un sur-anneau entier et biméromorphe ne change pas la multiplicité en l'absence d'extensions résiduelles, donc on a

$$e(\mathfrak{m}_y) = e(\mathfrak{m}_y \cdot \tilde{\mathcal{O}}_y) = e(\tilde{\mathfrak{m}}_y) ,$$

la seconde égalité venant du fait que nous venons de voir :

$$\overline{\mathfrak{m}_y \cdot \tilde{\mathcal{O}}_y} = \tilde{\mathfrak{m}}_y ,$$

d'après ce qui a été rappelé en 2.3.9.

5.3.9 Pour terminer la démonstration du théorème, rappelons que l'équivalence des conditions 5), 6) et 7) a été démontrée dans [I.E.P.] § 2, dans ce cas où $\dim Y = 1$, en utilisant le principe de spécialisation de la dépendance intégrale. Maintenant que ce principe a été étendu au cas Y Cohen-Macaulay réduit de dimension quelconque, la même démonstration s'applique identiquement. (Je rappelle seulement qu'elle est fondée sur le fait qu'une projection générale $(X_y, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ pour une courbe plane a pour discriminant l'origine de \mathbb{C} comptée $\mu_y + n_y - 1$ fois, et que d'autre part on connaît le comportement de μ_y par éclatement de 0 dans X_y .

5.3.10 Note historique pour le § 5 : Le problème de la démonstration de

l'implication " $\mu^{(2)}(X_y, \sigma(y))$ constant" \Rightarrow équisingularité a été posé par Hironaka en 1968. En 1971 une démonstration topologique a été trouvée par Lê Dũng Tráng en améliorant une idée de Hironaka. Ici "démonstration topologique" signifie le schéma suivant : Lê montre que $\mu^{(2)}(X_y, \sigma(y))$ constant implique que les fibres ont le même type topologique, et l'on savait que pour les courbes planes, même type topologique implique même multiplicité, (question de Zariski, ouverte en dimension > 1) et enfin que μ_y et n_y constant implique équisingularité. Cependant le problème d'une démonstration algébrique restait ouvert. Un premier résultat dans cette direction se trouve dans la note [L.L.T.] où l'on démontre que pour une famille de germes de courbes qui sont irréductibles, μ_y constant implique résolution simultanée très faible. Par la suite ce problème a fait l'objet d'assez nombreuses recherches jusqu'en Juin 1975, date de la présente démonstration. On remarquera que cette preuve-ci ne démontre pas seulement μ_y constant \Rightarrow n_y constant, mais montre directement un résultat beaucoup plus fort qui correspond en géométrie analytique complexe à l'existence d'un champ de vecteurs lipschitzien à coefficients méromorphes sur X relevant un champ de vecteurs holomorphe quelconque sur Y . Prenant localement $X \subset Y \times \mathbb{C}^2$, un tel champ s'étend en un champ de vecteurs lipschitzien, donc intégrable, sur $Y \times \mathbb{C}^2$, tangent à X et en faisant subir ce traitement à une base des champs de vecteurs sur Y , on obtient k champs de vecteurs lipschitziens sur $Y \times \mathbb{C}^2$ dont l'intégration réalise une trivialisation topologique (et même lipschitzienne de $X \subset Y \times \mathbb{C}^2$, i.e., un isomorphisme lipschitzien $\psi : Y \times \mathbb{C}^2 \approx Y \times \mathbb{C}^2$ commutant à la projection sur Y et tel que $\psi(X) = Y \times X_0$. L'idée de considérer algébriquement de tels champs de vecteurs, idée que l'on utilise ici à plein, vient de [P.T.]

Tout récemment, Mr. C. Rego (T.I.F.R., Bombay) a donné une autre démonstration algébrique de l'assertion " μ_y constant implique n_y constant". Cette démonstration utilise d'abord notre proposition 5.1.0 (dont il propose une preuve différente) et une partie des résultats de Résol. Sim. I, avec la même preuve, mais au lieu d'utiliser la saturation, il termine avec un argument utilisant la dimension de l'espace des déformations infinitésimales à conducteur fixé d'une courbe, et celle de l'espace de déformations non triviales, mais qui induisent une déformation triviale de la normalisée. (cf. [Rg]).

Enfin on pourrait croire que " δ_y constant" \Rightarrow " n_y constant" ; il n'en est rien comme le montre l'exemple suivant dû à J.P.G. Henry :

$$F = (yz_1 - z_0^2)^2 - z_0^6 + z_1^3 = 0 \text{ (où } y \text{ est le paramètre).}$$

*
*
*

♦ Note de la p. 24

D'ailleurs, il résulte de la remarque 2 de 2.1.2 ci-dessus qu'une famille admettant une résolution simultanée faible le long de son lieu singulier ne saurait avoir de monodromie. Or cette famille-ci a pour homologie évanescence \mathbb{Z} et pour monodromie $-\text{Id}$.

APPENDICE I : LE PRINCIPE DE SPECIALISATION DE LA DEPENDANCE INTEGRALE

I.0 Le résultat technique principal de cet appendice est le théorème I.3 ci-dessous, mais le résultat géométrique I.4 est le "vrai principe de spécialisation" sous-jacent.

I.1 Lemme : Soit $F : (X, x) \rightarrow (S, s)$ un germe de morphisme plat d'espaces analytiques dont les anneaux locaux sont de Cohen-Macaulay réduits. Soit I un

\mathcal{O}_X -Idéal cohérent tel que :

- 1) I soit engendré par une suite régulière $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$ au voisinage de x .
- 2) Le sous-espace $Y_1 \subset X$ défini par I est fini sur S par F (et donc plat par 1)), (et $d = \dim_x X - \dim S$).

Alors, si $\bar{\pi} : \bar{X}' \rightarrow X$ désigne l'éclatement normalisé de I dans X , et $E \subset \bar{X}'$ le diviseur exceptionnel de $\bar{\pi}$ (diviseur de \bar{X}' défini par $I \cdot \mathcal{O}_{\bar{X}'}$), pour un représentant assez petit de F , on a :

- (s) : Chaque composante irréductible de E est envoyée surjectivement sur une composante irréductible de Y_1 par $\bar{\pi}$, et surjectivement sur S par $F \circ \bar{\pi} = \bar{F}'$,

et :

- (e) : Le morphisme $\bar{\pi}|_E : E \rightarrow Y_1$ est équidimensionnel, i.e. pour tout $y \in Y_1$, $\dim \bar{\pi}^{-1}(y) \cap E = d - 1$.

Démonstration : Il suffit de remarquer que puisque I est engendré par une suite régulière dans \mathcal{O}_X , l'éclatement de I dans X est le sous-espace X' de $X \times \mathbb{P}^{d-1}$ défini par l'Idéal $\{T_i \varphi_j - T_j \varphi_i, i \neq j, 1 \leq i, j \leq d\}$, où T_1, \dots, T_d est un système de coordonnées homogènes sur \mathbb{P}^{d-1} ([H_{1,5}]) et le diviseur exceptionnel D de l'éclatement (défini par $I \cdot \mathcal{O}_{X'}$) est isomorphe à $\text{Proj}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I)[T_1, \dots, T_d] \simeq Y_1 \times \mathbb{P}^{d-1}$. Le diagramme d'éclatement normalisé est :

$$\begin{array}{ccc}
 E & \hookrightarrow & \bar{X}' \\
 \downarrow & \square & \downarrow n \\
 D & \hookrightarrow & X' \\
 \downarrow & \square & \downarrow \pi \\
 Y & \hookrightarrow & X
 \end{array}
 \quad (n = \text{normalisation})$$

D'après le Hauptidealsatz, $I \mathcal{O}_{\bar{X}'}$, étant inversible, chacune des composantes irréductibles de E est de dimension $\dim X - 1$, et comme par ailleurs n est un mor-

phisme fini, n doit envoyer surjectivement chaque composante irréductible de E sur une composante irréductible de $D \equiv Y \times \mathbb{P}^{d-1}$ et enfin, puisque Y est plat sur S , chaque composante irréductible de Y_1 s'envoie surjectivement sur S par F , ce qui prouve (s).

(e) vient simplement de ce que l'assertion analogue est vraie pour $\pi: X' \rightarrow X$ et que n est un morphisme fini.

I.2 Corollaire : Sous les hypothèses du Lemme, pour un élément $h \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, les conditions suivantes sont équivalentes (pour un représentant assez petit du germe F) :

- 1) Il existe un ouvert analytique partout dense U de S tel que pour tout $s' \in U$, $h \circ \mathcal{O}_{X_{s'}} \in \overline{I \cdot \mathcal{O}_{X_{s'}}}$.
- 2) $h \in \bar{I}$, fermeture intégrale de l'Idéal I dans \mathcal{O}_X (i.e. $h \in \Gamma(X, \bar{I})$, où \bar{I} est l'Idéal cohérent "clôture intégrale de I dans \mathcal{O}_X ", [et donc $h \cdot \mathcal{O}_{X_s} \in \overline{I \cdot \mathcal{O}_{X_s}}$ pour tout $s \in S$]).

Démonstration : Puisque E est projectif au-dessus de Y_1 , qui est fini et plat sur S , il existe un ouvert analytique partout dense U_0 dans S tel que $\bar{F}' : E_{\text{red}} \cap \bar{F}'^{-1}(U_0) \rightarrow U_0$ soit un morphisme lisse, et que de plus, grâce au Lemme, $\bar{F}'^{-1}(U_0)$ induise un ouvert analytique partout dense dans chaque composante irréductible de E . Or, pour démontrer 1) \Rightarrow 2) du Corollaire (2) \Rightarrow 1) étant bien sûr immédiat) il suffit de vérifier que :

- (*) Chaque composante irréductible E_i de E contient un ouvert analytique V_i en chaque point x' duquel on a l'inclusion $h \cdot \mathcal{O}_{X', x'} \in I \cdot \mathcal{O}_{X', x'}$.

En effet, comme on sait bien (cf. [L.T.] prop. 2.2.5, [C.E.W.] ch. 0, [H₁] p. 62) $h \in \bar{I} \Leftrightarrow h \mathcal{O}_{\bar{X}} \in I \cdot \mathcal{O}_{\bar{X}}$, et puisque I est un idéal inversible d'un espace normal, il suffit pour vérifier que $h \in \mathcal{O}_{\bar{X}} \in I \cdot \mathcal{O}_{\bar{X}}$, de vérifier que le sous-espace polaire de $I^{-1} \cdot h \cdot \mathcal{O}_{\bar{X}}$, ne contient aucune composante de E .

Or nous pouvons vérifier (*) comme suit : D'après ce qui précède, et puisque \bar{X}' est normal, donc non singulier en codimension 1, nous pouvons trouver dans chaque composante irréductible E_i de E un ouvert V_i non vide tel qu'en tout point $x' \in V_i$ nous ayons :

- 1) \bar{X}' est non singulier en x' (puisque E est un diviseur).
- 2) $\bar{F}'|_{E_{\text{red}}} : E_{\text{red}} \rightarrow S$ est lisse en x' (d'après le lemme, et le théorème de lis-
sité générique).
- 3) Le sous-espace transformé strict de l'hypersurface de X définie par $h \cdot \mathcal{O}_X$ est vide au voisinage de x' (ceci par définition du transformé strict).
- 4) S est non singulier au point $s' = F(\bar{\pi}(x')) = \bar{F}'(x')$.

5) $s' = \bar{F}'(x') \in U$ où U est l'ouvert de la condition 1) du corollaire.

Prenons maintenant un système de coordonnées locales t_1, \dots, t_n sur S centrées en $s' = \bar{F}'(x')$. D'après 1) et 2) et le théorème des fonctions implicites, les fonctions $t'_\ell = t_\ell \circ \bar{F}'$ s'étendent au voisinage de x' en un système de coordonnées locales $(t'_1, \dots, t'_k, u, b_1, \dots, b_{d-1})$ sur \bar{X}' centré en x' et tel que :

6) E_{red} soit défini par $u = 0$ au voisinage de x' , i.e.

$$I \cdot \mathcal{O}_{\bar{X}', x'} = u^{a_i} \cdot \mathcal{O}_{\bar{X}', x'} ;$$

et :

7) $h \cdot \mathcal{O}_{\bar{X}', x'} = A \cdot u^{b_i} \cdot \mathcal{O}_{\bar{X}', x'}$, avec A inversible dans

$\mathcal{O}_{\bar{X}', x'} \simeq \mathbb{C}\{t'_1, \dots, t'_k, u, b_1, \dots, b_{d-1}\}$ (ceci d'après 3), car le transformé strict de $h = 0$ est précisément défini par $A = 0$ (si $A \notin (u) \mathcal{O}_{\bar{X}', x'}$) au voisinage de x'),

où l'indice i se réfère à la composante irréductible de E sur laquelle se trouve $V_i \ni x'$.

Il suffit maintenant, pour prouver le corollaire, de vérifier que $b_i \geq a_i$ pour tout i , sous l'hypothèse de 1), car ceci prouve clairement (*). Mais sous l'hypothèse 1) du corollaire, et d'après notre choix de V_i , $h \cdot \mathcal{O}_{X_{S'}}$ est entier sur $I \cdot \mathcal{O}_{X_{S'}}$ et donc, puisqu'une relation de dépendance intégrale peut se remonter, et se restreindre à un fermé, $h \circ \bar{\pi}' \cdot \mathbb{C}\{0, \dots, 0, u, b_1, \dots, b_{d-1}\}$ est entier sur $I \circ \bar{\pi}' \cdot \mathbb{C}\{0, \dots, 0, u, b_1, \dots, b_{d-1}\}$, c'est-à-dire que, avec les notations de 6) et 7) : $A \cdot u^{b_i} \cdot \mathbb{C}\{0, \dots, 0, u, b_1, \dots, b_{d-1}\}$ est entier sur $u^{a_i} \cdot \mathbb{C}\{0, \dots, 0, u, b_1, \dots, b_{d-1}\}$. Puisque $\mathbb{C}\{0, \dots, 0, u, b_1, \dots, b_{d-1}\}$ est régulier, et en particulier normal, et (u^{a_i}) inversible, ceci entraîne $A \cdot u^{b_i} \mathbb{C}\{u, \underline{b}\} \subset u^{a_i} \cdot \mathbb{C}\{u, \underline{b}\}$ et puisque A est une unité, il vient bien : $b_i \geq a_i$. Q. E. D.

Le corollaire ci-dessus sert à démontrer le :

I.3 Théorème (Principe de spécialisation de la dépendance intégrale) : Soit $F: (X, x) \rightarrow (S, s)$ un germe de morphisme plat entre espaces de Cohen-Macaulay réduits. Soit I un \mathcal{O}_X -Idéal (pour un représentant de F) tel que :

1) Le sous-espace Y de X défini par I soit fini au-dessus de S par F , i.e. $F: Y \rightarrow S$ est fini.

2) La multiplicité $e(I \cdot \mathcal{O}_{X_{S'}})$ est indépendante de $s' \in S$ (ici, $e(I \cdot \mathcal{O}_{X_{S'}})$ est la somme des multiplicités des idéaux primaires induits par I dans $\mathcal{O}_{X_{S'}}$.

(Chacun des idéaux primaires est primaire dans $\mathcal{O}_{X_{S'}}$ pour un idéal maximal correspondant à un point de $X_{S'} \cap Y$.)

Alors, pour tout représentant assez petit de $F : X \rightarrow S$, les conditions suivantes sont équivalentes, pour une fonction $h \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$:

- 1) il existe un ouvert analytique dense U de S tel que pour tout $s' \in U$,
 $h \cdot \mathcal{O}_{X_{s'}} \in \overline{I \cdot \mathcal{O}_{X_{s'}}}$.
- 2) $h \in \overline{I}$ Idéal cohérent "clôture intégrale de I " de $h \in \Gamma(X, \overline{I})$ [et donc
 $h \cdot \mathcal{O}_{X_s} \in \overline{I \cdot \mathcal{O}_{X_s}}$ pour tout $s \in S$].

Démonstration : 2) \Rightarrow 1) est immédiat, montrons 1) \Rightarrow 2) : d'après le corollaire 1, il suffit de montrer qu'il existe un \mathcal{O}_X -Idéal I' engendré par une suite régulière (au voisinage de x) et tel que $\overline{I'} = \overline{I}$, i.e. I et I' aient même fermeture intégrale. Or, sous les hypothèses faites, nous pouvons d'après un théorème de Samuel ([Sa]) trouver d combinaisons linéaires génériques d'un système de générateurs de I , disons $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$ où $d = \dim_x X - \dim_s S$, telles que

$$(**) \quad \overline{(\varphi_1, \dots, \varphi_d) \mathcal{O}_{X_s}} = \overline{I \cdot \mathcal{O}_{X_s}} \quad \text{au voisinage de } x.$$

(Ceci, parce que X_s est de Cohen-Macaulay au voisinage de x .) Soit I' l'idéal de \mathcal{O}_X engendré par $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$. Par construction, $I' \subset I$ et, pour tout $s' \in S$, $I' \cdot \mathcal{O}_{X_{s'}} \subset I \cdot \mathcal{O}_{X_{s'}}$, donc $e(I' \cdot \mathcal{O}_{X_{s'}}) \geq e(I \cdot \mathcal{O}_{X_{s'}})$. Mais l'hypothèse d'équimultiplicité faite sur I d'une part et la semi-continuité des multiplicités, jointes à (**), nous donnent :

$$\begin{aligned} e(I' \cdot \mathcal{O}_{X_s}) &= e(I \cdot \mathcal{O}_{X_s}) \\ \text{(semi-continuité)} \quad \bigvee & \quad \big\| \quad \text{(hypothèse 2)} \\ e(I' \cdot \mathcal{O}_{X_{s'}}) &\geq e(I \cdot \mathcal{O}_{X_{s'}}) \quad \forall s' \in S. \end{aligned}$$

Il vient donc $e(I' \cdot \mathcal{O}_{X_{s'}}) = e(I \cdot \mathcal{O}_{X_{s'}})$ pour tout $s' \in S$ et donc $\overline{I' \cdot \mathcal{O}_{X_{s'}}} = \overline{I \cdot \mathcal{O}_{X_{s'}}}$ ($s' \in S$) d'après le théorème de Rees ([Re]). Puisque I' est -par construction- engendré par une suite régulière, on applique une fois de plus le Corollaire 1, et l'on obtient

$$\overline{I \cdot \mathcal{O}_X} \subseteq \overline{I' \cdot \mathcal{O}_X}$$

d'où aussitôt l'égalité

$$\overline{I \cdot \mathcal{O}_X} = \overline{I' \cdot \mathcal{O}_X} \quad \text{puisque } I' \subseteq I.$$

I.4 Remarque : Il résulte du fait que l'éclatement normalisé d'un idéal est égal à celui de sa clôture intégrale que si un idéal I satisfait les

hypothèses de I.3, son éclatement normalisé satisfait les conclusions de I.1 puisque à clôture intégrale près, I est engendré par une suite régulière.

I.5. Remarque : En réalité, l'hypothèse que X est Cohen-Macaulay est trop forte : si $F: (X, x) \rightarrow (S, s)$ vérifie : S est de Cohen-Macaulay, F est plat et ses fibres sont équidimensionnelles de dimension d , on peut installer localement X dans une intersection complète relative X' au-dessus de S à fibres de dimension d , et une succession de réductions faciles mais un peu longues permet de se ramener à prouver I.3 dans ce cas d'une intersection complète relative, au-dessus d'un Cohen-Macaulay, cas qui résulte bien évidemment de ce que nous venons de voir.

I.6 Remarque : Pour le lecteur familier avec la fonction d'ordre \bar{v}_I étudiée dans [L.T.], le théorème I.3 prend la forme numérique suivante :

I.7 Corollaire : Sous les hypothèses de I.3 (ou mieux de I.5), on a pour tout élément $h \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$: il existe un ouvert analytique partout dense U de S tel que pour tout $s' \in U$ on ait :

$$\bar{v}_I(h) = \bar{v}_{I_{s'}}(h_{s'})$$

où $I_{s'} = I \cdot \mathcal{O}_{X_{s'}}$ et $h_{s'} = h \cdot \mathcal{O}_{X_{s'}}$, $\bar{v}_I(h)$ désignant le \bar{v} calculé dans $\mathcal{O}_{X, x}$. Ce résultat peut être interprété comme un résultat de "spécialisation de l'exposant de Łojasiewicz" (cf. loc. cit.), et jouait un rôle important dans [C.E.W.] où il était démontré seulement dans le cas où Y est non-singulier de dimension 1, par une méthode différente de celle présentée ici.

I.8 Remarque : Soient \mathfrak{N}_1 et \mathfrak{N}_2 deux idéaux primaires d'une algèbre analytique équidimensionnelle \mathcal{O} , tels que $\mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{N}_2$ et $e(\mathfrak{N}_1) = e(\mathfrak{N}_2)$. Pour montrer que $\bar{\mathfrak{N}}_1 = \bar{\mathfrak{N}}_2$, il suffit de montrer $\mathfrak{N}_2 \subseteq \bar{\mathfrak{N}}_1$ et pour cela, posons $\mathfrak{N}_1 = (f_1, \dots, f_m)$, $\mathfrak{N}_2 = (g_1, \dots, g_n)$ et considérons la famille à un paramètre d'idéaux (dans $\mathcal{O}\{y\}$) donnée par

$$\mathfrak{N}_y = (y \cdot g_1, \dots, y \cdot g_n, f_1, \dots, f_m) \cdot \mathcal{O}\{y\} .$$

Pour $y \neq 0$, $\mathfrak{N}_y = \mathfrak{N}_2$, et $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}_1$. C'est une famille équivariante d'idéaux au sens de I.3, et I.5 nous donne aussitôt que $\mathfrak{N}_2 \subseteq \bar{\mathfrak{N}}_2$, donc $\bar{\mathfrak{N}}_1 = \bar{\mathfrak{N}}_2$, et le théorème de Rees. On voit ainsi que le principe de spécialisation et le théorème de Rees (sur un corps) sont chacun un avatar de l'autre.

I.9 Remarque : Tout ce qui précède est clairement encore valable en géométrie

algébrique sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro.

APPENDICE II : FORMULE DE PLÜCKER ET APPLICATIONS

II.0 La raison d'être de cet appendice ici est d'abord un résultat affirmant que pour une famille de courbes projectives planes satisfaisant une hypothèse assez faible de non-séparation des points singuliers et des points d'inflexion (i.e. des points singuliers des courbes duales) la constance du degré et de la classe équivaut à l'équisingularité, i.e. encore à la résolution simultanée forte par le procédé d'Hironaka, comme on l'a vu. Ce résultat est à rapprocher du résultat de Résol. sim. I affirmant que la constance du genre géométrique implique résolution simultanée très faible. Ici encore, le résultat global est déduit d'un résultat local, et le rôle tenu par la formule du genre dans Résol. sim. I est ici tenu par la formule de Plücker. D'autre part, outre son intérêt propre, la formule de Plücker donnée ici facilite la lecture des écrits classiques (Cayley, Salmon, DuVal) sur le point de détail suivant : dans la première classification des singularités de surfaces, donnée par Salmon, les singularités étaient indicées, non par leur nombre de Milnor comme l'on fait parfois aujourd'hui, mais par la diminution de classe correspondante, c'est-à-dire $\mu^{(3)} + \mu^{(2)}$ d'après II.3 ci-dessous. C'est pour cette raison que E_6 , E_7 et E_8 s'appellent chez DuVal U_8 , U_9 et U_{10} . En fait, pour D_n , E_6 , E_7 , E_8 on a $\mu^{(2)} = 2$, pour A_n , $\mu^{(2)} = 1$.

II.1 Je donne ici l'énoncé et une esquisse de démonstration de la formule de Plücker pour les hypersurfaces projectives n'ayant que des singularités isolées. C'est une question de G. Laumon qui m'a amené à énoncer cette formule ; je veux l'en remercier, et signaler qu'il a de son côté donné une démonstration (soumise, cf. [LM], au Bull. Soc. Math. Fr.) fondée sur la méthode de ([S.G.A.] 7.II, exp. XVII, Springer Lect. Notes 340), et des résultats généraux de Verdier, en plus du résultat (formule de restriction) que l'utilise ici. Récemment, une formule de Plücker généralisant une partie de celle-ci a été obtenue par R. Piene (cf. II.8).

II.2 Proposition ([C.E.W.] ch. II, § 1) : Soit $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ un germe d'hypersurface à singularité isolée en 0, défini disons par $f = 0$, $f \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$. Soit \mathbb{P}^n l'espace projectif des hyperplans H de \mathbb{C}^{n+1} contenant 0.

Alors il existe un fermé analytique strict de dimension $n-1$, $L_{X_0,0} \subset \mathbb{P}^n$, ne dépendant pas du choix du générateur f de l'idéal définissant $(X_0,0) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$ tel que pour tout hyperplan $H \in \mathbb{P}^n - L_{X_0,0}$, tout choix d'un système de coordonnées locales (z_0, \dots, z_n) pour $(\mathbb{C}^{n+1},0)$ tel que H soit défini par $z_0 = 0$, et tout choix d'une équation $f = 0$ pour $(X_0,0)$ la courbe Γ_H définie par l'idéal

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right) \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\} \text{ vérifie :}$$

$$(\Gamma_H \cdot X_0)_0 = \mu^{(n+1)} + \mu^{(n)},$$

où $(\Gamma_H \cdot X_0)_0$ désigne le nombre d'intersection en 0 dans \mathbb{C}^{n+1} de la courbe Γ_H et de l'hypersurface X_0 , $\mu^{(n+1)}$ désigne le nombre de Milnor de $(X_0,0)$ i.e. $\mu^{(n+1)} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\} / j(f)$ où $j(f)$ est l'idéal engendré dans $\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$ par les $\frac{\partial f}{\partial z_j}$ ($0 \leq i \leq n$), et $\mu^{(n)}$ est le nombre de Milnor de l'intersection $(X_0 \cap H, 0) \subset (H, 0)$, hypersurface à singularité isolée. (Ce nombre de Milnor ne dépend pas de $H \in \mathbb{P}^n - L_{X_0, X_0}$ et est donc un invariant de type analytique de $(X_0, 0)$.)

II.3 Formule de Plücker : Soit $X_0 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ une hypersurface dans \mathbb{P}^{n+1} , n'ayant que des singularités isolées au pire, et de degré $d > 1$. Alors le degré d^\vee de l'hypersurface duale $X_0^\vee \subset (\mathbb{P}^{n+1})^\vee$ [adhérence de l'image du morphisme $X_0 - \text{Sing } X_0 \rightarrow (\mathbb{P}^{n+1})^\vee$ qui à chaque point de $X_0 - \text{Sing } X_0$ associe l'hyperplan tangent à X en ce point, $(\mathbb{P}^{n+1})^\vee$ étant bien sûr le projectif des hyperplans de \mathbb{P}^{n+1}] ce degré dis-je, est donné par :

$$d^\vee = d(d-1)^n - \sum_{x \in \text{Sing } X_0} (\mu_x^{(n+1)}(X_0) + \mu_x^{(n)}(X_0)),$$

où $\mu_x^{(n+1)}(X_0)$ (resp. $\mu_x^{(n)}(X_0)$) est l'invariant associé comme en II.2 au germe d'hypersurface à singularité isolée (X_0, x) . [On suppose que X_0^\vee est bien une hypersurface, i.e., n'a pas de composante de dimension $< n$.]

Démonstration : Tout d'abord une définition :

II.3.1 Définition : On appellera pinceau de Lefschetz pour $X_0 \subset \mathbb{P}^{n+1}$ ou "pinceau générique", un pinceau d'hyperplans $P = (H_t)$ ($t \in \mathbb{P}^1$) tel que

- i) si $H_t \cap \text{Sing } X_0 = \emptyset$, $H_t \cap X$ a au plus une singularité quadratique ordinaire.
- ii) Si $H_t \ni x$, $x \in \text{Sing } X_0$, alors $H_t \notin L_{X_0, x}$, où $L_{X_0, x}$ est celui de II.2.

Remarque : Puisque $\dim L_{X_0, x} = n-1$, on vérifie facilement par un argument de

dimension le lemme suivant :

II.3.2 Lemme : Il existe des pincesaux de Lefschetz pour $X_0 \subset \mathbb{P}^{n+1}$.

II.3.3 Choisissons donc un tel pinceau P et des coordonnées homogènes Z_0, \dots, Z_{n+1} pour \mathbb{P}^{n+1} tels que :

- i) Toutes les singularités de X soient contenues dans l'ouvert affine $Z_{n+1} \neq 0$.
- ii) Le pinceau P soit défini par :

$$P : (T_0 Z_0 - T_1 Z_{n+1} = 0) \quad (t = (T_0 : T_1) \in \mathbb{P}^1) .$$

Choisissons également une équation $F(Z_0, \dots, Z_{n+1}) = 0$ pour $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$. F est un polynôme homogène de degré $d > 1$.

On peut remarquer que le pinceau P correspond à une droite $P^\vee \subset \mathbb{P}^{n+1}$ et que $d^\vee = (P^\vee \cdot X^\vee)$ (nombre de points d'intersection), et il est clair que d^\vee est précisément le nombre des hyperplans du pinceau P qui sont tangents à X_0 en un point non singulier de X_0 . (Le tout parce que P est un pinceau de Lefschetz.) Or, l'ensemble des points de X qui sont soit des points singuliers de X_0 , soit des points lisses de X_0 où l'hyperplan tangent à X appartient au pinceau P est l'intersection de X_0 avec la courbe :

$$\Gamma_P : \frac{\partial F}{\partial Z_1} = \dots = \frac{\partial F}{\partial Z_n} = 0 ,$$

comme on le vérifie immédiatement. Nous appellerons Γ_P la courbe polaire de X par rapport au pinceau P. Or Γ_P est définie par n équations de degré $d-1$, donc d'après le théorème de Bezout :

$$(\Gamma_P \cdot X_0) = d(d-1)^n .$$

De plus, on peut faire la remarque cruciale :

II.3.4 Dans l'ouvert affine $Z_{n+1} \neq 0$, Γ_P coïncide avec la courbe Γ_H de II.2, au voisinage de chaque point singulier $x \in X$. (Ici le z_0 de II.2 est $\frac{Z_0}{Z_{n+1}}$.)

Le théorème de Bezout s'écrit en fait :

$$\begin{aligned} (\Gamma_P \cdot X_0)_{\mathbb{P}^{n+1}} &= d(d-1)^n = \sum_{x \in \Gamma_P \cap X} (\Gamma_P \cdot X_0)_x \quad (\text{nombre d'intersection locaux}) \\ &= \sum_{x \in \Gamma_P \cap (X_0 - \text{Sing } X_0)} (\Gamma_P \cdot X_0)_x + \sum_{x \in \Gamma_P \cap \text{Sing } X_0} (\Gamma_P \cdot X_0)_x . \end{aligned}$$

Et puisque P est de Lefschetz, par définition $(\Gamma_P \cdot X_0)_x = 1$ si $x \in (X_0 - \text{Sing } X_0) \cap \Gamma_P$, et $d^v = \sum_{x \in \Gamma_P \cap (X_0 - \text{Sing } X_0)} 1$.

Par ailleurs, d'après II.2 et II.3.4 (et II.3.1),

$$(\Gamma_P \cdot X_0)_x = \mu_x^{(n+1)}(X_0) + \mu_x^{(n)}(X_0) \quad \text{si } x \in \text{Sing } X_0$$

donc finalement

$$d(d-1)^n = d^v + \sum_{x \in \text{Sing } X_0} (\mu_x^{(n+1)}(X_0) + \mu_x^{(n)}(X_0)),$$

ce qui démontre II.3.

II.4 Remarque : Cette démonstration permet d'identifier explicitement les pinceaux "non génériques".

II.5 Remarque : Dans le cas particulier $n=1$, $\mu_x^{(1)}(X_0)$ n'est autre que $n_x(X_0) - 1$, où n_x est la multiplicité du germe de courbe plane (X, x) et l'on retrouve la formule utilisée au § 7. Il faut observer que $\mu_x^{(2)}(X_0) + n_x(X_0) - 1$ est un invariant du type topologique de $(X_0, x) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$, alors que le résultat analogue pour $\mu_x^{(n+1)}(X_0) + \mu_x^{(n)}(X_0)$ ($n > 1$) est faux, comme le montre un exemple de Briançon et Speder. On en déduit que pour $n > 1$, la classe n'est pas un invariant de la position topologique de $X_0 \subset \mathbb{P}^{n+1}$.

II.6 On trouvera dans [I.E.P.] § 3, 3.6.3, la raison pour laquelle II.2 est une "Formule de Plücker locale".

II.6' Remarque : On peut aussi énoncer II.3 de façon un peu plus globale comme suit : soit Ω_X^1 le \mathcal{O}_X -Module des différentielles de $X_0 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$, et soit J' le n -ième idéal de Fitting de $\Omega_{X_0}^1$, qui peut aussi être décrit comme idéal jacobien de X_0 , i.e. comme l'idéal de \mathcal{O}_{X_0} engendré par $\left(\frac{\partial F}{\partial Z_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial Z_{n+1}} \right)$ où $F=0$ définit $X_0 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$. Alors

$$d^v = d(d-1)^n - e(J'),$$

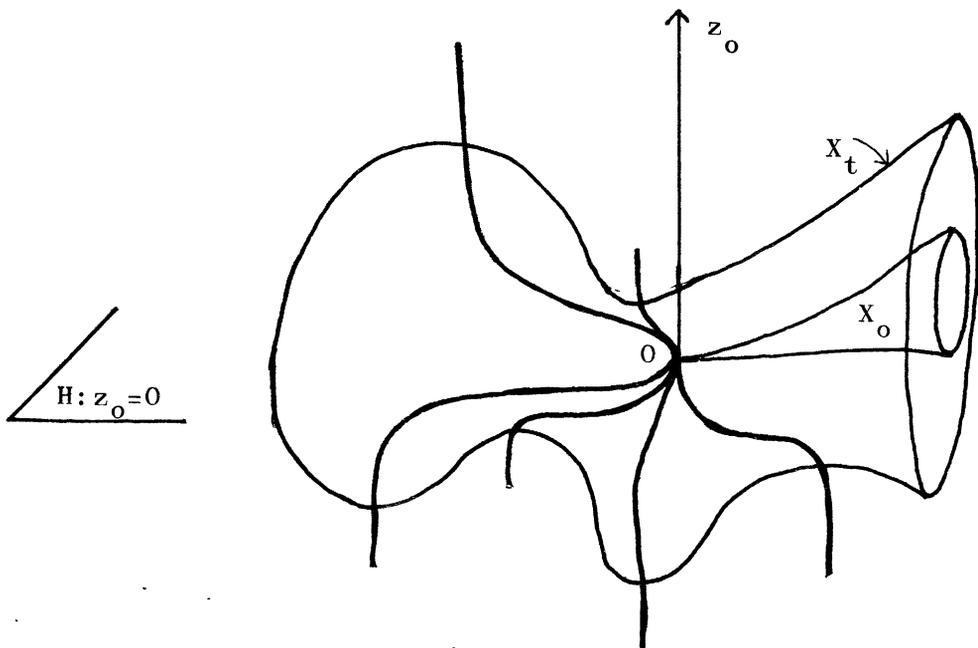
où $e(J')$ désigne la multiplicité de J' , (au sens de Samuel, [Sa], [Se]), i.e. $e(J') = \sum_{x \in \text{Sing } X_0} e(J' \cdot \mathcal{O}_{X_0, x})$.

L'équivalence de ceci avec II.3 résulte de ([C.E.W.] ch. II, 1.5).

II.7 Cette dernière formule pour d^V a été généralisée par Ragni Piene au cas d'hypersurfaces projectives réduites quelconques, dans sa Thèse (M.I.T. 1976) ; voir aussi [Pn].

II.8 Remarque : Interprétation géométrique de la formule de Plücker.

Soit $X_0 \subset \mathbb{P}^{n+1}$ une hypersurface, et soit P un pinceau de Lefschetz pour X . Dans une carte affine \mathbb{C}^{n+1} autour d'un point singulier $0 \in X$, on peut représenter P comme le pinceau des hyperplans dans \mathbb{C}^{n+1} parallèles à un hyperplan donné $z_0 = 0$ de direction assez générale relativement à l'hypersurface $X_0 \cap \mathbb{C}^{n+1}$ d'équation $f(z_0, \dots, z_n) = 0$. "Assez général" a un sens bien précis : au voisinage de chacun des points singuliers de $X_0 \cap \mathbb{C}^{n+1}$, l'hyperplan $z_0 = 0$ n'est pas limite (en direction) d'hyperplans tangents à X_0 en des points non-singuliers voisins (i.e., en fait de $L_{X_0, 0}$ de II.2 est précisément l'ensemble des telles positions limites, cf. [C.E.W.] ch. II). De plus il faut bien sûr que P satisfasse la condition de Lefschetz usuelle sur le contact d'un hyperplan avec X_0 en un point non-singulier de X_0 . Notons maintenant X_0 pour $X_0 \cap \mathbb{C}^{n+1}$, et examinons la situation au voisinage d'un point singulier $0 \in X_0$. Considérons les hypersurfaces de niveau du polynôme $f(z_0, \dots, z_n) : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$, et posons $X_t = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / f(z_0, \dots, z_n) = t\}$. Alors l'intersection de X_t avec la courbe polaire locale Γ_H par rapport à $z_0 = 0$ (cf. II.2) est transversale (X_t est non-singulière au voisinage de 0 pour $t \neq 0$ assez petit, et Γ_H est non-singulière hors de 0 au voisinage de 0) et consiste en $\mu^{(n+1)} + \mu^{(n)}$ points, qui sont exactement les points de X_t en lesquels l'hyperplan tangent est parallèle à $z_0 = 0$, i.e. appartient au pinceau P , et l'on voit bien pourquoi $\mu^{(n+1)}(X_0, 0) + \mu^{(n)}(X_0, 0)$ est la



diminution de classe due à la présence de la singularité $(X_0, 0)$: c'est évidemment le nombre d'hyperplans tangents en des points non singuliers de X_t appartenant au pinceau P qui sont "absorbés" par la singularité lorsque $t \rightarrow 0$.

II.9 Remarque : Il résulte de la formule ci-dessus et de ([C.E.W.] ch. I) que la diminution de classe due à la présence de la singularité isolée $(X_0, 0)$ sur une hypersurface projective ne dépend que du type topologique de $(X_0, 0)$ et de sa section hyperplane générique.

Par ailleurs, il a été démontré dans [T] , [H.I.] que si l'on prend un point de vue dynamique sur la formule de Plücker, i.e. si l'on compte non seulement le nombre de points d'intersection de X_t avec Γ_H , mais aussi les différentes vitesses avec lesquelles ils tendent vers 0 comme fonctions de t , on obtient un système d'invariants (le polygone de Newton jacobien) qui est assez fin et qui en particulier, dans le cas où $(X_0, 0)$ est un germe de courbe plane irréductible, détermine complètement le type topologique de $(X_0, 0)$.

II.10 Proposition : Soit

$$\begin{array}{ccc} X & \subset & Y \times \mathbb{P}^2 \\ & \searrow F & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & (Y, 0) \end{array}$$

une famille plate de courbes projectives planes réduites possédant des courbes duales. On suppose Y non-singulier, et de plus que F satisfait la condition suivante, au-dessus d'un voisinage (encore noté Y) du point marqué 0 dans Y :

(*) Toute composante irréductible du lieu critique $\text{crit}(F)$ de F qui n'est pas de dimension $< \dim Y$ est localement isomorphe à Y par F .

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- ① La famille $F^\vee : X^\vee \rightarrow Y$ des courbes duales est plate au-dessus de Y .
- ② Le morphisme composé $F \circ s : \tilde{X} \xrightarrow{s} X \xrightarrow{F} Y$, où s désigne la saturation lipschitzienne, est simple au-dessus de Y , i.e., localement sur \tilde{X}^Y triviale au sens analytique au-dessus de Y .
- ③ La famille F admet une résolution simultanée forte à la Hironaka.
- ④ (En géométrie analytique complexe : La famille F est, localement sur Y , topologiquement triviale en tant que famille plongée dans $Y \times \mathbb{P}^2$.)

Démonstration : Tout d'abord, la question est locale sur Y , et de plus il faut remarquer que chacune des quantités $\mu(X_y, x)$ et $n(X_y, x)$ ($y = F(x)$) est semi-continue

supérieurement comme fonction de $x \in X$. Supposons la condition (1) vérifiée : puisque F est plate, le degré $d_y = \deg X_y$ est constant et donc d'après la formule de Plücker, (1) implique que $\sum_{x \in X_y} \mu(X_y, x) + (n(X_y, x) - 1)$ est constant. La semi-continuité mentionnée plus haut implique que X_y doit avoir autant de points singuliers que X_0 et d'après l'hypothèse (*) on peut supposer que

$\text{crit}(F) = \bigcup_{i=1}^n \sigma_i(Y)$ où $\sigma_i : Y \rightarrow X$ est une section piquant la i -ème composante connexe de $\text{crit}(F)$ (le tout quitte à rétrécir Y). On a alors :

$\mu(X_y, \sigma_i(y)) + n(X_y, \sigma_i(y))$ constant, donc $\mu(X_y, \sigma_i(y))$ et $n(X_y, \sigma_i(y))$ constants ($1 \leq i \leq k$) et puisque s est un isomorphisme hors de $\text{crit}(F) = \text{Sing } X$, le résultat

(2) est une conséquence immédiate du résultat local 5.3.1.

(2) \Leftrightarrow (3) parce que les deux conditions sont locales au voisinage de $\text{crit}(F)$ et au vu de 5.3.1 encore.

(2) \Rightarrow (4) . Par définition, l'équisaturation implique que l'on peut relever les champs de vecteurs $D_\ell = \frac{\partial}{\partial y_\ell}$ ($1 \leq \ell \leq k = \dim Y$) en des champs de vecteurs méromorphes lipschitziens sur X au voisinage de $\text{crit}(F)$. On peut les recoller par partition de l'unité avec des champs de vecteurs C^∞ sur $X - \text{crit}(F)$ relevant les mêmes D_ℓ , obtenant ainsi des champs de vecteurs lipschitziens sur X , qui par leur propriété lipschitzienne s'étendent en champs de vecteurs lipschitziens dans un voisinage U de X dans $Y \times \mathbb{P}^2$, que l'on peut recoller par partition de l'unité avec des champs de vecteurs C^∞ relevant les D_ℓ dans $Y \times \mathbb{P}^2 - U'$, $X \subset U' \subset U$. En tout on obtient pour chaque D_ℓ un relèvement lipschitzien dans $Y \times \mathbb{P}^2$ tangent à X , et l'intégration de ces relèvements fournit la trivialisation topologique cherchée.

(4) \Rightarrow (3) . Parce que (4) implique aussitôt que $\text{crit}(F) \rightarrow Y$ est un revêtement trivial, le long de chaque composante $\sigma_i(Y)$ duquel le nombre de Milnor $\mu(X_y, \sigma_i(y))$ est constant puisque l'on sait que c'est un invariant du type topologique. On applique à nouveau 5.3.1.

(3) \Rightarrow (1) . Parce que d'après 5.3.1, (3) implique que $\text{crit}(F) \rightarrow Y$ est un revêtement trivial, le long de chaque composante $\sigma_i(F)$ duquel $\mu(X_y, \sigma_i(y))$ et $n(X_y, \sigma_i(y))$ sont constants. Puisque d_y est constant, (1) résulte aussitôt de la formule de Plücker.

II.11 Remarque : Si X_0 n'a pour singularités que des cusps et des points doubles ordinaires, (*) est automatiquement satisfaite.

II.12 Remarque : Soit (X_y) une famille à un paramètre de courbes projectives planes réduites, admettant chacune une courbe duale, et n'ayant comme singularités que des points doubles ordinaires. Alors si le nombre des composantes irréductibles de X_0 est strictement plus grand que celui de X_y pour $y \neq 0$, le nombre

des points doubles de X_0 est strictement plus grand que celui de X_y pour $y \neq 0$.

En effet, sinon X_0 et X_y auraient la même classe, et comme la condition (*) est satisfaite, X_0 et X_y auraient des saturations isomorphes, donc en particulier le même nombre de composantes irréductibles.

Ce résultat est un avatar du "principe de dégénérescence" d'Enriques [cf. O. Zariski, Algebraic surfaces, 2nd edition (Springer Ergebnisse No 61, 1971, p. 216)].

*
**
*

R E F E R E N C E S

- [Ar] M. Artin, On isolated rational singularities of surfaces, Amer. Journ. of Math. 88 (1966).
- [A.F.] A. Andreotti and T. Frankel, The Lefschetz theorem on hyperplane sections, Ann. of Maths. 69 (1959) 713-717.
- [B] R. Bassein, On smoothable curve singularities, local methods, Math. Annalen.
- [Br] E. Brieskorn, Über die Auflösung gewisser Singularitäten, Math. Annalen 166 (1966).
- [Bo] E. Bøger, Zur theorie der Saturation bei analytischen Algebren, Math. Annalen 211 (1974) 119-143.
- [C.E.W.] B. Teissier : Cycles évanescents, sections planes, et conditions de Whitney, in "Singularités à Cargèse", Astérisque No 7-8 (1973) p. 285-362.
- [D] M. Demazure, Classification des singularités, d'après V.I. Arnol'd, Séminaire Bourbaki, Juin 1974.
- [D.V.] P. DuVal, On singularities which do not affect the condition of adjunctions, Proc. Camb. Phil. Soc. 30 (1934) p. 453.
- [D.C.N.] B. Teissier : Sur diverses conditions numériques d'équisingularité des familles de courbes (et un principe de spécialisation de la dépendance intégrale), Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique No M208.0675 (Juin 75).
- [E.M.S.] R. Thom : Ensembles et morphismes stratifiés, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969) 240-284.
- [F] J. Frisch, Points de platitude d'un morphisme analytique, Inventiones Math. 4 (1967) 118-138.
- [G] Gabrielov, Bifurcations, Dynkin diagrams and the modality, Funct. Analysis and appl. 8 (1974) 94-98.
- [Gi] M. Giusti, Classification des germes d'intersection complète simple, à paraître.
- [H₁] H. Hironaka, Stratification and flatness, Lectures at the Nordic Summer School Oslo 1976, Noordhoff (Per Holm éditeur).
- [H₂] H. Hironaka, Introduction to the theory of infinitely near singular points, Memorias de Matematica del Instituto Jorge Juan No 28 et aussi 29, 31 avec Vicente et Aroca, Serrano 123, Madrid, Espagne.
- [H₃] H. Hironaka, On the arithmetic genera and the effective genera of algebraic curves, Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto 30 (1957).
- [H.I.] B. Teissier, The hunting of invariants on the geometry of discriminants, Proc. Nordic Summer School 1976, Noordhoff (Per Holm éditeur).
- [H.L.] H. Hamm et Lê Dũng Tráng, Un théorème de Zariski du type de Lefschetz,

- [I.E.P.] B. Teissier : Introduction to equisingularity problems, Arcata 1974, Proc. Symp. Pure Math. No 29 AMS 1975.
- [La] F. Lazzeri, A theorem on the monodromy..., in "Singularités à Cargèse", Astérisque No 7-8 (1973).p.
- [Le₁] Lê Dũng Tráng, Application d'un théorème de A'Campo à l'équisingularité, Indag. Math. 35 No 5 (1973).
- [Le₂] Lê Dũng Tráng, La monodromie n'a pas de point fixe, J. Fac. des Sc. de Tokyo, vol. 22, No 3 (1975) 409-427.
- [Le₃] Lê Dũng Tráng, Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface, Ann. Inst. Fourier, t. XXIII Fasc. 4 (1973).
- [Le₄] Lê Dũng Tráng, On relative monodromy, Proc. Nordic Summer School Oslo 1976, Noordhoff.
- [Lf] H. Laufer, On rational singularities, Mar. J. Maths. 94 (1972).
- [Li₁] J. Lipman, Relative Lipschitz saturation, Amer. J. Math., vol. 97 (1975) 791-813.
- [Li₂] J. Lipman, Lettre à l'auteur, 13 Déc. 1975.
- [L.L.T.] Lê Dung Trang, M. Lejeune et B. Teissier, Sur un critère d'équisingularité, Note aux C.R. Acad. Sc. Paris t. 271 (1970) p. 1065.
- [Lm] G. Laumon, Degré de l'hypersurface duale ..., Bull. Soc. Math. Fr. 104 (1976) 51-63.
- [L.R.] Lê Dung Trang et C.P. Ramanujam, The invariance of the Milnor number implies the invariance of the topological type, Amer. J. of Math.
- [L.T.] M. Lejeune-Jalabert et B. Teissier, Clôture intégrale des idéaux et équisingularité, Séminaire 1973-74 disponible à Institut de Maths. Pures 38402 St. Martin d'Hères.
- [Ma₁] J. Mather, Stratifications and mappings, in "Dynamical systems", Academic Press 1973.
- [Ma₂] J. Mather, Notes on topological stability, Harvard University, 1970.
- [Mi₁] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Studies No 61, Princeton U.P. 1968.
- [Mi₂] J. Milnor, Lectures on the h-cobordism theorem, Princeton University Press 1966.
- [O.W.] P. Orlik and P. Wagreich, Isolated singularities of algebraic surfaces with \mathbb{C}^* action, Annals of Math. 93 (1971) 205-228.
- [P] F. Pham, Formules de Picard-Lefschetz généralisée et ramification des intégrales, Bull. Soc. Math. Fr. 93 (1968) 333-367.
- [P.T.] F. Pham et B. Teissier, Fractions lipschitziennes d'une algèbre analytique complexe, et saturation de Zariski, Centre de Mathématiques de

- l'Ecole Polytechnique, No M170.0669 (Juin 69). Aussi : Pham in Proc. Cong. Int. Math. Nice 1970 (Gauthier Villars).
- [Pn] R. Piene, Polar classes of singular varieties, à paraître. Ann. ENS 1978.
- [Pi] H. Pinkham, Deformations of normal surface singularities with \mathbb{C}^* action, Math. Annalen 232 (1978) 65-84.
- [Re] D. Rees, A-transforms of local rings and a theorem on multiplicities, Proc. Camb. Phil. Soc. 57 (1961) 8-17.
- [Rg] C. Rego, Deformations of singular curves, preprint TIFR Bombay 1977.
- [Ri] J.J. Risler, Sur l'idéal jacobien d'une courbe plane, Bull. Soc. Math. Fr. 99 (1971) 305-311.
- [Se] J.P. Serre, Algèbre locale, multiplicités, Springer Lect. Notes No 11.
- [Sp] E. Spanier, Algebraic topology, Mac Graw Hill 1966.
- [T] B. Teissier, Variétés polaires I, Inv. Math. 40 (1977) 267-292.
- [Wa] J. Wahl, Equisingular deformations of normal surface singularities I, Annals of Math. 104 (1976) 325-356.
- [Z₁] O. Zariski, Studies in Equisingularity I, II, Amer. J. Maths. 87 (1965).
- [Z₂] O. Zariski, Contribution to the problems of equisingularity, C.I.M.E. 1969, Edizioni Cremonese Roma 1969.
- [Z.S.] O. Zariski and P. Samuel, Commutative Algebra I, II, Van Nostrand.
-