Séminaire sur les singularités des surfaces
École Polytechnique

M. Demazure

Surfaces de Del Pezzo : II - Éclater n points dans $\mathbb{P}^2$

Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique) (1976-1977), exp. nº 4, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SSS_1976-1977____A5_0>

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE SUR LES SINGULARITES DES SURFACES

SURFACES DE DEL PEZZO :

II - ECLATER n POINTS DANS $\mathbb{P}^2$

M. DEMAZURE

26 Octobre 1976

1. COURBES EXCEPTIONNELLES

Si X est une surface lisse connexe, on note Pic(X) le groupe de Picard de X, $\omega_X \in \mathrm{Pic}(X)$ la classe canonique (et aussi le faisceau canonique) et . la forme intersection. Par exemple si $X \simeq \mathbb{P}^2$, on a $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$, avec $\omega_X = -3$ et $p.q = pq$.

Si $x \in X$, notons X(x) le résultat de l'éclatement de x dans X et E le diviseur exceptionnel. Alors Pic(X(x)) s'identifie naturellement à $\mathrm{Pic}(X) \times \mathbb{Z}$, avec $\mathrm{cl}(E) = (0,-1)$, $\omega_{X(x)} = \omega_X + \mathrm{cl}(E) = (\omega_X,-1)$, et on a $(a,n) . (b,m) = a.b - m.n$, donc $E.E = -1$; $E.\omega_{X(\varepsilon)} = -1$. Notons que l'isomorphisme $\mathrm{Pic}(X(x)) = \mathrm{Pic}(X) \times \mathbb{Z}$ a été choisi de façon que l'on ait $(a,b).E = b$. Rappelons aussi que, si D est un diviseur sur X, alors l'injection canonique $\mathrm{Pic}(X) \subset \mathrm{Pic}(X(x))$ associe à la classe de D la classe du <u>transformé total</u> D' de D ; si D est effectif, alors $D' = \hat{D} + \alpha E$, où $\hat{D}$ est le transformé strict de D, et où $\alpha = \hat{D}.E = \mathrm{mult}(x;D) \geq 0$, donc $\mathrm{cl}(\hat{D}) = (\mathrm{cl}(D),\mathrm{mult}(x;D))$.

Inversement, soit Y une surface projective lisse connexe, et ξ un élément <u>exceptionnel</u> de Pic(Y), c'est-à-dire un élément tel que $\xi.\xi = -1$ et $\xi.\omega_Y = -1$. Si ξ est <u>effectif</u> et <u>irréductible</u>, alors il est de la forme cl(E) où E est une courbe uniquement déterminée (puisque $E.E < 0$) et isomorphe à $\mathbb{P}^1$ (puisque $\dim H^1(E,O_E) = 1 + \frac{1}{2}\,E.(E+\omega) = 0$). D'après le théorème de Castelnuovo, on peut alors <u>contracter</u> E (c'est-à-dire écrire $Y = X(x)$, avec X projective et lisse, de façon que E soit le diviseur exceptionnel). On posera éventuellement $X = Y|\xi$, $x = \xi|\xi$.

2. LES SURFACES $X(\Sigma)$, ET LEURS ELEMENTS EXCEPTIONNELS

Dans la suite, on considère des surfaces obtenues à partir de $\mathbb{P}^2$ par éclatements successifs. Plus précisément, on considère une surface X <u>isomorphe</u> à $\mathbb{P}^2$ et une suite $(x_1,\dots, x_r) = \Sigma$ de points tels que $x_2 \in X(x_1),\dots,x_r \in X(x_1)(x_2),\dots,(x_{r-1})$, et on pose $X(\Sigma) = X(x_1)(x_2),\dots,(x_r)$. Si les projections des x_i dans X sont toutes distinctes, c'est-à-dire si $\Sigma \subset X$, $X(\Sigma)$ peut s'obtenir par éclatement simultané de la famille $x_1,\dots,x_r$ de points de X.

On note E_0 l'image réciproque dans $X(\Sigma)$ d'une droite de X, $E_1,\dots,E_r$ les images réciproques <u>totales</u> de $x_1,\dots,x_r$ dans $X(\Sigma)$. On pose

$\omega_{X(\Sigma)} = \omega$. D'après le No 1, on a canoniquement,

$$\mathrm{Pic}(X(\Sigma)) = \mathbb{Z}^{[0,r]}$$

par l'isomorphisme $\xi \mapsto (\xi.E_o;\xi.E_1,\dots,\xi.E_r)$, de sorte que les vecteurs de base de $\mathbb{Z}^{[0,r]}$ sont les classes de $E_o;-E_1,\dots,-E_r$. On a

(1) $$E_o^2 = 1 \quad ; \quad E_i^2 = -1 \quad ; \quad E_i.E_j = 0 \quad , \quad 0 < i \neq j \quad ;$$

(2) $$\omega = -3E_o + \Sigma\, E_i = (-3;-1,-1,\dots,-1) \quad ;$$

(3) $$\omega.E_o = -3 \quad ; \quad \omega.E_i = -1 \ , \ i > 0 \quad ; \quad \omega.\omega = 9-r \quad .$$

Si $\hat{D}$ est le transformé strict dans $X(\Sigma)$ d'un diviseur effectif D de X, et D' son image réciproque totale, on a $\mathrm{cl}(\hat{D}) = (a_o;a_1,a_2,\dots,a_n)$ où $a_o = \deg(D)$, $a_i = \mathrm{mult}(x_i;D)$, $\mathrm{cl}(D') = (a_o;0,\dots,0)$.

Notons que dire que les points x_i sont de projections distinctes dans $\mathbb{P}^2$ signifie que les E_i sont <u>irréductibles</u>, ou encore que, pour $1 \leq i < j \leq r$, les éléments $\mathrm{cl}(E_j) - \mathrm{cl}(E_i)$ <u>ne sont pas effectifs</u>.

<u>Lemme 1</u> : <u>Soit</u> $\xi \in \mathrm{Pic}(X(\Sigma))$.

a) <u>Si</u> ξ <u>est effectif</u>, <u>alors</u> $\xi.E_o \geq 0$.

b) <u>Si</u> $\xi \circ E_o \geq -2$, <u>alors</u> $H^2(\xi) = 0$. <u>Si de plus</u> $\xi.\xi \geq \xi.\omega$, <u>alors</u> ξ <u>est effectif</u>.

a) Cela résulte aussitôt de ce que E_o est mobile $(E_o.E_o \geq 0)$: si $\xi = \mathrm{cl}(D + \alpha E_o)$, avec D effectif ne contenant pas E_o, alors $\xi.E_o = D.E_o + \alpha \geq 0$.

b) Si $\xi.E_o \geq -2$, alors $(\omega-\xi).E_o = -3 - \xi.E_o < 0$, donc $H^o(\omega-\xi) = 0$ d'après a). Par dualité de Serre, cela donne $H^2(\xi) = 0$, donc par Riemann-Roch

$$\dim H^o(\xi) = 1 + \frac{1}{2}\,(\xi-\omega).\xi + \dim H^1(\xi) \geq 1 + \frac{1}{2}\,(\xi-\omega).\xi \quad ;$$

si donc $(\xi-\omega).\xi \geq 0$, il en résulte que ξ est effectif.

<u>Proposition 1</u> : a) <u>Si</u> $r \leq 9$, <u>la restriction de la forme intersection à l'orthogonal de</u> ω <u>est négative</u> ; <u>elle est non dégénérée si</u> $r < 9$, <u>dégénérée si</u> $r = 9$.

b) <u>Si</u> $r \leq 9$, <u>tous les éléments exceptionnels de</u> $\mathrm{Pic}(X(\Sigma))$ <u>sont effectifs</u> ; <u>ils sont en nombre fini si</u> $r < 9$, <u>en nombre infini sinon</u>.

Supposons $r \leq 9$. Pour tout ξ dans Pic(X), on a $((\xi.E_o)\omega + 3\xi).E_o = -3(\xi.E_o) + 3(\xi.E_o) = 0$. Posant $\bar{\xi} = (\xi.E_o)\omega + 3\xi$, on a $\xi = -\frac{1}{3}(\xi.E_o)\omega + \frac{\bar{\xi}}{3}$, et $E_o.\bar{\xi} = 0$, donc $\bar{\xi}.\bar{\xi} \leq 0$ (formules (1)). Cela donne

$$(4) \qquad (\xi.E_o)^2(9-r) + 6(\xi.E_o)(\xi.\omega) + 9(\xi.\xi) = \bar{\xi}.\bar{\xi} \leq 0 \quad .$$

Si $\xi.\omega = 0$ et $r \leq 9$, on en tire

$$9(\xi.\xi) = \bar{\xi}.\bar{\xi} - (9-r)(\xi.E_o)^2 \leq 0 \quad ;$$

si $\xi \neq 0$, alors soit $\bar{\xi} \neq 0$, soit $\xi.E_o \neq 0$, donc $\xi.\xi < 0$ si $r \neq 9$. Pour $r = 9$, on a $\omega.\omega = 0$, d'où a).
Si ξ est exceptionnel, (4) donne

$$(5) \qquad (\xi.E_o)^2(9-r) - 6(\xi.E_o) - 9 = \bar{\xi}.\bar{\xi} \leq 0 \quad ,$$

donc, pour $r \leq 9$

$$\xi.E_o = -\frac{9}{6} + \frac{(\xi.E_o)(9-r)}{6} - \frac{(\bar{\xi}.\bar{\xi})}{6} \geq -2 \quad ,$$

et ξ est effectif d'après le lemme 1, b). Si $r < 9$, (5) s'écrit aussi

$$(\xi.E_o)^2(8-r) + ((\xi.E_o) - 3)^2 - \bar{\xi}.\bar{\xi} = 18 \quad ,$$

qui n'a qu'un nombre fini de solutions, puisque $\bar{\xi} \mapsto (-\bar{\xi}.\bar{\xi})$ est une forme quadratique positive et non dégénérée. Pour $r = 9$, les conditions $\xi.\xi = -1$ et $\xi.\omega = -1$ s'écrivent

$$\begin{cases} \xi = -\frac{1}{3}\left(-\frac{9}{6} - \frac{\bar{\xi}.\bar{\xi}}{6}\right)\omega + \frac{\bar{\xi}}{3} \\ \bar{\xi}.\omega = -3 \end{cases}$$

qui a évidemment une infinité de solutions (correspondant à tous les $\bar{\xi}$ tels que $\bar{\xi}.\omega = -3$, $\bar{\xi}.E_o = 0$, et qui donnent pour ξ calculé par la formule précédente une valeur "entière").

<u>Remarques</u> : 1) D'après a) l'ensemble des solutions de $\xi.\omega = 0$, $\xi.\omega \geq -A$ est fini pour $r < 9$. Il est infini pour $r = 9$ puisque $\xi = n\omega$ convient ($A \geq 0$!).

2) Ce qui précède permet de déterminer tous les éléments exceptionnels pour $r \leq 9$ (cf. table 3). Nous donnerons un autre procédé de calcul ci-dessous. Nous prouverons aussi (corollaire 2 de la prop. 4) l'assertion suivan-

te, qui pourrait simplement se vérifier sur la liste des solutions :

(6) Pour $r \leq 9$, tout élément $\alpha \in \mathrm{Pic}(X)$ tel que $\alpha.\alpha = -2$ et $\alpha.\omega = 0$ s'écrit sous la forme $\xi_1 - \xi_2$ où ξ_1 et ξ_2 sont exceptionnels orthogonaux (la réciproque est évidente).

3. COURBES ANORMALES

Si, d'après ce qui précède, la structure algébrique formée par le groupe $\mathrm{Pic}(X(\Sigma))$ muni de ω et de la forme quadratique ne dépend pas de la "géométrie" du système Σ, il n'en est pas de même des propriétés liées à l'effectivité ou à l'amplitude des diviseurs.

Nous dirons qu'une courbe irréductible Γ sur $X(\Sigma)$ est anormale si $\omega.\Gamma \geq 0$. Il existe des courbes irréductibles anormales et verticales sur $X(\Sigma)$ si et seulement si l'un au moins des E_i n'est pas irréductible, c'est-à-dire si l'on n'a pas $\Sigma \subset X$. Par ailleurs :

Proposition 2 : a) Pour $r \leq 8$, les courbes irréductibles anormales non verticales sur $X(\Sigma)$ sont les transformés stricts des courbes suivantes de X : les droites passant par trois au moins des points de Σ, les coniques irréductibles passant par six au moins des points de Σ, et les cubiques irréductibles passant par sept au moins des points de Σ et ayant en outre un point double en un autre point de Σ.

b) Pour $r \geq 9$, il existe toujours des courbes anormales.

Remarquons d'abord que b) est évident : prendre une cubique passant par 9 des points de Σ. Démontrons a). Soit Γ une courbe irréductible de X d'image réciproque stricte anormale et soit $(a_o;a_1,\dots,a_r)$ l'élément correspondant de $\mathrm{Pic}(X(\Sigma))$; on a $\omega.(a_o,\dots,a_r) = -3a_o + a_1 + \dots + a_r$, donc

$$3a_o \leq a_1 + \dots + a_r \quad .$$

Par ailleurs $a_o = (a_o;\dots,a_r).E_o = \deg(\Gamma)$, $a_i = (a_o;\dots,a_r).E_i = \mathrm{mult}(x_i;\Gamma)$ pour $i > 0$.

Notons que, si un point x_i de Σ se trouve au-dessus d'un point x_j de Σ, alors $a_i \geq a_j$. On peut donc supposer avoir éclaté les x_i dans un ordre tel que

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r \quad .$$

Si $a_o = 1$, on a $a_1 \leq 1$, donc $r \geq 3$ et $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. Si $a_o = 2$, on a $a_1 \leq 1$, donc

$r \geq 6$ et $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 1$. Si $a_o = 3$, on a soit $a_1 \leq 1$ auquel cas $r \geq 9$ et $a_1 = \dots = a_9 = 1$, soit $a_1 = 2$, $a_2 \leq 1$, auquel cas $r \geq 8$, $a_1 = 2$, $a_2 = \dots = a_8 = 1$. Supposons donc $a_o \geq 4$.

Si $r \leq 1$, alors $3a_o \leq a_1 \leq a_o$, ce qui est exclu. Si $2 \leq r \leq 5$, appliquant Bezout à Γ et à la droite joignant x_1 à x_2, on obtient $a_o \geq a_1 + a_2$, donc $a_2 \leq \frac{a_o}{2}$ et $3a_o \leq a_1 + a_2 + (r-2)a_2 \leq a_o + \frac{r-2a_o}{2} < 3a_o$, ce qui est exclu. Si $6 \leq r \leq 7$, appliquant Bezout à Γ et à une conique passant par $x_1,\dots,x_5$, on obtient $2a_o \geq a_1 + \dots + a_5$, donc $a_5 \leq \frac{2a_o}{5}$ et $3a_o \leq a_1 + \dots + a_5 + (r-5)a_5 \leq 2a_o + \frac{2(r-5)a_o}{5} < 3a_o$. Si $r = 8$, considérons une cubique passant par $x_1,\dots,x_8$ et un autre point y de Γ ; d'après Bezout, on a $3a_o \geq a_1 + \dots + a_8 + 1$, ce qui contredit la condition imposée. Cela achève de démontrer a).

Remarque : Supposons $r \leq 8$. Alors d'après ce qui précède, les classes dans $\mathrm{Pic}(X(\Sigma))$ des courbes irréductibles anormales sur $X(\Sigma)$ sont de l'une des formes suivantes :

α) $a_o = 0$, l'un des a_i, $i > 0$ égal à -1, les autres ≥ 0 et non tous nuls.

β) $a_o = 1$, au moins trois des a_i, $i > 0$, égaux à 1, les autres nuls.

γ) $a_o = 2$, au moins six des a_i, $i > 0$, égaux à 1, les autres nuls.

δ) $a_o = 3$, l'un des a_i égal à 2, les sept autres égaux à 1 ($r = 8$).

Elles sont donc toutes de la forme $\alpha - \theta$, où θ est combinaison linéaire à coefficients positifs des E_i, $i>0$, et où α est de l'une des formes suivantes (à permutation près des indices > 0) : $(0;-1,1,0,\dots)$, $(1;1,1,1,0,\dots)$, $(2;1.1,1,1,1,1,\dots)$, $(3;2,1,1,1,1,1,1,1)$.

Comme on le vérifie aussitôt, on a toujours $\alpha.\alpha = -2$, $\alpha.\omega = 0$.

Théorème 1 : Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le système anticanonique de $X(\Sigma)$ (i.e. le faisceau $\omega_{X(\Sigma)}^{\otimes -1}$) est ample.

(ii) $r \leq 8$, et tous les diviseurs exceptionnels de $X(\Sigma)$ sont (effectifs et) irréductibles.

(iii) $r \leq 8$, tous les points de Σ appartiennent à X, trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés, six quelconques ne sont pas sur une même conique, et il n'existe aucune cubique qui passe par sept des points et et ait un point double en un huitième.

(iv) Il n'existe aucune courbe (irréductible) anormale sur $X(\Sigma)$.

(v) $r \leq 8$ et il n'existe aucun élément effectif α de $\mathrm{Pic}(X(\Sigma))$ tel que $\alpha.\alpha = -2$, $\alpha.\omega = 0$.

D'après le critère de Nakaï, ω^{-1} est ample si et seulement si pour tout diviseur effectif (irréductible) D sur $X(\Sigma)$, on a $D.\omega^{-1} > 0$, i.e. $D.\omega < 0$. Cela donne l'équivalence de (i) et (iv). L'équivalence de (iii) et (iv) résulte de la détermination des courbes anormales sur $X(\Sigma)$ faite ci-dessus.
Si ω^{-1} est ample, et si ξ est exceptionnel (donc effectif, prop. 1) et non irréductible, on peut écrire $\xi = \xi_1 + \xi_2$, avec $\xi_1.\omega^{-1} > 0$, $\xi_2.\omega^{-1} > 0$, ce qui contredit $\xi.\omega^{-1} = 1$, d'où (i) $\Rightarrow$ (ii).
Par ailleurs, si $\alpha \in \mathrm{Pic}(X(\Sigma))$ est tel que $\alpha.\alpha = -2$ et $\alpha.\omega = 0$, il existe (No 2) des diviseurs exceptionnels ξ_1 et ξ_2 avec $\xi_1 - \xi_2 = \alpha$. Si α est effectif, alors $\xi_1 = \xi_2 + \alpha$ n'est pas irréductible, donc (ii) $\Rightarrow$ (v). Enfin, s'il existe sur $X(\Sigma)$ des courbes anormales, il existe un élément effectif α de $\mathrm{Pic}(X(\Sigma))$ tel que $\alpha.\alpha = -2$, $\alpha.\omega = 0$ (remarque précédant le théorème 1), donc (v) $\Rightarrow$ (iv).

4. RACINES, GROUPE DE WEYL

Pour l'instant, nous abandonnons la géométrie pour étudier la situation algébrique suivante : on donne un entier $r \geq 0$, on considère

$$P_r = \mathbb{Z}^{[0,r]}$$

muni de sa base canonique, notée $E_0, -E_1, -E_2, \ldots$, de la forme quadratique telle que

$$E_0.E_0 = 1, \quad E_i.E_j = -1,\ i > 0, \quad E_i.E_j = 0,\ i \neq j \quad ,$$

et du vecteur $\omega_r = -3E_0 + \Sigma\, E_i = -(3;1,1,1,\ldots)$.
On note Q_r l'orthogonal de ω_r dans P_r, donc

$$Q_r = \{(a_0;a_1,\ldots,a_r) \mid 3a_0 = \sum_{i>0} a_i\} \quad ,$$

et on pose

$$I_r = \{\xi \in P_r \mid \xi.\xi = -1,\ \xi.\omega_r = -1\}$$

$$R_r = \{\alpha \in Q_r \mid \alpha.\alpha = -2\} = \{\alpha \in P_r \mid \alpha.\alpha = -2,\ \alpha.\omega_r = 0\} \quad .$$

Les éléments de I_r sont les <u>éléments exceptionnels</u>, les éléments de R_r les <u>racines</u>.
Pour $r \leq s$, on identifie P_r à son image naturelle dans P_s, et on a

$$P_s \cap Q_r = Q_s \quad , \quad P_s \cap R_r = R_s \quad , \quad P_s \cap I_r = I_s \quad .$$

On appellera racines simples les racines définies par

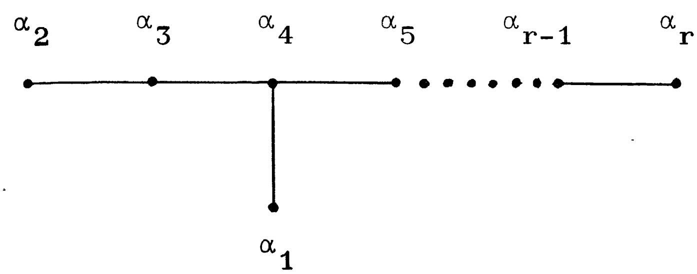
$$\alpha_1 = E_0 - E_1 - E_2 - E_3 = (1,1,1,1,0,\dots)$$

$$\alpha_2 = E_2 - E_1 \quad , \quad \alpha_3 = E_3 - E_2, \dots \quad , \quad \alpha_i = E_{i+1} - E_i \quad .$$

On note S l'ensemble des racines simples. On a $S \cap R_2 = \{\alpha_2\}$, $S \cap R_r = \{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$ pour $r \geq 3$.

Proposition 3 : a) On a $R_0 = R_1 = \emptyset$, $R_2 = \{\alpha_2, -\alpha_2\}$.

b) Pour $r \geq 3$, les α_i, $i = 1,\dots,r$, forment une base du $\mathbb{Z}$-module Q_r ; on a $\alpha_i . \alpha_i = -2$, et $\alpha_i . \alpha_j = 0$ pour $i \neq j$ sauf pour les paires suivantes, pour lesquelles $\alpha_i . \alpha_j = 1$: $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,4)$, ... $(r-1,r)$:



c) La forme quadratique induite par . sur Q_r est négative non dégénérée pour $r \leq 8$, négative et dégénérée pour $r = 9$.

C'est trivial pour a) et b), et a déjà été démontré pour c).

Pour chaque $\alpha \in R_r$, soit s_α la réflexion orthogonale de P_r définie par

$$s_\alpha(X) = X + (X.\alpha)\alpha \quad .$$

On a $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$, s_α respecte la forme intersection et fixe ω_r , donc induit des permutations de Q_r, I_r, R_r. On note W_r le sous-groupe de $\mathbb{GL}(P_r)$ engendré par $s_{\alpha_1},\dots,s_{\alpha_r}$; on l'appelle le groupe de Weyl. Enonçons tout de suite :

Théorème 2 : Supposons $r \leq 9$. Alors :

a) Le groupe W_r est le groupe de tous les automorphismes de P_r laissant fixe ω_r et . . Il est fini pour $r \leq 8$, infini pour $r \geq 9$.

b) Le fixateur de E_r dans W_r est W_{r-1} $(r \geq 1)$.

c) W_r opère transitivement dans R_r pour $r \geq 2$; il opère transitivement *dans* I_r *pour* $r \geq 3$; *pour* $r = 0,1,2,$ *le nombre d'orbites de* W_r *dans* I_r *est* $0,1,2$.

Nous démontrons ce théorème ci-dessous. Notons seulement ici les faits suivants :

a) Pour $i > 1$, la réflexion s_{α_i} laisse fixe E_j pour $j \neq i-1, i$, et permute E_{i-1} et E_i ; les s_{α_i} pour $2 \leq i \leq r$ engendrent donc le groupe $\mathfrak{S}_r$ de toutes les permutations des coordonnées de P_r laissant fixe la 0-ième.

b) La réflexion s_{α_1} applique l'élément $(a_o ; a_1, \ldots, a_r)$ de P_r $(r \geq 3)$ sur l'élément $(a_o + m,\ a_1 + m,\ a_2 + m,\ a_3 + m,\ a_4,\ a_5, \ldots)$ où $m = a_o - a_1 - a_2 - a_3$.

c) On a $W_o = W_1 = \{id\}$; on a $W_2 = \mathfrak{S}_2$. Pour $r \geq 3$, le groupe W_r est engendré par $\mathfrak{S}_r$ et par la transformation s_{α_1} précédente.

d) W_{r-1} laisse fixe E_r, $(r \geq 1)$.

5. LES ELEMENTS EXCEPTIONNELS ET LES RACINES $(r \leq 9)$

Lemme 2 : *Pour* $3 \leq r \leq 9$, *le groupe* W_r *opère transitivement dans* I_r.

Soit $\xi = (a_o, \ldots, a_r) \in I_r$. Notons d'abord que $a_o \geq 0$; cela résulte en effet de la prop. 1 b). On peut aussi le démontrer ici directement : on doit avoir

$$3a_o - \sum_{i>0} a_i = 1 \quad , \quad a_o^2 - \sum_{i>0} a_i^2 = -1 \quad ,$$

ce qui donne

$$\sum_{i=1}^{r} (a_o - 3a_i)^2 + (9-r)a_o^2 = 6a_o + 9 \quad .$$

Donc $a_o \geq -1$; mais $a_o = -1$ est impossible, puisque cela donne $\sum_{i>0} a_i^2 = 2$, $\sum_{i>0} a_i = -4$. Par ailleurs, si $a_o = 0$, alors ξ est l'un des E_i, $i > 0$, qui sont permutés transitivement par $\mathfrak{S}_r \subset W_r$.

Supposons $a_o > 0$. Quitte à permuter les indices > 0, on peut supposer

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_r \quad .$$

Montrons qu'alors $a_1 + a_2 + a_3 > a_o$, ce qui permettra de conclure (en effet, par application de s_{α_1}, on diminue alors a_o, et on termine par récurrence). Supposons $a \geq a_1 + a_2 + a_3$, et posons $b_i = a_i - \frac{a_o}{3}$; alors

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_r \quad ,$$

$$b_1 + b_2 + b_3 \leq 0 \quad , \quad b_1 + \dots + b_r = \sum_{i>0} a_i - r \frac{a_o}{3} = \frac{9-r}{3} a_o - 1 \geq -1 \quad .$$

Si $b_3 \geq 0$, alors b_1, b_2, b_3 sont nuls et $b_4, \dots, b_r$ négatifs de somme ≥ -1, donc ξ est l'un des E_i et $a_o = 0$, contrairement à l'hypothèse. Si $b_3 < 0$, alors

$$-1 \leq \frac{9-r}{3} a_o - 1 \leq b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_r \leq b_1 + b_2 + b_3 + (r-3)b_3 \leq (r-3)b_3 \quad ;$$

cela implique $r \leq 4$, et

$$\frac{9-r}{3} a_o = 0 \quad , \quad \text{donc encore} \quad a_o = 0 \quad .$$

<u>Lemme 3</u> : <u>Pour</u> $2 \leq r \leq 9$, W_r <u>opère transitivement dans</u> P_r.

En raisonnant comme dans le lemme 2 (c'est d'ailleurs plus facile), on voit que toute racine $\alpha = (a_o; a_1, \dots)$ telle que $a_o \geq 0$ est transformée de α_2 par W_r. Si $a_o < 0$ alors $-\alpha$ est une racine du type précédent, et il existe $w \in W_r$, avec $-\alpha = w(\alpha_2)$, donc $\alpha = w(-\alpha_2) = ws_{\alpha_2}(\alpha_2)$.

<u>Remarques</u> : 1) Si $\alpha \in R_9$, alors $\omega_9 + \alpha \in R_9$. En effet, on a $\omega_9 \cdot \omega_9 = 0$. Il s'ensuit que R_9 est <u>infini</u>, donc aussi W_9.
Il en résulte de plus que toute racine α de R_9 peut s'écrire $\alpha = n\omega_9 + (a_o; a_1, \dots, a_9)$, où $\beta = (a_o; a_1, \dots, a_9) \in R_9$ et $a_o = -1, 0, 1$. Mais cela donne

$$\sum a_i = 3a_o \quad \text{et} \quad \sum a_i^2 = a_o^2 + 2 \quad ;$$

pour $a_o = 0$, on obtient $\beta = E_i - E_j$, $i \neq j$, $i, j > 0$;
pour $a_o = \pm 1$, $\alpha = \pm(E_o - E_i - E_k)$, i, j, k distincts > 0. D'où la liste de toutes les racines de R_9, et par restriction aux P_r, $r < 9$, celle des racines de R_r (voir table 2).

2) L'application $\xi \mapsto \xi + \omega_8$ est une bijection de I_8 sur R_8 ; on déduit donc de la liste des racines de R_8 obtenue ci-dessus celle des éléments de I_8, puis de I_r pour $r \leq 8$ (voir table 3).

Appelons <u>système exceptionnel</u> une suite $\xi_1, \dots, \xi_s$ d'éléments de I_r telle que $\xi_i \cdot \xi_j = 0$ pour $i \neq j$.

<u>Proposition 4</u> : <u>Pour</u> $2 \leq r \leq 9$, <u>le groupe</u> W_r <u>opère transitivement sur l'ensemble des systèmes exceptionnels de longueur</u> s <u>pour</u> $s \neq r-1$, <u>et il a deux orbites</u>

dans l'ensemble des systèmes exceptionnels de longueur $r-1$.

Raisonnons par récurrence sur r.
Pour $r=2$, on a $W_2 = \mathfrak{S}_2$, $I_2 = \{E_1, E_2, E_0 - E_1 - E_2\}$; les orbites de W_2 dans I_2 sont $\{E_1, E_2\}$ et $\{E_0 - E_1 - E_2\}$; il y a deux systèmes exceptionnels de longueur 2, (E_1, E_2) et $(E_2, E_1) = s_2(E_1, E_2)$. Supposons $r \geq 3$. Soit $(\xi_1, \ldots, \xi_s)$ un système exceptionnel de longueur s ; d'après le lemme 2, il existe $w \in W_2$ tel que $w(\xi_s) = E_r$. Alors $(w(\xi_1), \ldots, w(\xi_{s-1}))$ est un système exceptionnel de longueur $s-1$ dans l'orthogonal P_{r-1} de E_r. D'après l'hypothèse de récurrence, le fixateur de E_r, qui contient W_{r-1}, possède au plus une (resp. deux) orbites dans l'ensemble analogue pour P_{r-1} si $s \neq r-1$ (resp. $s = r-1$). Cela implique la proposition, à ceci près qu'il faut encore vérifier qu'il y a bien deux orbites distinctes pour $s = r-1$, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun élément de $w \in W_2$ tel que

$$w(E_1) = E_0 - E_1 - E_2 \quad , \quad w(E_3) = E_3, \ldots, w(E_r) = E_r \quad .$$

Or un tel w doit transformer E_2 en un vecteur exceptionnel orthogonal à $E_0 - E_1 - E_2, E_3, \ldots, E_r$, donc s'écrivant $aE_0 + bE_1 + cE_2$ avec $a+b+c=0$, $3a+b+c=0$, $a^2-b^2-c^2=-1$, ce qui donne $a=0$, $b+c=0$, $b^2+c^2=1$, et est impossible.

<u>Corollaire 1</u> : <u>Pour</u> $r \leq 9$ <u>et</u> $s \neq r-1$, <u>tout système exceptionnel de longueur</u> s <u>est contenu dans un système exceptionnel de longueur</u> r.

Les systèmes exceptionnels de longueur $r-1$ sont donc de deux types, ceux qui sont maximaux et ceux qui ne le sont pas.

<u>Corollaire 2</u> : <u>Si</u> ξ_1, ξ_2 <u>sont exceptionnels et orthogonaux</u>, <u>alors</u> $\xi_1 - \xi_2$ <u>est une racine</u>. <u>Inversement</u>, <u>si</u> $r \leq 9$, <u>toute racine s'écrit</u> $\xi_1 - \xi_2$ <u>où</u> $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ <u>est un système exceptionnel de longueur</u> r.

Cela résulte aussitôt de la proposition 3 et du lemme 3.

<u>Proposition 5</u> : <u>Supposons</u> $r \leq 9$.

a) <u>Si</u> $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ <u>et</u> $(\xi'_1, \ldots, \xi'_r)$ <u>sont deux systèmes exceptionnels de longueur</u> r, <u>il existe un élément</u> w <u>et un seul de</u> W_r <u>tel que</u> $w(\xi_i) = \xi'_i$, $i = 1, \ldots, r$.

b) <u>Pour toute permutation</u> σ <u>de</u> I_r <u>telle que</u> $\sigma(\xi) \cdot \sigma(\eta) = \xi \cdot \eta$ <u>pour tous</u> $\xi, \eta \in I_r$, <u>il existe un unique</u> $w \in W_r$ <u>tel que</u> $w|I_r = \sigma$.

a) Pour prouver a) et aussi <u>achever de démontrer le théorème 2</u>, il suffit de prouver que si u est un automorphisme de P_r respectant ω_r et ., et si $u(E_i) = E_i$ pour $i = 1,\ldots,r$, alors $u = \mathrm{Id}$. Mais c'est trivial, puisque $\omega_r = -3E_o + \sum_{1>0} E_i$, donc $u(E_o) = E_o$.

b) Soit σ une permutation de I_r respectant les produits d'intersection. Alors $\sigma(E_1),\ldots,\sigma(E_r)$ est un système exceptionnel de longueur r. Modifiant σ par un élément convenable de W_r, on peut supposer que $\sigma(E_i) = E_i$ pour $i = 1,\ldots,r$. Soit alors $\xi \in I_r$; on a $\sigma(\xi).E_i = \xi.E_i$, donc $\sigma(\xi) = \lambda E_o + \xi$ avec $\lambda \in \mathbb{Z}$. Mais $-1 = \sigma(\xi).\omega_r = -3\lambda + \xi.\omega_r = -3\lambda - 1$, donc $\lambda = 0$, $\sigma(\xi) = \xi$, et $\sigma = \mathrm{Id}$.

<u>Remarques</u> : 1) Pour $r \geq 3$, on a $\mathrm{Card}(W_r) = \mathrm{Card}(I_r).\mathrm{Card}(W_{r-1})$, d'où la table donnée.

2) Cherchons s'il existe un élément $\theta \in W_r$ tel que $\theta(\alpha) = -\alpha$ pour $\alpha \in R_r$. On doit alors avoir $\theta(X) = -X$ pour $X.\omega = 0$, donc $\theta(X) = (X.\omega)a - X$. Prenant $X = \omega$, on trouve $(\omega.\omega)a = Z\omega$. Cela est donc impossible pour $r = 9$. Pour $r < 9$, cela donne $a = \dfrac{2\omega}{\omega.\omega}$ et impose $\omega.\omega = 1$ ou 2, donc $r = 7$ ou 8.
Si $r = 7$, on a $\theta(X) = (X.\omega)\omega - X$, et en particulier $\theta(\xi) = -\omega - \xi$ pour $\xi \in I_r$. Pour $r = 8$, on a $\theta(X) = 2(X.\omega)\omega - X$, et en particulier $\theta(\xi) = -2\omega - \xi$ pour $\xi \in I_r$. Il est aisé de vérifier que ces deux éléments conviennent, puisqu'ils respectent le produit d'intersection (comme composé de $X \mapsto -X$ et d'une réflexion orthogonale). Contempler les colonnes 7 et 8 de la table 3.

⁂

Table 1

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lvert I_r\rvert$	0	1	3	6	10	16	27	56	240	∞
$\lvert R_r\rvert$	0	0	3	8	20	40	72	126	240	∞
$\lvert W_r\rvert$	1	1	2	$2^2.2$	$2^3.3.5$	$2^7.3.5$	$2^7.3^4.5$	$2^{10}.3^4.5.7$	$2^{14}.3^5.5^2.7$	∞
$\lvert W_r/\mathfrak{S}_r\rvert$	1	1	1	2	5	2^4	$2^3.3^2$	$2^6.3^2$	$2^7.3^3.5$	∞

Table 2 : Racines $(2 \le r \le 9)$

Dans cette table et la suivante, on dit qu'un élément de P_r est de type $(a_o;a_1^{n_1},a_2^{n_2},\dots)$ si ses composantes sont égales, la 0-ième à a_o, n_1 des autres à a_1, n_2 des autres à a_2 etc, c'est-à-dire s'il s'écrit sous la forme

$$a_oE_o - \sum_{j=1}^{n_1} a_1E_{i_j} - \sum_{j'=1}^{n_2} a_2E_{i_{j'}},\dots,$$ où tous les indices sont distincts.

Les racines de R_9 s'obtiennent à partir des racines des deux premiers types, en ajoutant les multiples de $-\omega = (3;1^9)$.

type \ r	2	3	4	5	6	7	8	9
$(0;1,-1)$	2	6	12	20	30	42	56	72
$\pm(1;1^3)$	/	2	8	20	40	70	112	168
$\pm(2;1^6)$	/	/	/	/	2	14	56	(168)
$\pm(3;2,1^7)$	/	/	/	/	/	/	16	(72)
total	2	8	20	40	72	126	240	∞

Table 3 : Eléments exceptionnels ($1 \leq r \leq 8$)

type \ r	1	2	3	4	5	6	7	8
$(0;-1)$	1	2	3	4	5	6	7	8
$(1;1^2)$	/	1	3	6	10	15	21	28
$(2;1^5)$	/	/	/	/	1	6	21	56
$(3;2,1^6)$	/	/	/	/	/	/	7	56
$(4;2^3,1^5)$	/	/	/	/	/	/	/	56
$(5;2^6,1^2)$	/	/	/	/	/	/	/	28
$(6;3,2^7)$	/	/	/	/	/	/	/	8
total	1	3	6	10	16	27	56	240
