SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

JEAN-PIERRE OLIVIER

Changement de base dans la clôture intégrale par morphismes absolument plats

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1969-1970), exp. n° 7, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1969-1970____A7_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
Année 1969-1970 , exposé n° 11

CHANGEMENT DE BASE DANS LA CLOTURE INTEGRALE PAR MORPHISMES ABSOLUMENT PLATS

par

Jean-Pierre OLIVIER

-:-:-:-:-:-

Nous désignons par ANN la catégorie des anneaux commutatifs si $f : A \to B$ est un morphisme de ANN , nous notons ∇_f (adlet indice f) la "codiagonale" $B \otimes_A B \to B$.

DEFINITION [5]. - Soit f un morphisme de ANN . Nous dirons que f est abosument plat si f et ∇_f sont plats.

La classe des morphismes absolument plats est stable par changement de base [4] .

PROPOSITION 1 : *Soit* $f : A \to B$ *un morphisme de ANN et soit* M *un B-module. Notons* $\otimes_A M$ *le foncteur de* Mod B *dans* Mod$(B\otimes_A B)$ *qui au B-module* N *fait correspondre le* $B\otimes_A B$ *module* $N\otimes_A M$ *(la structure étant définie par* $b\otimes c \cdot x\otimes y = bx\otimes yc$*). On a :* $\nabla_f^* \circ (\otimes_A M) = \otimes_B M$.

Démonstration :

Soient N et P deux B-modules et soit g une application Z-linéaire de $N\otimes_A M$ dans P. Alors g est ∇_f linéaire si et seulement si $g \circ i$ (où i est l'application A-bilinéaire canonique de $N \times M$ dans $N\otimes_A M$) est B-bilinéaire.

En effet, $g(b\otimes c \, , \, x\otimes y) = bc\, g(x\otimes y)$

équivaut à $g \circ i(bx, cy) = bc \; g \circ i(x, y)$.

COROLLAIRE 1. *Soit* $f : A \to B$ *un morphisme tel que* ∇_f *soit plat et soit* M *un B-module. Alors si* M *est plat sur* A *il est plat sur* B.

COROLLAIRE 2. *Soit* $f : A \to B$ *un morphisme absolument plat, alors pour tout* B-module M *on a* : $Wd_A(M) \geq Wd_B(M)$.

COROLLAIRE 3. *Soit* $f : A \to B$ *un morphisme absolument plat. Alors :*

i) *Si* A *est un anneau absolument plat* [1], B *est un anneau absolument plat,*

ii) *Si* A *est un anneau arithmétique* [2] *réduit,* B *est un anneau arithmétique réduit,*

iii) *Si* A *est semi-héréditaire,* B *est semi-héréditaire,*

iV) *Si* A *est cohérent,* B *est cohérent.*

Démonstration :

i) Un anneau A est absolument plat est par définition un anneau tel que $Wd\,A = 0$.

ii) Un anneau A est arithmétique réduit si et seulement si $Wd\,A \leq 1$.

iii) Un anneau **A** est semi-héréditaire si et seulement si $Wd\,A \leq 1$ et son anneau total des fractions est absolument plat ([3] et [7]).

iV) Un anneau cohérent est un anneau tel que tout produit de plats est plat.

Rappelons ([7]) qu'un anneau semi-héréditaire est intégralement clos dans son anneau total des fractions.

PROPOSITION 2. - Soit $f : A \to B$ un morphisme de ANN. Alors A est intégralement fermé dans B si et seulement si il existe un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, dotted] & V \arrow[d] \\ B \arrow[r] & K \end{tikzcd}$$

où V est semi-héréditaire et K est l'anneau total des fractions de V.

Démonstration : On utilise la terminologie de [2]. En utilisant [2] et [8] on remarque que "A est un sous-anneau paravaluatif de B si et seulement si il existe un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ B \arrow[r] & K \end{tikzcd}$$

où V est un sous-anneau de valuation de K". D'autre part, si A est intégralement fermé dans B , A est l'intersection des sous-anneaux paravaluatifs de B contenant A (cf. [2] et [8]). Soit alors A un sous-anneau de B intégralement fermé dans B et $\underline{C}$ l'ensemble des sous-anneaux paravaluatifs de B contenant A. Pour tout $C \in \underline{C}$,

choisissons un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] & V_c \arrow[d] \\ B \arrow[r] & K_c \end{tikzcd}$$

où V_c est un anneau de valuation de corps des fractions K_c. Le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & \pi V_c \arrow[d] \\ B \arrow[r] & \pi K_c \end{tikzcd}$$

est cartésien, $V = \pi V_c$ est semi-héréditaire d'anneau total des fractions πK_c.

La proposition que nous avons en vue est une simple application des résultats précédents.

PROPOSITION 3. - Soit $f : A \to B$ un morphisme absolument plat, et soit $g : A \to \mathbb{C}$ un morphisme de ANN. Si A' est la fermeture intégrale de A dans C, $A' \otimes_A B$ est la fermeture intégrale de B dans $C \otimes_A B$.

Démonstration : Puisque la classe des morphismes absolument plats est stable par changement de base, il suffit de démontrer que si A est intégralement fermé dans C alors B est intégralement fermé dans $C \otimes_A B$. On utilise alors la proposition précédente, le corollaire 3 de la proposition 1 et le fait qu'un morphisme plat conserve les carrés cartésiens.

Cette proposition généralise E.G.A.IV 18-12-15.

COROLLAIRE. Soit $f : A \to B$ un morphisme absolument plat. Si A est intègre intégralement clos et si B est connexe alors B est intègre intégralement clos.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI - Algèbre commutative ; chap. 1 : modules plats ; ex. 17, §. 2 .

[2] N. BOURBAKI - Algèbre commutative ; chap. 6 : valuations ; ex.8 , §. 1.

[3] S. ENDO - On semi-hereditary rings ; J. Math. Soc. Japan, 13, n°2, 1961.

[4] D. FERRAND - Epimorphismes d'anneaux et algèbres séparables. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 265 (9 Octobre 1967) p. 411-414.

[5] D. FERRAND - Thèse (en préparation) + communications orales.

[6] A. GROTHENDIECK - Eléments de géométrie algébrique (E. G. A.).

[7] J. MAROT - Extensions de la notion d'anneau de valuation. Département de Mathématiques - Faculté des Sciences de Brest - 29 - Brest.

[8] P. SAMUEL - La notion de place dans un anneau. Bull. Soc. Math. France, 85, 1957, p. 123 à 133.

[9] Chr. U. JENSEN - A remark on arithmetical rings. Proceed. Amer. Math. Soc., vol. 15, n°6, december 1964, p. 951-954.

-:-:-:-:-:-:-