

MICHEL MENDÈS FRANCE

Les suites à spectre vide et la répartition modulo 1

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1970-1971), exp. n° 11, p. 1-19

http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971___A11_0

© Université Bordeaux 1, 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Bordeaux implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES SUITES A SPECTRE VIDE
ET LA REPARTITION MODULO 1

par

Michel MENDES FRANCE

-:-:-:-:-

"The Ghost vanishes"

(Macbeth - Shakespeare)

Cet article se compose de trois sections. Dans la première partie, on s'intéresse aux suites $(\lambda_n + n\alpha)$ qui sont équiréparties (mod. 1) pour tout α réel. Dans la deuxième partie, on étudie les suites g -additives introduites par Gel'fond [3]. En combinant les résultats des deux parties, on montre par exemple que la suite $(x s([\alpha n]))$ est équirépartie (mod. 1) (x irrationnel, $\alpha > 0$ réel, $s(n)$ est la somme des chiffres de l'entier n écrit en base g , $[.]$ représente la partie entière). Enfin, dans la dernière partie, on donne des résultats complémentaires sur la répartition (mod. 1) liés à la suite $(s(n))$.

I. - SPECTRE D'UNE SUITE

§. 1 - Suites à caractère presque périodique

Soit $\mathbf{M} = (m_n)$ une suite non décroissante d'entiers positifs. Soit $\chi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction définie par :

$$\chi(k) = \text{card} \{n \in \mathbb{N} \mid m_n = k\} .$$

Si la suite \mathbf{M} est strictement croissante, χ est la fonction caractéristique de \mathbf{M} . Dans le cas général, on dit que χ est la fonction caractéristique généralisée de \mathbf{M} .

Par définition, la suite \mathbf{M} est dite à caractère pseudo-périodique (c p p) si la fonction caractéristique généralisée est presque périodique non nulle (au sens de Bésicovitch). On rappelle qu'une fonction presque-périodique est un élément de l'adhérence de l'ensemble des polynômes trigonométriques, la topologie étant ici définie par la semi-norme :

$$\| \cdot \| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} | \cdot (k) |^2 \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

laquelle est une norme dans un espace quotient convenable (espace \mathfrak{M}^2 de Bésicovitch-Marcinkiewicz).

Les propriétés dont nous aurons à nous servir par la suite sont les suivantes :

1. - Si χ est une fonction presque-périodique, alors $\alpha \in \mathbb{R}$, la limite :

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi(k) \exp 2i\pi\alpha k = c(\alpha)$$

existe et si de plus χ est une fonction caractéristique généralisée non nulle, on a $c(0) > 0$.

2. - L'ensemble des combinaisons linéaires finies de fonctions caractéristiques généralisées presque-périodiques est dense dans l'ensemble des fonctions presque-périodiques.

3. - L'ensemble des fonctions presque-périodiques est fermé dans l'espace \mathfrak{M}^2 de Bésicovitch-Marcinkiewicz.

Donnons des exemples de suites à c p p.

Exemple 1 : Soit $\alpha > 0$ un nombre réel. La suite $([\alpha n])$ est à c p p (en particulier, si α est rationnel, la suite est une réunion finie de progressions arithmétiques). Pour voir cela, il suffit de constater que :

$$\chi(k) = -\left[\left\{ -\frac{k}{\alpha} \right\} - \frac{1}{\alpha} \right],$$

expression dans laquelle $\{ \cdot \}$ désigne la "partie fractionnaire".

Exemple 2 : Soit E une partie finie ou infinie de \mathbb{N} telle que :

$$\sum_{n \in E} \frac{1}{n} < \infty.$$

Soit $\mathbb{M}(E)$ la suite des entiers k qui ne sont divisibles par aucun élément de E . Alors $\mathbb{M}(E)$ est à c p p (en particulier, ceci s'applique au cas où E est l'ensemble des carrés, auquel cas $\mathbb{M}(E)$ est la suite des entiers "quadratifrei"). Montrons en effet que $\mathbb{M}(E)$ est à c p p. Soit A un entier, soit $E(A) = E \cap [0, A]$ et soit respectivement χ et χ_A les fonctions caractéristiques de $\mathbb{M}(E)$ et $\mathbb{M}(E(A))$. χ_A est périodique.

Montrons alors que $\|\chi - \chi_A\|$ tend vers 0 avec $\frac{1}{A}$, ce qui, en vertu de la propriété 3 précédente établit que χ est presque-périodique. On a :

$$\begin{aligned} \|\chi - \chi_A\|^2 &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\chi(k) - \chi_A(k)|^2 \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{k \leq n \\ k \notin \mathbb{M}(E) \\ k \in \mathbb{M}(E(A))}} \quad \parallel \end{aligned}$$

$$\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{u \in E \\ u > A}} \frac{n}{u}$$

$$\leq \sum_{\substack{u \in E \\ u \geq A}} \frac{1}{u}$$

Cette quantité tend vers 0 quand A croît indéfiniment C Q F D.

Ce dernier exemple m'a été communiqué par BESINEAU.

§. 2 - Spectre d'une suite.

Soit $\Lambda = (\lambda_n)$ une suite infinie de nombres réels. On appelle spectre de Λ ($\text{sp}(\Lambda)$) l'ensemble des nombres réels α tels que la suite $\Lambda + \alpha\mathbb{N} = (\lambda_n + n\alpha)$ ne soit pas équirépartie (mod. 1). L'ensemble $\text{sp}(\Lambda)$ est donc périodique, de période 1. Son complémentaire est l'ensemble des nombres réels β tels que pour tout entier $q \neq 0$, on ait :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2 i \pi q (\lambda_k + k\beta) = 0.$$

En désignant par $c_n(\beta)$ l'expression sous le signe lim, on voit facilement que

$$\int_0^1 |c_n(\beta)|^2 d\beta$$

tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$, suffisamment rapidement pour pouvoir affirmer que $c_n(\beta)$ tend vers 0 presque partout.

Il s'ensuit que $\text{sp}(\Lambda)$ est de mesure nulle. Un cas particulièrement intéressant est celui où $\text{sp}(\Lambda)$ est vide. On a en effet le théorème suivant :

THEOREME 1 : Soit $\Lambda = (\lambda_n)$ une suite infinie de nombres réels. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) le spectre de Λ est vide,

- (ii) Pour toute suite d'entiers non décroissante $M = (m_n)$ à c p p , la suite $\Lambda_M = (\lambda_{m_n})$ est équirépartie (mod. 1).

En effet, montrons que la condition (i) implique la condition (ii). Soit Λ une suite à spectre vide et soit $M = (m_n)$ une suite à c p p . On considère la somme de Weyl :

$$\sigma_n = \sigma_n(\ell) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp 2i\pi \ell \lambda_{m_k}, \quad (\ell \in \mathbb{Z}^*)$$

relative à la suite Λ_M .

On a successivement :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m_n} \chi(k) \exp 2i\pi \ell \lambda_k \\ &= \frac{m_n}{n} \frac{1}{m_n} \sum_{k=1}^{m_n} \chi(k) \exp 2i\pi \ell \lambda_k \end{aligned}$$

où χ est la fonction caractéristique généralisée associée à M . Soit θ un polynôme trigonométrique. On a :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{m_n}{n} \frac{1}{m_n} \sum_{k=1}^{m_n} \theta(k) \exp 2i\pi \ell \lambda_k \\ &+ \frac{m_n}{n} \frac{1}{m_n} \sum_{k=1}^{m_n} (\chi(k) - \theta(k)) \exp 2i\pi \ell \lambda_k. \end{aligned}$$

Comme M est à c p p , $\frac{m_n}{n}$ tend vers une limite finie A quand n croît indéfiniment (propriété 1 du §.1). Comme $\text{sp}(\Lambda) = \emptyset$, le premier terme du second membre de la formule tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$. L'inégalité de Schwarz appliquée au second terme montre alors que :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \leq A \|\chi - \theta\|.$$

La quantité $\|\chi - \theta\|$ pouvant être rendue arbitrairement petite, on en conclut que σ_n tend vers 0.

Pour démontrer que la condition (ii) implique la condition (i), on effectue un raisonnement tout-à-fait analogue en approchant la fonction : $\varphi_\alpha(n) = \exp 2i\pi \alpha n$ par une combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques généralisées presque-périodiques. C Q F D

Il est facile de construire des suites Λ à spectre vide. Par exemple, si :

$$f(X) = a_\nu X^\nu + a_{\nu-1} X^{\nu-1} + \dots + a_1 X + a_0 \quad (\nu \geq 2)$$

est un polynôme réel dont l'un des coefficients au moins a_2, a_3, \dots, a_ν est irrationnel, alors la suite $(f(n))$ vérifie la propriété. On en déduit par exemple que la suite $(\sqrt{2} [\alpha n]^2)$ est équirépartie (mod. 1) pour tout $\alpha > 0$. On verra d'ailleurs, dans la suite de l'article d'autres exemples.

Ajoutons, pour conclure cette partie que presque toutes les suites $\Lambda \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ ont un spectre vide (le tore est supposé muni de la mesure de Haar). En effet, si :

$$n \xrightarrow{\varphi_\Lambda} \exp 2i\pi \ell \lambda_n \quad (\ell \in \mathbb{Z}^*)$$

est une fonction pseudo-aléatoire, alors il en est de même de la fonction :

$$n \xrightarrow{\quad} \exp 2i\pi \ell (\lambda_n + \alpha n) \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Or, une fonction pseudo-aléatoire est de moyenne nulle, donc $\text{sp}(\Lambda) = \emptyset$.

Cette remarque, associée au fait que presque toutes les suites Λ sont telles que φ_Λ est pseudo-aléatoire (voir [5]) prouve l'assertion.

II. - FONCTIONS g-ADDITIVES

§. 1 - Définition et caractérisation.

Lors de sa visite à Paris en Octobre 1966, GEL'FOND a défini la notion de fonction g-additive [3]. Soit $g \geq 2$ un entier fixé. Une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est g-additive si f vérifie l'égalité :

$$f(kg^a + b) = f(kg^a) + f(b) \quad (1)$$

pour tous entiers, a, k, b tels que $a \geq 0$, $k \geq 0$, $0 \leq b \leq g^a - 1$. Ainsi, par exemple, la fonction $f(n) = n$ est g-additive (il est amusant de constater que si une fonction est à la fois g-additive et h-additive où $\frac{\text{Log } g}{\text{Log } h}$ est irrationnel, alors f est nécessairement linéaire : $f(n) = an$). Un autre exemple de fonction g-additive est la fonction s qui à l'entier n fait correspondre la somme des chiffres de n écrit en base g. Cette fonction sera d'ailleurs étudiée plus particulièrement dans la troisième partie.

Nous adopterons les notations suivantes. Soit n un entier non négatif. On écrit n en base g :

$$n = \sum_{p=0}^{\infty} e_p(n) g^p$$

Les nombres $e_p(n)$ sont des entiers $0 \leq e_p(n) \leq g-1$ tous nuls pour

$p \geq \left[\frac{\text{Log } n}{\text{Log } g} \right] + 1$. On considérera e_p comme une application de \mathbb{N} sur

$G = \{0, 1, \dots, g-1\}$. Soient $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p, \dots$ des applications réelles

$G \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout indice p, on ait $\varphi_p(0) = 0$. Il est clair que :

$$f_{\varphi} = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p \circ e_p$$

est alors une fonction g-additive. On a en fait le théorème suivant :

THEOREME 2 : Une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est g-additive si et seulement si
il existe une suite infinie de fonctions réelles $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ définies sur
 $G = \{0, 1, \dots, g-1\}$, nulles en 0 et vérifiant :

$$f = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p \circ e_p .$$

Preuve : A cause de ce qui a été dit précédemment, il suffit de montrer que
si f est g-additif, alors il existe des fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ définies sur G ,
nulles en 0 et telles que $f = \sum \varphi_p \circ e_p$.

La fonction f étant g-additive, on voit en effet que :

$$f\left(\sum_{p=0}^{\infty} e_p(n) g^p\right) = \sum_{p=0}^{\infty} f(e_p(n) g^p).$$

On pose, pour $p \in \mathbb{N}$ et $a \in G$,

$$\varphi_p(a) = f(a g^p).$$

Il est alors immédiat de vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f(n) = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p(e_p(n)) \quad \text{C Q F D.}$$

§.2 - Propriétés de moyennes.

La technique que nous adoptons ici pour calculer la moyenne
d'une fonction $n \mapsto \exp 2i\pi f(n)$ est assez voisine de la technique de GEL'FOND
dans [3] ; toutefois nous pensons utile d'exposer en détail notre méthode qui
semble d'ailleurs fournir des résultats un peu plus généraux.

THEOREME 3 : Soit f une fonction g-additive réelle :

$$f = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p \circ e_p .$$

On a alors l'égalité :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi f(k) \right| = \pi \frac{1}{g} \left| \sum_{a=0}^{g-1} \exp 2i\pi \varphi_p(a) \right|.$$

Démontrons le théorème. A étant un ensemble arbitraire, on définit l'opérateur de translation $\tau : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}$ par :

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \xrightarrow{\tau} (a_1, a_2, a_3, \dots).$$

On note par τ^ν la translation d'ordre ν ($\tau^\nu = \tau \circ \tau^{\nu-1}$).

Ceci étant, soit :

$$f = f_\varphi = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p \circ e_p.$$

une fonction g -additive. On vérifie immédiatement que pour tout $a \in G = \{0, 1, \dots, g-1\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_\varphi(gn + a) = \varphi_0(a) + f_{\tau\varphi}(n) \quad (2).$$

Posons

$$\sigma_\varphi(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi f_\varphi(k).$$

On a successivement et compte tenu de (2) :

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi(gn) &= \sum_{k=0}^{gn-1} \exp 2i\pi f_\varphi(k) \\ &= \sum_{a=0}^{g-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} \exp 2i\pi f_\varphi(g\ell + a) \\ &= \sum_{a=0}^{g-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} \exp 2i\pi (f_{\tau\varphi}(\ell) + \varphi_0(a)). \end{aligned}$$

Divisons les deux membres de l'égalité par gn et prenons la limite supérieure quand n croît indéfiniment. En posant :

$$\mathfrak{M}(f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi f(k) \right| ,$$

on obtient :

$$\mathfrak{M}(f_\varphi) = \frac{1}{g} \left| \sum_{a=0}^{g-1} \exp 2i\pi \varphi_0(a) \right| \mathfrak{M}(f_{\tau\varphi}) .$$

En itérant cette égalité, il vient :

$$\mathfrak{M}(f_\varphi) = \left(\prod_{p=0}^{v-1} \frac{1}{g} \left| \sum_{a=0}^{g-1} \exp 2i\pi \varphi_p(a) \right| \right) \mathfrak{M}(f_{\tau^v \varphi}) . \quad (3)$$

Enfin, une moyenne d'exponentielle réelle étant majorée par 1, on obtient :

$$\mathfrak{M}(f_\varphi) \leq \prod_{p=0}^{\infty} \frac{1}{g} \left| \sum_{a=0}^{g-1} \exp 2i\pi \varphi_p(a) \right| . \quad (4)$$

Montrons à présent l'inégalité en sens inverse. On vérifie directement la relation suivante :

$$\frac{1}{g^n} \sum_{k=0}^{g^n-1} \exp 2i\pi f_\varphi(k) = \prod_{p=0}^{n-1} \left(\frac{1}{g} \sum_{a=0}^{g-1} \exp 2i\pi \varphi_p(a) \right) .$$

d'où il suit :

$$\mathfrak{M}(f_\varphi) \geq \prod_{p=0}^{\infty} \frac{1}{g} \left| \sum_{a=0}^{g-1} \exp 2i\pi \varphi_p(a) \right| . \quad \text{CQFD.}$$

§. 3 - Application à la répartition (mod. 1)

Le théorème 3 permet de démontrer le résultat suivant :

THEOREME 4 : Soit $\varphi : \{0, 1, \dots, g-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ une application dont une valeur au moins est irrationnelle et telle que $\varphi(0) = 0$. Soit f_φ la suite dont le n^e terme est :

$$f_{\varphi}(n) = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi(e_p(n)).$$

Alors le spectre de f_{φ} est vide. En particulier, la suite f_{φ} est équirépartie (mod. 1).

Preuve: Soit $\ell \neq 0$ un entier et soit :

$$c(\alpha) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi \ell (f_{\varphi}(k) + \alpha k) \right|.$$

Le théorème découle du fait que $c(\alpha) = 0$ pour tout α . C'est cette égalité que nous allons nous efforcer de montrer. D'après le théorème 3, on a :

$$c(\alpha) = \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{g} \left| \sum_{a=0}^{g-1} \exp 2i\pi \ell (\varphi(a) + \alpha a g^p) \right|$$

Supposons, par l'absurde, que le produit infini converge pour un $\alpha \in \mathbb{R}$ au moins. Alors pour tout $a \in G = \{0, 1, \dots, g-1\}$, on a :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (\ell \varphi(a) + \ell \alpha a g^p) = 0 \quad (\text{mod. } 1),$$

soit encore :

$$\ell \alpha a g^p \rightarrow -\ell \varphi(a) \quad (\text{mod. } 1).$$

Or, si x est un nombre réel, la suite $(x g^p)$ ne peut tendre vers une limite L que si $L = 0$.

Mais par hypothèse, il existe au moins une valeur de $a \in G$ pour laquelle $\varphi(a) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Cette contradiction prouve le théorème. C Q F D.

Exemple d'application: Soit d un entier non négatif (resp. un réel positif non entier). Soit $s^d(n)$ la somme des puissances d^e des chiffres du nombre n (avec la convention $0^d = 0$ pour tout $d \geq 0$) :

$$s^d = \sum_{p=0}^{\infty} (e_p)^d.$$

Soit enfin $M = (m_n)$ une suite d'entiers non décroissante à c.p.p. Alors, d'après les théorèmes 1 et 4, la suite $(x s^d(m_n))$ est équirépartie (mod. 1) si et seulement si x est irrationnel (resp. non nul pour $g \geq 3$. Pour $g = 2$, $s^d = s$ et on retombe dans le premier cas).

Ce résultat contient en particulier ($d = 1$) des énoncés de Bésineau [2] et Gel'fond [3].

III - COMPLEMENTS SUR LA SOMME DES CHIFFRES.

§. 1 - Les corrélations multiples.

Soit φ une application définie sur l'ensemble \mathbb{N} des entiers non négatifs, à valeurs dans \mathbb{C} . Soient $p = (p_0, p_1, \dots, p_{\nu-1}) \in \mathbb{N}^{\nu}$ et $q = (q_0, q_1, \dots, q_{\mu-1}) \in \mathbb{N}^{\mu}$ deux suites d'entiers non négatifs ($\nu \geq 1$ et $\mu \geq 1$ sont des entiers donnés). On appelle corrélation multiple de φ la quantité

$$\gamma_{\varphi}(p; q) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \begin{array}{c} n-1 \\ \sum_{k=0} \end{array} \right| \begin{array}{c} \nu-1 \\ \pi \end{array} \left| \begin{array}{c} \varphi(k+p_j) \\ \pi \end{array} \right| \begin{array}{c} \mu-1 \\ \sum_{j=0} \end{array} \left| \begin{array}{c} \varphi(k+q_j) \end{array} \right| .$$

Dans cette section, nous nous intéressons plus particulièrement aux corrélations multiples de la fonction :

$$n \mapsto \exp 2i\pi a s(n) \quad (a \in \mathbb{R})$$

où $s(n) = \sum_{p=0}^{\infty} e_p(n)$ représente la somme des chiffres de n écrit en base g .

A vrai dire, nous allons étudier une expression qui généralise la corrélation

multiple. Soit $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\nu-1}) \in \mathbb{R}^\nu$. On pose :

$$t_\alpha(n, p) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_j s(n+p_j).$$

Soit par ailleurs f une application $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ et désignons par A une partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On définit les deux quantités :

$$\delta(p, f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi (t_\alpha(k, p) + f(k)) \right|$$

et :

$$\delta(p, A) = \sup_{f \in A} \delta(p, f).$$

Soit à nouveau $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On note pour $f_{g,j}$ l'application $f_{g,j}(k) = f(gk + j)$, ($g \geq 2$ représente toujours un entier fixé une fois pour toute). On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est adaptée si $f \in A \Rightarrow f_{g,j} \in A$ pour $j = 0, 1, \dots, g-1$. Par exemple, $A = \{0\}$, $A = \mathbb{R}[X]$, $A = \mathbb{Q}[X]$, ... sont des ensembles adaptés.

Nous montrons, dans cette partie le théorème suivant :

THEOREME 5 : Soit $A \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ un ensemble adapté. Soit 0_ν l'origine dans \mathbb{R}^ν . On a alors l'implication suivante :

$$\delta(0_\nu, A) = 0 \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N}^\nu, \delta(p, A) = 0.$$

On en déduira les conséquences suivantes :

Corollaire 1 : Supposons que $a = \sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_j$ soit irrationnel. Alors la suite

$\Lambda = (\lambda_n)$ où :

$$\lambda_n = \sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_j s(n + p_j)$$

est à spectre vide. En particulier, la suite est équirépartie (mod. 1).

Corollaire 2 : Soit f un polynôme à coefficients rationnels. Alors la suite $x(f(n) + s(n))$ est équirépartie (mod. 1) si et seulement si x est irrationnel.

§. 2 - Démonstration du théorème 5

Afin d'alléger l'écriture, on supposera $g = 2$. Soit :

$\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{\nu-1}) \in \{0, 1\}^{\nu}$ et soit $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{\nu-1}) \in \mathbb{R}^{\nu}$. On pose :

$$a = \sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_j,$$

$$u = \sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_j \varepsilon_j,$$

$$v = \sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_j (1 - \varepsilon_j).$$

$p = (p_0, \dots, p_{\nu-1})$ étant une suite d'entiers non négatifs, on considère l'expression :

$$t_{\alpha}(k, 2p + \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_j s(k + 2p_j + \varepsilon_j).$$

Les deux formules élémentaires

$$\begin{cases} s(2n) = s(n) \\ s(2n+1) = 1 + s(n) \end{cases}$$

conduisent aux formules

$$\begin{cases} t_{\alpha}(2k, 2p + \varepsilon) = u + t_{\alpha}(k, p) \\ t_{\alpha}(2k+1, 2p + \varepsilon) = v + t_{\alpha}(k, p + \varepsilon). \end{cases}$$

Posons :

$$\sigma(n, p, f) = \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi(t_{\alpha}(k, p) + f(k))$$

où f est une application $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ qui appartient à un ensemble adapté A , c'est-à-dire telle que les deux fonctions :

$$\begin{array}{l} f_0 \\ k \mapsto f(2k) \\ f_1 \\ k \mapsto f(2k+1) \end{array}$$

soient dans A . Les relations de récurrences précédentes permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \sigma(2n, 2p+\varepsilon, f) &= \sum_{k=0}^{2n-1} \exp 2i\pi(t_{\alpha}(k, 2p+\varepsilon) + f(k)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi(t_{\alpha}(2k, 2p+\varepsilon) + f(2k)) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi(t_{\alpha}(2k+1, 2p+\varepsilon) + f(2k+1)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi(t_{\alpha}(k, p) + f_0(k) + u) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi(t_{\alpha}(k, p+\varepsilon) + f_1(k) + v). \end{aligned}$$

On divise les deux membres de l'égalité par $2n$ et on en prend la limite supérieure quand n croît indéfiniment. On obtient ainsi :

$$\delta(2p+\varepsilon, f) \leq \frac{1}{2} \delta(p, f_0) + \frac{1}{2} \delta(p+\varepsilon, f_1).$$

Enfin, compte tenu du fait que f , f_0 et f_1 sont des éléments de A , on aboutit à l'inégalité fondamentale :

$$\delta(2p+\varepsilon, A) \leq \frac{1}{2} \delta(p, A) + \frac{1}{2} \delta(p+\varepsilon, A), \quad (5)$$

laquelle va nous permettre de démontrer le théorème.

En effet, supposons, par hypothèse que l'on ait $\delta(0_{\nu}, A) = 0$.

Dans l'inégalité (5), on choisit $p = 0$, d'où :

$$\delta(\varepsilon, A) \leq \frac{1}{2} \delta(\varepsilon, A).$$

On en déduit aussitôt la nullité de $\delta(\varepsilon, A)$ pour tout $\varepsilon \in \{0, 1\}^{\nu}$.

Soient alors ε et ε' deux éléments orthogonaux de $\{0, 1\}^{\nu}$,
 ($\sum_{j=0}^{\nu-1} \varepsilon_j \varepsilon'_j = 0$). Dans l'inégalité (5), on choisit $p = \varepsilon'$. Il vient :

$$\delta(2\varepsilon' + \varepsilon, A) \leq \frac{1}{2} \delta(\varepsilon', A) + \frac{1}{2} \delta(\varepsilon + \varepsilon', A).$$

Or, de par le lien qui existe entre ε et ε' , le point $\varepsilon + \varepsilon'$ appartient à $\{0, 1\}^{\nu}$. Donc le second membre de l'inégalité précédente est nul. Par ailleurs, $2\varepsilon' + \varepsilon$ engendre $\{p \in \mathbb{N}^{\nu} \mid \|p\| \leq 2\}$. Ici, comme dans ce qui suit, $\|\cdot\|$ représente la norme \mathcal{L}^{∞} dans \mathbb{R}^{ν} .

Un raisonnement par récurrence va maintenant achever la démonstration du théorème. Soit $\rho \geq 0$ un entier et soit :

$$B(\rho) = \{p \in \mathbb{N}^{\nu} \mid \|p\| \leq \rho\}.$$

Supposons par hypothèse que l'on ait pour un certain $\rho \geq 2$ l'implication :

$$p \in B(\rho) \Rightarrow \delta(p, A) = 0.$$

Soit alors $q \in B(\rho - 1)$. L'inégalité (5) s'écrit :

$$\delta(2q + \varepsilon, A) \leq \frac{1}{2} \delta(q, A) + \frac{1}{2} \delta(q + \varepsilon, A).$$

Les deux termes du second membre de l'inégalité sont nuls car

$q \in B(\rho - 1) \subset B(\rho)$ et $q + \varepsilon \in B(\rho)$. Par ailleurs, lorsque q parcourt $B(\rho - 1)$

et lorsque ε parcourt $\{0, 1\}^{\nu} = B(1)$, le point $2q + \varepsilon$ parcourt

$B(2\rho - 1) \supset B(\rho + 1)$. L'hypothèse de récurrence se trouve donc vérifiée à

l'ordre $\rho + 1$. C Q F D.

§. 3 - Démonstration du corollaire 1

On applique le théorème 3 au cas où A est l'ensemble des polynômes du premier degré. On voit alors que le spectre de la suite $\Lambda = (\lambda_n)$

$$\lambda_n = \sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_j s(n + p_j)$$

est vide sitôt que le spectre de la suite $\Lambda' = (\lambda'_n)$

$$\lambda'_n = \left(\sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_j \right) s(n)$$

est vide. Or, le théorème 4 indique que Λ' est de spectre vide lorsque

$a = \sum_{j=0}^{\nu-1} \alpha_j$ est irrationnel. Cela achève la preuve du corollaire.

§. 4 - Démonstration du corollaire 2

Soit $f \in \mathbb{Q}[X]$. Il est alors clair que la suite $x(f(n) + s(n))$ n'est pas équirépartie (mod. 1) pour x rationnel.

Supposons maintenant que x soit irrationnel. Si le degré de f est 1, le corollaire 1 montre que $x(f(n) + s(n))$ est équirépartie (mod. 1).

Si le degré ν du polynôme f est strictement supérieur à 1, on fait appel au raisonnement suivant. Soit $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. On considère la suite (μ_n)

$$\mu_n = x(f(n+k) - f(n) + s(n+k) - s(n)).$$

On applique alors le théorème 5 au cas où A est l'ensemble des polynômes de degré $\nu-1$ dont le coefficient du terme de degré $\nu-1$ est irrationnel.

La suite (μ_n) est équirépartie (mod. 1) sitôt que l'est la suite (μ'_n)

$$\mu'_n = x(f(n+k) - f(n)).$$

Or, il est bien connu qu'une telle suite est équirépartie (mod. 1). On en

conclut que pour tout entier $k \neq 0$, la suite (μ_n^k) est équirépartie (mod. 1).
Le théorème de Van der Corput montre alors que $x(f(n) + s(n))$ est équirépartie (mod. 1). C Q F D.

§. 5 - Remarques finales.

On pourrait multiplier les exemples de suites équiréparties (mod. 1) en appliquant le théorème 5. Tous ces exemples sont des conséquences du principe suivant : si pour $j = 0, 1, \dots, g-1$ les suites $\Lambda^j = (\lambda_n^j)$

$$\lambda_n^j = \mu_{gn+j} + \left(\sum_{k=0}^{v-1} \alpha_k \right) s(n)$$

sont équiréparties (mod. 1), alors la suite $\Lambda = (\lambda_n)$

$$\lambda_n = \mu_n + \sum_{k=0}^{v-1} \alpha_k s(n + p_k)$$

est équirépartie (mod. 1).

En particulier, soient g_1, g_2, \dots, g_t des entiers strictement supérieurs à 1 et soit $s_i(n)$ la somme des chiffres de n écrit en base g_i . Soit f un polynôme réel dont un coefficient d'un terme de degré $\delta \geq 2$ est irrationnel. Alors, on peut montrer que la suite

$$\lambda_n = f(n) + \sum_{k=1}^t \alpha_k s_k(n + p_k)$$

est équirépartie (mod. 1), et ceci pour tout $p \in \mathbb{N}^t$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}^t$.

La limitation sur δ est sans doute trop restrictive ($\delta \geq 1$ devrait suffire). Pour $\delta = 0$, il faut évidemment apporter une restriction sur α pour obtenir l'équirépartition (mod. 1). Dans cette direction, il faut citer le résultat suivant de BESINEAU : si $(g_1, g_2) = 1$ et si l'un au moins des nombres α_1 et α_2 est irrationnel, alors la suite $(\alpha_1 s_1(n) + \alpha_2 s_2(n))$ est équirépartie (mod. 1).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERTRANDIAS J. P. - Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p . Bulletin de la Soc. Math. de France, Mémoire 5, 1966, p. 1-106.
- [2] BESINEAU J. - Sur un problème de Gel'fond relatif à la fonction somme des chiffres. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (à paraître).
- [3] GEL'FOND A. O. - Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données. Acta Arithmetica, 13, 1968, p. 259-265.
- [4] KAHANE J. P. - Sur les fonctions presque-périodiques généralisées dont le spectre est vide. Studia Mathematica, 21, 1962, p. 231-236.
- [5] MENDES FRANCE M. - Nombres normaux. Application aux fonctions pseudo-aléatoires. Journal d'Analyse Mathématique, 20, 1967, p. 1-56.
- [6] MENDES FRANCE M. - La réunion des ensembles normaux. Journal of Number Theory, 2, 1970, p. 345-351.

-:-:-:-:-