Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux

Alain Escassut

Les algèbres de Krasner-Tate

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1970-1971), exp. n° 13, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971____A13_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
Année 1970-1971 - exposé n° 15

LES ALGEBRES DE KRASNER - TATE

par

Alain ESCASSUT

-:-:-:-

Le but de cette étude est de préciser le rapport existant entre la théorie des algèbres de Tate [22] et la théorie des algèbres de Krasner [14]. En considérant un corps K valué non archimédien, complet, algébriquement clos, nous montrerons que tout isomorphisme algébrique entre une algèbre de Krasner $H(D)$ et une algèbre topologiquement de type fini A sur K est bicontinu. Nous verrons par exemple que si A est isomorphe à $H(D)$, alors A est de la forme $K\{t\}[x]$ où x est entier sur $K\{t\}$, et que D est égal à une réunion finie d'infraconnexes fermés bornés disjoints dont les trous sont en nombre fini.

Nous caractériserons ensuite les algèbres de Krasner-Tate sous forme de quotient d'une extension topologiquement pure de degré 2 [22]. Par exemple, si D est ouvert, $H(D)$ est isomorphe à une algèbre de la forme $\frac{K\{T, X\}}{P(X) - T\,Q(X)}$ où P et $Q \in K[X]$.

Nous caractériserons enfin les algèbres de Krasner-Tate parmi les K-algèbres de Banach en fonction de leurs propriétés algébriques et topologiques.

§. I. - RAPPELS ET RESULTATS ELEMENTAIRES

1) Rappels sur la théorie de Tate [22]

Soit un corps K valué non archimédien complet. Soit $A = \dfrac{K\{X_1, \dots, X_n\}}{I}$ une algèbre topologiquement de type fini où $K\{X_1, \dots, X_n\}$ est une extension topologiquement pure de K et I un idéal de $K\{X_1, \dots, X_n\}$. Nous savons grâce à la proposition (4. 4) de [22], qu'une algèbre de Banach A est topologiquement de type fini sur K si et seulement si c'est une extension entière finie d'une extension topologiquement pure de K. D'autre part, nous savons, grâce à la proposition (4. 5) de [22] que A est nœthérienne et que tout idéal maximal est de codimension finie. On peut à ce sujet établir un théorème des zéros de Hilbert pour une extension topologiquement pure dont on déduit que si K est algébriquement clos, le spectre maximal de A est en bijection de façon naturelle avec une partie de U^n, U étant l'ensemble des $x \in K$ tels que $|x| \leq 1$, $(n \in \mathbb{N})$.

2) Rappels sur la théorie de Krasner

On se donne maintenant un corps valué non archimédien, complet, algébriquement clos et une partie D de K. On sait que l'ensemble H(D) des éléments analytiques sur D [14] est une algèbre de Banach si et seulement si D est fermé borné (proposition I-1 de [5]). De plus H(D) est nœthérienne si et seulement si les composantes infraconnexes de D sont en nombre fini, chacune d'elle étant ouverte et sans T-filtre ou réduite à un point (théorème 3 de [4]). (Rappelons que les notions d'<u>infraconnexes</u>, de <u>composantes infraconnexes</u>, de T-filtre sont définies dans [4], [5], [7]). De plus, si ces conditions sont réalisées, D n'admet pas de T-famille et d'après le théorème 5 de [7], tout idéal maximal de H(D) est de codimension 1 et de la forme I(a) où a est un point de D et où I(a) est l'ensemble des éléments nuls en a. Enfin, d'après les théorèmes 1 et 2 de [4], si H(D) est nœthérienne, alors H(D) est intègre si et seulement si D est infraconnexe.

3) Isomorphismes entre algèbres de Krasner et algèbres de Tate

Le paragraphe 2) utilisant un corps à la fois valué non archimédien complet et algébriquement clos, nous considérerons un tel corps K et nous étudierons les isomorphismes entre une algèbre de Krasner H(D) et une algèbre topologiquement de type fini sur K . Du fait que la norme d'une algèbre de Banach $H(D)$ est sa norme spectrale, on a, grâce au théorème de Banach [2] la proposition suivante :

PROPOSITION 1. *Soit D un fermé borné et soit A une K-algèbre de Banach. Tout isomorphisme algébrique entre A et $H(D)$ est bicontinu.*

DEFINITION. Nous dirons qu'une algèbre de Banach A est une *algèbre de Krasner-Tate* si elle est isomorphe à la fois à une algèbre topologiquement de type fini sur K et à une algèbre $H(D)$ telle que D soit un fermé borné infini de K .

§. II. - PROJECTEURS RESTRICTIFS ET APPLICATIONS

DEFINITION. Soit A une algèbre et soit P un endomorphisme de A pour sa structure d'espace vectoriel. Nous dirons que P est un *projecteur restrictif* de A si $P^2 = P$ et si $Ker(P)$ est un idéal de A .

DEFINITION. Soit E une extension topologiquement pure de K et soit $\|.\|$ la norme dont E est munie de façon naturelle [22]. On appellera cette norme $\|.\|$ *la norme canonique de* E .

La proposition 2 généralise le théorème 1 du §. 2 de [9] .

PROPOSITION 2. *Soit A une extension topologiquement pure de K et soit $A\{X_1, \dots, X_m\}$ une extension topologiquement pure de A , dont la norme canonique est notée $\|.\|$. Soient $F_1, \dots, F_m$ des polynômes satisfaisant quel que soit* i $(1 \leq i \leq m)$

a) $F_i \in A[X_i]$;

b) F_i *est unitaire* ;

c) $\|F_i\| = 1$.

Soit $n_i = \deg_i F_i$ $(1 \leq i \leq m)$; *alors il existe un projecteur restrictif de A satisfaisant quels que soient f et $g \in A\{X_1, \dots, X_m\}$, quel que soit $h \in A[X_1, \dots, X_m]$ quel que soit $\theta \in A$ les relations :*

(1) $\mathfrak{R}(f) \in A[X_1, \dots, X_m]$ <u>et</u> $\deg_j \mathfrak{R}(f) < n_j \quad (1 \leq j \leq m)$,

(2) $h - \mathfrak{R}(h) \in \sum_{i=1}^{m} F_i A[X_1, \dots, X_m]$,

(3) $\mathrm{Ker}(\mathfrak{R}) = \sum_{i=1}^{m} F_i A\{X_1, \dots, X_m\}$,

(4) $\mathfrak{R}(\theta f) = \theta \mathfrak{R}(f)$,

(5) $\|\mathfrak{R}(f)\| \leq \|f\|$.

La proposition 2 permet d'apporter une petite amélioration à la proposition (4. 4) de [22] déjà citée.

THEOREME 1. <u>Toute extension entière finie d'une extension topologiquement pure de</u> K <u>peut être munie d'une norme de</u> K-<u>algèbre de Banach qui en fait une algèbre topologiquement de type fini sur</u> K .

La proposition 2 nous donne maintenant le résultat suivant, important pour la suite.

PROPOSITION 3. <u>Soit</u> A <u>une algèbre topologiquement de type fini sur</u> K , <u>intègre</u>, <u>de la forme</u> $K\{T\}[x]$ <u>où</u> x <u>est entier sur l'extension topologiquement pure</u> $K\{T\}$. <u>Soit</u> $F(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_o$ <u>le polynôme minimal de</u> x <u>sur</u> $K\{T\}$. <u>Supposons que l'on ait</u> $\|a_i\| \leq 1$ <u>quel que soit</u> i <u>pour la norme de</u> $K\{T\}$ $(0 \leq i \leq n-1)$. <u>Alors</u> A <u>est isomorphe à l'algèbre quotient</u> $\dfrac{K\{T, X\}}{F(X)K\{T, X\}}$.

§. III. - ENSEMBLES ULTRACIRCONFERENCIES ET QUOTIENTS D'UNE ALGEBRE DE BANACH NOETHERIENNE H(D)

L'étude des algèbres de Krasner-Tate nécessite une bonne connaissance des ensembles que nous allons maintenant définir.

Nous noterons $|K|$ l'ensemble des $|\xi|$, $\xi \in K$.

DEFINITION 1. Nous dirons qu'un infraconnexe fermé borné est <u>calibré</u> si son diamètre appartient à $|K|$ et si le diamètre de chacun de ses trous appartient à $|K|$. Nous dirons plus généralement qu'un fermé borné est <u>calibré</u> si c'est une réunion finie d'infraconnexes calibrés.

DEFINITION 2. Nous dirons qu'une partie infinie D de K est <u>ultracirconférenciée</u> si c'est une réunion finie de fermés bornés calibrés disjoints dont les trous sont en nombre fini.

Remarque. - Il est clair qu'une partie ultracirconférenciée D de K est infraconnexe si et seulement si ses trous sont en nombre fini. De même, si D est ultracirconférencié, il est équivalent de dire que D est infraconnexe et de dire que D est quasiconnexe.

PROPOSITION 4. *Soit D un ouvert ultracirconférencié de K. Alors il existe une fraction rationnelle $T \in K(X)$ telle que $\deg(T) \geq 1$, $T(D) = U$, $D = T^{-1}(U)$.*

Nous devons maintenant étudier à quelle condition un quotient d'une algèbre de Banach nœthérienne $H(D)$ est une algèbre de Banach nœthérienne $H(D')$. Rappelons qu'il résulte du lemme VII.7 de [5] que si $H(D)$ est nœthérienne, tout idéal de $H(D)$ est principal et admet un générateur de la forme χP où χ est la fonction caractéristique d'une réunion de composantes infraconnexes de D et où P est un polynôme dont les zéros appartiennent au support de χ.

PROPOSITION 5. *Soit $H(D)$ une algèbre de Banach nœthérienne. Soit I un idéal de $H(D)$ et soit un générateur de I de la forme χP où χ est la fonction caractéristique d'une réunion de composantes infraconnexes de D et P un polynôme dont les zéros appartiennent au support de χ.*

Soit B l'algèbre quotient $\frac{H(D)}{I}$. Alors B est algébriquement isomorphe à une algèbre de Krasner si et seulement si tous les zéros de P sont simples. Supposons que ces conditions soient réalisées ; soient $a_1, \ldots, a_q$ les zéros de P et soit Δ le support de χ. Soit $D' = (D-\Delta) \cup \{a_1, \ldots, a_q\}$. Alors, si l'on munit B de la norme quotient de celle de $H(D)$, B est isomorphe, algébriquement et topologiquement à $H(D')$. De plus, pour toute algèbre de Banach nœthérienne $H(D')$, il existe un ouvert fermé borné $D \supset D'$ tel que $H(D)$ soit nœthérienne et tel que $H(D')$ soit isomorphe à un quotient de $H(D)$.

En particulier, si D' est ultracirconférencié, il existe un ultracirconférencié D tel que $D \supset D'$ et tel que $H(D')$ soit isomorphe algébriquement et topologiquement à un quotient de $H(D)$.

DEFINITION. Nous dirons qu'une algèbre $H(D)$ est dégradée si D contient des points isolés.

Remarque. - Il résulte de la proposition 5 que si un quotient d'une algèbre de Banach nœthérienne $H(D)$ par un idéal $I \neq \{0\}$ est isomorphe à une algèbre $H(D')$ alors $H(D')$ est dégradée.

§. IV. - CARACTERISATION DES ALGEBRES DE KRASNER - TATE PARMI LES ALGEBRES DE KRASNER

Rappelons d'abord un résultat concernant les algèbres topologiquement de type fini sur un corps algébriquement clos.

PROPOSITION 6. Soit A une algèbre topologiquement de type fini sur K et soit $\|\cdot\|_{sp}$ la semi-norme spectrale de A. Alors $\|f\|_{sp} \in |K|$ quel que soit $f \in A$.

Preuve. C'est une conséquence immédiate d'un résultat de Gerritzen ([8] et corollaire 2 du théorème 2 du n° 1, chapitre III de [12]).

Grâce à la proposition 6 et aux propositions et théorème qui précèdent, on peut maintenant conclure.

THEOREME 2. Soit D un fermé borné. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

a) D est ultracirconférencié ;

b) il existe une fraction $t = \frac{P}{Q} \in K(X)$ sans pôle dans D, telle que $\deg(P) > \deg(Q)$, $t(D) = U$ et telle que l'algèbre $K\{t\}$ des séries formelles restreintes en t munie de la norme $\|\cdot\|_D$ de $H(D)$ soit isométriquement isomorphe à une extension topologiquement pure de degré 1 et satisfasse

$H(D) = K\{t\}[x]$ où x est l'application identique de D ;

c) $H(D)$ est une algèbre de Krasner-Tate.

De plus, dans le cas où $H(D)$ est non dégradée, $H(D)$ est une algèbre de Krasner-Tate si et seulement s'il existe une fraction t satisfaisant l'assertion b) et vérifiant également $D = t^{-1}(U)$ ($t^{-1}(U)$ étant l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $|t(\xi)| \leq 1$).

Preuve. On démontre d'abord le théorème 2 dans le cas où $H(D)$ est intègre, c'est-à-dire si D est infraconnexe, en utilisant notamment les propositions 3, 4 et la décomposition Mittag-Lefflerienne des éléments analytiques sur un infraconnexe [14] et [20]) puis on généralise dans le cas où D est un ouvert en utilisant la décomposition de la proposition VII. 9 de [5]. Enfin on conclut grâce à la proposition 5.

Si $H(D)$ est une algèbre de Krasner-Tate telle que $D \subset U$, on peut très simplement faire la liaison entre le spectre de $H(D)$ en tant qu'algèbre de Krasner et son spectre en tant qu'algèbre topologiquement de type fini sur K.

THEOREME 3. Soit D un ouvert ultracirconférencié inclus dans U et soit t une fraction possédant les propriétés énoncées dans l'assertion b) du théorème 1. Alors le spectre de $H(D)$ considéré comme algèbre topologiquement de type fini sur K est l'ensemble des couples $(t(\mu), \mu)$ $\mu \in D$.

Dans le cas où $H(D)$ est une algèbre nœthérienne, on obtient une forme de caractérisation des algèbres de Krasner-Tate qui est légèrement plus fine.

THEOREME 4. Soit D un fermé borné calibré tel que $H(D)$ soit intègre ou nœthérienne. Alors $H(D)$ est une algèbre de Krasner-Tate si et seulement s'il existe une fraction $t \in K(D)$ telle que $K[t, x]$ soit dense dans $H(D)$.

Preuve. La difficulté consiste à établir que si $K[t, x]$ est dense dans $H(D)$, alors $H(D)$ est une algèbre de Krasner-Tate. Grâce au théorème 1, il suffit de montrer que D est ultracirconférencié. Mais comme $H(D)$ est nœthérienne, les composantes infraconnexes de D sont en nombre fini et il suffit donc d'établir que chacune est ultracirconférenciée. En fait, on montre que chaque trou de l'une d'elle contient un pôle de t.

La nécessité de l'hypothèse "D calibré" est évidente d'après la proposition 6. D'autre part, un exemple simple montre que l'hypothèse " $H(D)$ nœthérienne" n'est pas superflue pour affirmer la conclusion du théorème 3.

Considérons en effet une suite a_n de K telle que $|a_{n+1}| > |a_n|$ et $\lim_{n\to\infty} |a_n| = R < +\infty$. Soit ρ_n une suite de $|K|$ telle que $0 < \rho_n < |a_n|$ quel que soit n et soit D_n l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $|\xi - a_n| \leq \rho_n$. Soit D_o l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $|\xi| = R$ et soit $D = D_o \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n)$. Alors $K[\frac{1}{x}, x]$ est dense dans $H(D)$ bien que D ne soit pas ultracirconférencié. Cet exemple montre en particulier que le complété d'une algèbre algébriquement de type fini n'est pas forcément topologiquement de type fini.

Un bon exemple d'algèbre de Krasner - Tate est fourni par l'algèbre $A = K\{T\}[x]$ où x satisfait $x^2 - T x + 1 = 0$. En effet, on a $\frac{1}{x} \in A$ et A est l'anneau des séries de Laurent restreintes, c'est-à-dire l'algèbre de Krasner $H(C)$ où C est l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $|\xi| = 1$. Toutefois il est évident que toute algèbre topologiquement de type fini de degré 1 n'est pas une algèbre de Krasner. Il suffit par exemple de considérer

$$B = \frac{K\{T, Y\}}{(Y^2 - T Y) K\{T, Y\}}.$$

Si on pose $x = T - y$ on voit que $xy = 0$. Alors B est un anneau non intègre qui ne contient pas d'idempotent autre que 0 et 1. Ce n'est donc pas une algèbre de Krasner puisque toute algèbre de Krasner nœthérienne $H(D)$ admet pour idempotents les fonctions caractéristiques des composantes infraconnexes de D, d'après [5].

§. V. - CARACTERISATION DES ALGEBRES DE KRASNER - TATE PARMI LES ALGEBRES TOPOLOGIQUEMENT DE TYPE FINI

Nous utiliserons fréquemment les définitions suivantes :

DEFINITION 1) Soit A un anneau et soient a, $b \in A$. On dit que a et b sont fortement étrangers dans A si $aA + bA = A$.

DEFINITION 2) Soient D et D' deux fermés bornés de K tels que $H(D)$ et $H(D')$ soient deux algèbres de Banach isomorphes. Nous dirons que D et D' sont isomorphes.

LEMME. Soit $K\{T,X\}$ une extension topologiquement pure de K de degré 2 et soient P et Q deux polynômes de $K[X]$ fortement étrangers dans $K[X]$. Alors l'idéal engendré dans $K\{T,X\}$ par $P(X) - TQ(X)$ est égal à son radical.

Grâce à ce lemme, nous allons maintenant caractériser de la façon suivante les algèbres de Krasner-Tate non dégradées.

THEOREME 5. Soit $H(D)$ une algèbre de Krasner-Tate non dégradée et soit D' isomorphe à D tel que $D' \subset U$. Soient P et Q deux polynômes fortement étrangers de $K[X]$ satisfaisant

a) P est unitaire ;

b) $\deg(P) > \deg(Q)$;

c) $1 = \|P\| \geq \|Q\|$ pour la norme canonique de $K\{X\}$.

d) La fraction $t = \dfrac{P}{Q} \in K(D')$ satisfait $t(D') = U$, $D' = t^{-1}(U)$.

Alors $H(D)$ est isomorphe à l'algèbre topologiquement de type fini $\dfrac{K\{T,X\}}{(P(X)-TQ(X))K\{TX\}}$ où $K\{T,X\}$ est une extension topologiquement pure de degré 2.

Réciproquement, soient P et Q deux polynômes fortement étrangers de $K[X]$ satisfaisant a), b), c). Soit $t = \dfrac{P}{Q} \in K(X)$ et soit $D = t^{-1}(U)$. Alors l'algèbre topologiquement de type fini $\dfrac{K\{T,X\}}{(P(X) - TQ(X))K\{T,X\}}$ est isomorphe à $H(D)$.

Remarque. - On peut encore résumer le théorème 5 en disant qu'une algèbre de Tate est une algèbre de Krasner non dégradée si et seulement si elle est de la forme $\frac{K\{T,X\}}{(P-TQ)K\{T,X\}}$ où P et Q satisfont a), b), c) .

Le théorème 5 nous donne maintenant parmi les algèbres de Tate une caractérisation qui présente une grande analogie avec l'équivalence des assertions b) et c) du théorème 2 parmi les algèbres de Krasner.

THEOREME 6. Soit A une algèbre topologiquement de type fini sur K . Alors A est une algèbre de Krasner-Tate si et seulement si A est une algèbre sans élément nilpotent non nul, de la forme $K\{t\}[x]$ où x satisfait une relation $P(x) - t\,Q(x) = 0$ telle que P et Q soient deux polynômes fortement étrangers dans $K[X]$ vérifiant $\deg(P) > \deg(Q)$.

Remarque. - Une algèbre A topologiquement de type fini sur K contenant des éléments nilpotents non nuls peut être de la forme $K\{t\}[x]$ où x satisfait une relation $P(x) - tQ(x) = 0$ telle que P et Q soient deux polynômes fortement étrangers dans $K[X]$ satisfaisant $\deg(P) > \deg(Q)$, ce qui justifie la restriction du théorème 6 par rapport à l'équivalence des assertions b) et c) du théorème 2 .

Nous allons maintenant généraliser le théorème 5 par un théorème concernant toutes les algèbres de Krasner-Tate, dégradées ou non. Ce théorème 7 a d'autre part l'avantage de mettre mieux en évidence le rôle des composantes infraconnexes.

THEOREME 7. Soit $H(D)$ une algèbre de Krasner-Tate. Soit D' isomorphe à D tel que $D' \subset U$, soient $D_1, \dots, D_n$ les composantes infraconnexes de D' qui ne sont pas réduites à un point et soient $a_1, \dots, a_n$ les points isolés de D'. Pour toute famille de couples (P_i, Q_i) $(1 \leq i \leq n)$ de polynômes fortement étrangers de $K[X]$, on notera a), b), c), d), e), f) les propriétés suivantes :

a) La fraction $t_i = \frac{P_i}{Q_i}$ satisfait $t_i(D_i) = U$, $D_i = t_i^{-1}(U)$, $(1 \leq i \leq n)$;

b) P_i est unitaire $(1 \leq i \leq n)$;

c) $\deg(P_i) > \deg(Q_i)$ $(1 \leq i \leq n)$;

d) $1 = \|P_i\| \geq \|Q_i\|$ pour la norme canonique de $K\{X\}$, $(1 \leq i \leq n)$;

e) $P_i - TQ_i$ est irréductible dans $K\{T, X\}$, $(1 \leq i \leq n)$;

f) $P_i - TQ_i$ et $P_j - TQ_j$ sont fortement étrangers dans $K\{T, X\}$, quels que soient $i \neq j$.

Soit une famille de couples de polynômes fortement étrangers de $K[X]$, (P_i, Q_i) $(1 \leq i \leq n)$ satisfaisant a), b), c). Soient $b_1, \ldots, b_m \in U$. Alors la famille (P_i, Q_i) $(1 \leq i \leq n)$ satisfait d), e), f) ; $H(D_i)$ est isomorphe à $\frac{K\{T, X\}}{(P_i(X) - TQ_i(X))\, K\{T, X\}}$; $H(D)$ est isomorphe à

$$\frac{K\{T, X\}}{\prod_{j=1}^{m} [(X - a_j)K\{T, X\} + (T - b_j)K\{T, X\}] \prod_{i=1}^{n} (P_i(X) - TQ_i(X))\, K\{T, X\}}.$$

Réciproquement, soit A une algèbre topologiquement de type fini de la forme ci-dessus où $(a_j, b_j) \in U \times U$ $(1 \leq j \leq m)$ et où (P_i, Q_i) est un couple de polynômes fortement étrangers de $K[X]$ $(1 \leq i \leq n)$ satisfaisant b), c), d), e), f). Soit $t_i = \frac{P_i}{Q_i} \in K(X)$; soit $D_i = t_i^{-1}(U)$; soit $D = \{a_1, \ldots, a_m\} \cup (\bigcup_{i=1}^{n} D_i)$. Alors A est isomorphe à $H(D)$.

Remarque. - Le fait qu'une algèbre de Krasner-Tate non dégradée A puisse se mettre sous la forme $\frac{K\{T, X\}}{(P(X) - TQ(X))\, K\{T, X\}}$ n'implique pas que cette forme soit la seule possible pour faire apparaître A comme quotient d'une extension topologiquement pure de degré 2. Considérons notamment l'exemple suivant. Soit $A = \frac{K\{T, Y\}}{(Y^2 + Y - T^2)\, K\{T, Y\}}$. Alors A est une algèbre de Krasner-Tate ; en effet, il suffit de faire le changement de variable $X = Y - T$ pour constater que $A = \frac{K\{T, X\}}{[X^2 + X - T(1 + 2X)]\, K\{T, X\}}$. Sous cette dernière forme, il est clair que A est une algèbre de Krasner-Tate d'après le théorème 5.

§. VI. - CARACTERISATION DES ALGEBRES DE KRASNER - TATE PARMI LES ALGEBRES DE BANACH

Pour obtenir une caractérisation des algèbres de Krasner - Tate parmi les algèbres de Banach, il faut d'abord rappeler un résultat de la géométrie algébrique.

PROPOSITION 6. *Soit* E *un corps algébriquement clos et soit* B *une* E *algèbre algébriquement de type fini sur* E . *Alors les assertions suivantes sont équivalentes* :

a) B *est principal* ;

b) *il existe* $x \in B$ *et une fraction* $t \in E(X)$ *de degré* > 0 *telle que* x *soit entier sur* $E[t]$ *et tel que* $B = E[t, x]$.

THEOREME 8. *Soit* A *une* K*-algèbre de Banach dont la norme est notée* $\| \cdot \|$ *et dont la semi-norme spectrale est notée* $\| \cdot \|_{sp}$. *Alors* A *est une algèbre de Krasner-Tate si et seulement si* A *possède les propriétés suivantes* :

a) A *est nœthérienne* ;

b) $\|f\|_{sp} \in |K|$ *quel que soit* $f \in A$;

c) *pour tout élément* $f \in A$ *tel que* $\|f\|_{sp} \leq 1$, *la suite* $\|f^n\|$ *est bornée* ;

d) A *contient une sous-*K*-algèbre* B *dense dans* A , *principale, algébriquement de type fini.*

Grâce au théorème 8 et grâce au fait que l'image d'un infraconnexe D par un élément de $H(D)$ est infraconnexe, on retrouve une nouvelle forme (légèrement améliorée) du théorème 4 .

COROLLAIRE 1. Une algèbre de Banach $H(D)$ est une algèbre de Krasner-Tate si et seulement si elle satisfait les conditions suivantes :

i) D est calibré ;

ii) $H(D)$ contient une sous-algèbre algébriquement de type fini sur K, principale, dense dans $H(D)$.

Mais l'application du théorème 8 aux algèbres topologiquement de type fini est plus intéressante du fait que toute algèbre topologiquement de type fini satisfait déjà les conditions a), b), c). On obtient donc le théorème :

THEOREME 10. Une algèbre A topologiquement de type fini sur K est une algèbre de Krasner-Tate si et seulement si elle contient une sous-algèbre principale, dense dans A, algébriquement de type fini sur K.

Remarque. - Le théorème 8 nous donne en particulier des conditions suffisantes pour qu'une algèbre de Banach soit une algèbre de Krasner, et pour qu'elle soit une algèbre de Tate. Ces conditions sont intéressantes dans la mesure où elles ne rappellent ni la définition d'une algèbre de Krasner, ni celle d'une algèbre de Tate.

Nous allons maintenant étudier un exemple d'algèbre de Banach qui montrera qu'aucune des conditions a), b), c), d) du théorème 8 n'est superflue.

THEOREME 11. On considère l'application $\|\cdot\|$ définie sur $K[X]$ de la façon suivante : pour tout polynôme $P(X) = \sum_{n=0}^{p} a_n X^n$, soit $\|P\| = \sup_{0 \le n \le p} |a_n|(n+1)$. Alors l'application $\|\cdot\|$ définit sur $K[X]$ une norme de K-algèbre. Soit A l'algèbre de Banach, complétée de $K[X]$ pour la norme $\|\cdot\|$. Alors A est algébriquement isomoprhe à une sous-algèbre pleine A' de $H(U)$ telle que $K(U) \subseteq A' \subseteq H(U)$, par un isomorphisme Φ qui associe à X l'application identique sur U. La semi-norme spectrale A' est une norme induite par la norme $\|\cdot\|_U$ de $H(U)$. Si $\|\cdot\|_{sp}$ désigne la norme spectre de A, pour tout élément $t \in A$ tel que $\|t\|_{sp} < 1$, on a $\lim_{n\to\infty} \|t^n\| = 0$. L'algèbre A est principale et ne satisfait pas la condition c) du théorème 8 .

Le théorème 11 montre en particulier l'existence d'algèbres de Banach sur K satisfaisant les conditions a), b), d) du théorème 8 mais non la condition c), ce qui prouve que la condition c) n'est pas une conséquence de a), b), d). Par ailleurs, il est clair qu'il existe des algèbres de Banach H(D) qui satisfont a), b), c) mais non d) et il existe des algèbres de Banach H(D) satisfaisant b), c), d) mais non a) d'après la remarque qui suit le théorème 4. Enfin, si $|K| \neq \mathbb{R}$ il est immédiat de construire un disque D tel que H(D) satisfasse a), c), d) mais non b). On voit donc qu'aucune des propriétés : a), b), c), d) n'est une conséquence des trois autres.

Nous allons voir maintenant un exemple intéressant d'algèbre de Tate qui n'est pas une algèbre de Krasner-Tate.

PROPOSITION 7. Soit A une algèbre topologiquement de type fini principale contenant une sous-algèbre $B = K[y_1, \dots, y_n]$ dense dans A dont le corps de fraction F est une extension transcendante pure de K de degré 1 . Alors il existe $u \in A \cap F$ tel que $F = K(u)$. Soit $y_i = \psi_i(u)$ $(1 \leq i \leq n)$ et soit Λ le spectre de u dans A . Supposons qu'il existe $a \in \Lambda$ tel que $\psi'_i(a) = 0$ quel que soit i . Alors A n'est pas une algèbre de Krasner-Tate.

La proposition 7 permet en particulier de montrer que l'algèbre topologiquement de type fini $\dfrac{K\{T, Y\}}{(Y^2 - T^3)\, K\{T, Y\}}$ n'est pas une algèbre de Krasner-Tate, il suffit pour cela de vérifier qu'elle est intègre.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE Yvette. - Fonctions ultramétriques. Frontières analytiques dans certains quasi-connexes fermés d'un corps valué non archimédien complet et algébriquement clos. C. R. A. S. Paris, t. 268, p. 1251-1253 (28 mais 1969).

[2] BOURBAKI Nicolas. - Espaces vectoriels topologiques. Chap. I, Hermann, Paris, 1953. (Actualité Scientifique et Industrielle).

[3] BOURBAKI Nicolas. - Théorie spectrale. Chap. I, Hermann, Paris, 1967 (Actualité Scientifique et Industrielle).

[4] ESCASSUT Alain. - Algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner. C. R. A. S. , Paris, t. 270, p. 758-761 (23 mars 1970).

[5] ESCASSUT Alain. - Algèbres de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner. Thèse polycopiée, Bordeaux, 1970.

[6] ESCASSUT Alain. - Complément sur le prolongement analytique dans un corps valué non archimédien complet algébriquement clos. C. R. A. S. , Paris, t. 271, p. 718-721 (12 octobre 1970).

[7] ESCASSUT Alain. - Algèbres de Krasner. C. R. A. S. , Paris, t. 272, p. 598 (premier mars 1971).

[8] GUERRITZEN Lothar. - Die Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf reduzierten affinoiden Algebren. Journal für die reine und angewandte Mathemathematik Band 231, 1968.

[9] GRAUERT Hans et REMMERT Reinhold. - Uber die Methode der diskret bewerten Ringe in den nicht-archimedischen Analysis. Inv. Math. t. 2, p. 87-133, 1966.

[10] GRAUERT Hans. - Affinoide Überdeckungen eindimensionaler, affinoïder Räme. Presses Universitaires de France, Paris, I. H. E. S. , Publications Mathématique, n° 34.

[11] GRUSON Laurent. - Algèbres de Banach ultramétriques (Journées Poitou-Aquitaine, Poitiers, 1967).

[12] GRUSON Laurent. - Fibrés vectoriels sur un polydisque ultramétrique. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. , 4e série, T. 1, 1968 p. 45 à 89.

[13] HOUZEL Charles. - Espaces analytiques rigides sur un corps ultramétrique (d'après Tate). Colloque Poitou-Aquitaine, 1965.

[14] KRASNER Marc. - Prolongement analytique uniforme et multriforme dans les corps values complets. Colloque du C. N. R. S. , Clermont-Ferrand, 1964).

[15] LANG Serge. - Abelian varieties. Interscience tracts in pure and applied mathematics, number 7. Interscience publischers, Inc. New-York, 1958.

[16] LANG Serge. - Algebra. Addison Wesley. Publishing Company Inc. Reading Massachussetts, 1965.

[17] LAZARD Michel. - Les zéros d'une fonction analytique. Presses Universitaires de France, Paris, I. H. E. S. , Publications Mathématique n° 14.

[18] MOTZKIN Elhanan et ROBBA Philippe. - Ensembles satisfaisant au principe du prolongement analytique en analyse p-adique. C. R. A. S. , Paris, t. 269, p. 126-129 (21 juillet 1969).

[19] REMMERT Reinhold. - Algebraische Aspekte in der nichtarchimedischen analysis.

[20] ROBBA Philippe. - Thèse de doctorat d'Etat. Paris (polycopié) à paraître.

[21] SALMON Pietro. - Serie convergenti su un corpo non archimedeo con applicazione ai fasci analitici (Annali di Matematica pura ed applicata, serie IVT LXV, 1964).

[22] TATE John. - Rigid analytic spaces. Inv. Math. t. 12, fasc. 4, 1971, p. 257-289.

-:-:-:-

Alain ESCASSUT
U. E. R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université de Bordeaux 1
351, cours de la Libération
33 - T A L E N C E