Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux

Jacques Martinet

Modules projectifs sur un ordre

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1970-1971), exp. nº 15, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971____A15_0>

MODULES PROJECTIFS SUR UN ORDRE

par

Jacques MARTINET

-:-:-:-

§. I. - GROUPES DE GROTHENDIECK

Soit R un anneau, et $\mathcal{P}(R)$ la catégorie des R-modules à gauche projectifs de type fini. On désigne par $\mathcal{C}(R)$ une sous-catégorie de $\mathcal{P}(R)$, contenant les modules libres, stable pour la somme directe, et vérifiant la condition suivante : si P, P', P'' sont des objets de $\mathcal{P}(R)$, avec $P \simeq P' \oplus P''$, et si P et P' sont des objets de $\mathcal{C}(R)$, il en est de même de P''.

Exemple 1. $\mathcal{C}(R) = \mathcal{P}(R)$.

Exemple 2. Soit A un anneau intègre, K son corps des fractions, L une K algèbre de dimension finie, B un ordre de A dans L. On dira que le rang d'un B-module M est défini, et égal à r, si $K \otimes_A M$ est libre sur L, avec r générateurs. La catégorie $\mathcal{P}'(B)$ des B-modules projectifs de type fini dont le rang est défini vérifie nos hypothèses. On peut remarquer que $\mathcal{P}'(B) = \mathcal{P}(B)$ dans les deux cas suivants :

1) L'algèbre L est commutative et B est à spectre connexe (Bourbaki [3]).

2) L'anneau A est un anneau de Dedekind, L est l'algèbre $K[G]$ d'un groupe fini dont l'ordre n n'est pas divisible par la caractéristique de K, et les facteurs premiers de n ne sont pas inversibles dans A (Swan [9]).

On attache à la catégorie $\mathcal{C}$ deux groupes, notés $K_o(\mathcal{C})$ (groupe de Grothendieck) et $\widetilde{K}_o(\mathcal{C})$, définis comme suit :

Le groupe $K_o(\mathcal{C})$ possède comme générateurs les classes d'isomorphismes de modules projectifs de $\mathcal{C}$, liées par les relations $\overline{P} = \overline{P'} + \overline{P''}$ chaque fois que $P \simeq P' \oplus P''$, $\overline{P}$ désignant l'image de $P \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$ dans le groupe abélien libre ayant pour base les classes d'isomorphismes d'objets de $\mathcal{C}$. On notera $[P]$ l'image dans $K_o(\mathcal{C})$ de $P \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$.

Il est clair, d'après la définition, que le groupe $K_o(\mathcal{C})$ avec la flèche $\varphi : P \to [P]$ de $\mathcal{C}$ dans $K_o(\mathcal{C})$ est "universel" dans le sens suivant : si f est une flèche de $\mathcal{C}$ dans un groupe abélien $\mathcal{G}$ vérifiant $f(P' \oplus P'') = f(P') + f(P'')$, il existe un homomorphisme f^* unique de $K_o(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{G}$, tel que $f = f^* \circ \varphi$.

Pour définir $\widetilde{K}_o(\mathcal{C})$, on considère sur la classe des objets de $\mathcal{C}$ la relation d'équivalence suivante : $P \sim P'$ s'il existe des modules libres de type fini L et L', tels que $P \oplus L \simeq P' \oplus L'$. Le groupe $\widetilde{K}_o(\mathcal{C})$ est l'ensemble quotient muni de la loi induite par la somme directe dans $\mathcal{C}$: si (P) désigne l'image dans $\widetilde{K}_o(\mathcal{C})$ de $P \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$, on a $(P) + (P') = (P \oplus P')$. On obtient un groupe, en remarquant que si $P \in \mathcal{C}$, il existe $P' \in \mathcal{C}$ et L libre de type fini, tels que $P \oplus P' \simeq L$. La classe d'un module P est l'élément neutre de $\widetilde{K}_o(\mathcal{C})$ si et seulement s'il existe des modules L et L' libres de type fini, et un isomorphisme de $P \oplus L$ sur L'.

On notera $K_o(A)$ le groupe $K_o(\mathcal{P}(A))$; dans le cas de l'exemple 2, on notera $\widetilde{K'}_o(B)$ le groupe $\widetilde{K}_o(\mathcal{P}'(B))$.

Les propriétés suivantes de $K_o(\mathcal{C})$ sont immédiates (cf. Bass, [2]) :

1) Tout élément de $K_o(\mathcal{C})$ peut se mettre sous la forme $[P] - [L]$, avec L libre.

2) On a $[P] = [P']$ si et seulement si il existe un module libre L et un isomorphisme de $P \oplus L$ sur $P' \oplus L$.

De plus, la propriété universelle de K_o permet de construire un homomorphisme canonique φ de $K_o(\mathcal{C})$ dans $\widetilde{K}_o(\mathcal{C})$, pour lequel $\varphi([P]) = (P)$; φ est évidemment surjectif.

§. II. - LIEN ENTRE $K'_o(B)$ ET $\widetilde{K}'_o(B)$

On prend dans ce paragraphe les notations de l'exemple 2.

Soit $\varphi : K'_o(B) \to \widetilde{K}'_o(B)$ l'homomorphisme canonique. Soit $rg(P)$ le rang d'un objet P de $\mathcal{C}'(B)$. La propriété universelle de $K_o(\mathcal{C}')$ permet de construire un homomorphisme $r : K_o(\mathcal{C}') \to \mathbb{Z}$. On note $\psi = \varphi \times r : K'_o(B) \to \widetilde{K}'_o(B) \times \mathbb{Z}$.

THEOREME. <u>L'homomorphisme ψ est un isomorphisme.</u>

<u>Démonstration.</u> Soit $\alpha \in \operatorname{Ker} \psi$. Ecrivons $\alpha = [P]-[L]$. Comme $(L) = 0$, il existe des modules libres L' et L'' tels que $P \oplus L' \simeq L''$. Alors, $rg(P) + rg(L') = rg(L'')$. Mais $r(\alpha) = 0$; donc, $L \oplus L' \simeq L''$, d'où $P \oplus L' \simeq L \oplus L'$.

Soit $(\alpha, n) \in \widetilde{K}'_o(B) \times \mathbb{Z}$. Soit P un module de $\mathcal{C}'$, vérifiant $(P) = \alpha$. Alors, (α, n) est l'image de $[P] + [B^{n-r}]$ si $n \geq r$, et de $[P]-[B]^{r-n}$ si $n \leq r$. La détermination de $K'_o(B)$ se ramène à celle de $\widetilde{K}'_o(B)$, et ce dernier groupe possède des propriétés arithmétiques liées à l'ordre B.

§. III. - MODULES LOCALEMENT LIBRES

On garde les notations du paragraphe précédent. On suppose en outre que L est semi-simple et que les modules de $\mathcal{C}'$ sont localement libres, i. e : pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de A, et tout objet M de $\mathcal{C}$, $M\mathfrak{p}$ est libre sur $B\mathfrak{p}$ ($M\mathfrak{p} = S^{-1}M$, $B\mathfrak{p} = S^{-1}B$, $S = A - \mathfrak{p}$). Il revient au même de dire que les idéaux à gauche fractionnaires de $B\mathfrak{p}$ sont principaux. Ces conditions sont vérifiées entre autres dans les cas suivants :

1) B est un ordre maximal (Auslander et Goldman, [1]) ;

2) L est commutative (Bourbaki [3]) ;

3) L est l'algèbre $K[G]$ d'un groupe fini (Swan, [9]).

On démontre que si M de rang $r > 0$ est un élément de $\mathcal{C}'$, il existe un idéal fractionnaire I tel que $M \simeq B^{r-1} \oplus I$. On peut alors décrire le groupe $\widetilde{K}'_o(B)$ de la façon suivante : il est engendré par les classes (I) des idéaux fractionnaires projectifs, et l'on a $(I) + (I') = J$, où J est un idéal vérifiant $I \oplus I' \simeq B \oplus J$.

On sait définir la norme réduite dans une algèbre centrale simple. En notant K' le centre de L , on voit tout de suite qu'on peut définir un homomorphisme $N : L^* \to K'^*$, appelé encore norme réduite. Si A' désigne la clôture intégrale de A dans K' , on peut associer à un idéal fractionnaire projectif (ou inversible, c'est la même chose) de B un idéal fractionnaire inversible de A' , noté $N(I)$, défini localement de manière évidente. On a ainsi une application N de l'ensemble des classes d'idéaux de B dans le groupe $\mathcal{H}$ des classes d'idéaux de A' . (En fait $\mathcal{H}$ est isomorphe à $\widetilde{K}'_o(A')$).

Supposons maintenant que K est un corps de nombres, et que B est un ordre maximal. Soient $L_i (1 \leq i \leq r)$ les facteurs simples de K_i $(L \simeq \prod_{i=1}^{r} L_i)$, K'_i le centre de L_i $(K' \simeq \prod_{i=1}^{r} K'_i)$, $\mathfrak{J}$ le groupe des idéaux inversibles de A' , $\mathfrak{J}'$ le sous-groupe de $\mathfrak{J}$ formé des idéaux principaux de K' engendrés par des éléments $(\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, tels que α_i soit positif aux places réelles de K_i ramifiées dans L_i (i.e : le complété de L_i par une telle place est une algèbre de matrices sur le corps des quaternions sur $\mathbb{R}$, ou encore la norme réduite d'un élément de L_i est positive ou nulle à une telle place). On définit un groupe de classes d'idéaux "dans un sens restreint" de A' par $\mathcal{H}' = \mathfrak{J} / \mathfrak{J}'$ et la norme réduite induit un homomorphisme N de $K'_o(B)$ dans $\mathcal{H}'$.

En combinant divers résultats (Eichler [5] ; Chevalley [4]), on peut montrer le

THEOREME (cf. Swan [8]). -

1) <u>L'homomorphisme</u> N <u>est un isomorphisme</u> ;

2) <u>si</u> I <u>et</u> J <u>sont des idéaux projectifs de</u> $\mathcal{C}'(B)$, <u>et si</u> r <u>est un entier au moins égal à</u> 2 , $I \oplus B^r \simeq J \oplus B^r \Rightarrow I \oplus B \simeq J \oplus B$;

3) si aucun des facteurs simples L_i de L est un corps de quaternions totalement défini sur K_i (i. e : K_i non totalement réel ou L_i non ramifiée à toutes les places réelles de K_i),

$$I \oplus B^r \simeq J \oplus B^r \Rightarrow I \simeq J .$$

§. IV. - ALGEBRES DE GROUPES.

On considère dans ce paragraphe le cas où $K = Q$, $L = Q[G]$, $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}[G]$, G étant un groupe fini. Jakobinski [6], a montré que, si aucun facteur simple de $Q[G]$ n'est un corps de quaternions totalement défini, alors, tout module projectif P sur $\mathbb{Z}[G]$, stablement libre, est libre (P est dit stablement libre si $(P) = 0$ dans $\tilde{K}'_o(\mathbb{Z}[G])$).

Si G possède des représentations dans un corps de quaternions totalement défini, il peut exister des modules stablement libres qui ne sont pas libres. Swan [8], a construit un tel exemple à l'aide du groupe de quaternions généralisé d'ordre 32 (le groupe G_n de quaternions généralisé d'ordre $4n$ est défini par deux générateurs σ et τ liés par les relations

$$\sigma^{2n} = 1 , \tau^2 = \sigma^n , \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}).$$

Dans ce cas, l'algèbre $Q[G]$ est isomorphe au produit

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times M_2(\mathbb{Q}) \times M_2(\mathbb{Q}\sqrt{2}) \times H\sqrt{2+\sqrt{2}} ,$$

où $H\sqrt{2+\sqrt{2}}$ est le corps des quaternions "usuels" sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$.

Les groupes non abéliens d'ordre "petit" sont :

- Le groupe diédral D_3 (groupe symétrique sur trois lettres, d'ordre 6) ;
- le groupe diédral D_4 (groupe du carré, d'ordre 8) ;
- le groupe quaternionique G_2, d'ordre 8 .

Il est facile de trouver les représentations inductibles sur $\mathbb{Q}$ de ces groupes :

$$\mathbb{Q}[D_3] \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times M_2(\mathbb{Q})$$
$$\mathbb{Q}[D_4] \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times M_2(\mathbb{Q})$$
$$\mathbb{Q}[G_2] \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times H \quad ,$$

où H est le corps des quaternions usuels sur $\mathbb{Q}$.

(Noter que si un corps K neutralise H, $K[D_4] \simeq K[G_2]$).
Le problème des modules stablement libres ne se pose que pour le groupe G_2.

On peut montrer qu'il y a exactement deux classes d'idéaux dans $\mathbb{Z}[G_2]$, et que, si I désigne un idéal non principal de $\mathbb{Z}[G_2]$, $\mathbb{Z}[G_2]^r \oplus I$ n'est jamais libre ([7]). On en déduit que $K_o(\mathbb{Z}[G]) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Il est à noter que le contre-exemple de Swan est construit de la manière suivante : on remarque qu'il y a deux classes d'idéaux dans un ordre maximal de $\mathbb{Z}$ dans $H\sqrt{2+\sqrt{2}}$, donc aussi dans un ordre maximal $\mathfrak{M}$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}[G_8]$, contenant $\mathbb{Z}[G_8]$. Il résulte du théorème du paragraphe III, qu'il existe dans $\mathfrak{M}$ un idéal I tel que $I \oplus \mathfrak{M} \simeq \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}$. Swan construit alors un idéal J de $\mathbb{Z}[G_8]$ tel que $\mathfrak{M} \otimes_{\mathbb{Z}[G_8]} J \simeq I$, et constate que J est aussi stablement libre.

PROBLEME. Soit G un groupe possédant des représentations dans un corps de quaternions totalement défini, $\mathfrak{M}$ un ordre maximal de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}[G]$, contenant $\mathbb{Z}[G]$, I un idéal à gauche non principal, mais stablement libre de $\mathbb{Z}[G]$. Est-il vrai que $\mathfrak{M} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} I$ est un idéal non principal, mais stablement libre de $\mathfrak{M}$? On remarquera que lorsque $G = G_2$, le nombre de classes d'idéaux de $\mathfrak{M}$ est égal à 1. On constate bien qu'il n'y a pas de modules stablement libres, mis à part les modules libres.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. AUSLANDER et O. GOLDMAN. - Maximal orders. Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960) p. 1-24.

[2] H. BASS. - Algebraic K-theory, Benjamin, New-York (1958).

[3] N. BOURBAKI. - Algèbre commutative, chapitre II, (1965).

[4] C. CHEVALLEY. - L'arithmétique dans les algèbres de matrices. Actualité Scientifiques et Industrielles, Hermann, Paris (1936).

[5] M. EICHLER. - Über die Idealklassenzahl hypercomplexer systeme. Math. Zeit. 43 (1937) p. 481-494.

[6] JACOBINSKI. - Genera and decompositions of lattices over orders. (Acta Mathématica, 121 (1968) p. 1-29).

[7] J. MARTINET. - Modules sur l'algèbre du groupe quaternien. A paraître aux Annales de l'E. N. S. (1971).

[8] R. G. SWAN. - Projective modules overs group rings and maximal orders. Ann. of Maths 76 (1962) p. 55-61.

[9] R. G. SWAN. - Induced representations and projective modules. Ann. of Math. 71 (1960) p. 552-578.

-:-:-:-

Jacques MARTINET
U. E. R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université de Bordeaux 1
351, cours de la Libération
33 - TALENCE