SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

MICHEL WALDSCHMIDT

La méthode de Gel'Fond en théorie des nombres transcendants

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1970-1971), exp. nº 1, p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971____A1_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
Année 1970-1971 , exposé n° 1

20 Octobre 1970

LA MÉTHODE DE GEL'FOND EN THÉORIE DES NOMBRES TRANSCENDANTS

par

Michel WALDSCHMIDT

-:-:-:-

I. - INTRODUCTION

§ 1. - Nous désignerons par $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers rationnels positifs, $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers rationnels, $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels, et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

On choisit une détermination du logarithme complexe qui coïncide avec le logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$, et on note e le nombre réel tel que $\mathrm{Log}\, e = 1$. Pour t et u complexes, on note t^u pour $\exp(u \,\mathrm{Log}\, t)$.

§ 2. - Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble E de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, g une fonction à valeurs réelles positives définie sur $\mathbb{R}^+$. On note

$$f(z) = O(g(|z|))$$

s'il existe deux constantes réelles M et C telles que

$$|f(z)| \leq c\, g(|z|) \quad \text{pour} \quad z \in E \text{ et } |z| > M .$$

Une fonction entière est dite d'ordre $\leq \rho$, où ρ est un nombre réel positif, si

$$\mathrm{Log}\, |f(z)| = O(|z|^{\rho}) .$$

Une fonction méromorphe est d'ordre $\leq \rho$ si elle est quotient de deux fonctions entières d'ordre $\leq \rho$.

§ 3. - Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à coefficients complexes. On définit la hauteur de P par :

$$|P| = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$$

où $|a_i|$ est la valeur absolue ordinaire de a_i.

§ 4. - Soit K un corps, A un anneau qui contient K. Un élément α de A est dit algébrique sur K (resp. transcendant sur K) s'il existe (resp. s'il n'existe pas) un polynôme non nul $P \in K[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$. Deux exemples sont importants :

a) $K = \mathbb{Q}$; $A = \mathbb{C}$. On dit qu'un nombre complexe est algébrique (resp. transcendant) s'il est algébrique sur $\mathbb{Q}$ (resp. transcendant sur $\mathbb{Q}$).

Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est algébrique, il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$, irréductible et primitif, tel que $P(\alpha) = 0$. On appelle longueur de α la somme des valeurs absolues des coefficients de ce polynôme P .

b) Soit $A = \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ l'anneau des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$; on définit une injection

$$\mathbb{C} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$$

en faisant correspondre à $\alpha \in \mathbb{C}$ l'application constante

$$z \to \alpha .$$

Soit :

$$f_o : z \to z \quad \text{et} \quad K = \mathbb{C}(f_o) .$$

Une application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est algébrique (resp. transcendante) si f est algébrique sur $\mathbb{C}(f_o)$ (resp. transcendante sur $\mathbb{C}(f_o)$) , c'est-à-dire s'il existe (resp. s'il n'existe pas) un polynôme non nul $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ tel que

$$P(z, f(z)) = 0 \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} .$$

§ 5. - On généralise les définitions précédentes de la manière suivante :

Des éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de A sont dits algébriquement dépendants sur K (resp. algébriquement indépendants sur K) s'il existe (resp. s'il n'existe pas) un polynôme non nul $P \in K[X_1, \dots, X_n]$ tel que $P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$.

§ 6. - Enfin, dans le cas $K = \mathbb{Q}$ et $A = \mathbb{C}$, si α est un nombre transcendant (resp. si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des nombres algébriquement indépendants), on dira qu'une fonction $\Phi(H, d)$ de deux variables entières positives est une mesure de transcendance de α (resp. une mesure d'indépendance algébrique de α) si, pour tout polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[X]$ (resp. $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$) de hauteur H et de degré d (resp. de degré total d) , on a

$$|P(\alpha)| > \Phi_1(H, d) \quad ; \quad (\text{resp. } |P(\alpha_1, \dots, \alpha_n)| > \Phi_n(H, d)) .$$

Le principe de Dirichlet ([10], p. 23) montre que

$$\Phi_n(H, d) < e^{\lambda d} \times H^{-\tau \frac{(n+d)!}{n!\, d!} + 1}$$

où λ ne dépend que de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et $\tau = 1$ si tous les nombres α_i sont réels, $\tau = \frac{1}{2}$ si l'un au moins est complexe.

§ 7. - Dans ce premier exposé, nous nous limitons aux théorèmes de transcendance. Dans un second esposé, nous étudierons l'indépendance algébrique de certains nombres transcendants (et nous obtiendrons de nouveaux résultats de transcendance). Une étude très complète de l'histoire des nombres transcendants a été faite par Fel'dman et Shidlovskii en 1966 [10] .

II. - APERÇU HISTORIQUE

(Dans ce chapitre, les références telles que (n° 116) correspondent à la bibliographie de l'article de Fel'dman et Shidlovskii [10]).

§ 1. - En 1748, dans son livre "Introductio in analysin infinitorum", Euler (n° 116) conjecturait que le logarithme d'un nombre rationnel pour une base rationnelle est soit rationnel, soit transcendant.

L'existence de nombres transcendants ne fut démontrée qu'un siècle après, en 1844, par Liouville (n° 242, 243). La première démonstration de transcendance qui n'était pas une conséquence directe des travaux de Liouville fut celle de Hermite (n° 187), pour le nombre e , en 1873. Cette méthode était reprise par Lindemann (n° 237, 239) en 1882, en particulier pour la transcendance du nombre π , puis, en 1885, pour Weierstrass (n° 424), qui démontrait le

THEOREME DE LINDEMANN - WEIERSTRASS. Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres algébriques non tous nuls et $b_1, \dots, b_n$ des nombres algébriques distincts. Alors

$$a_1 e^{b_1} + \dots + a_n e^{b_n} \neq 0 .$$

Ce théorème était le premier résultat d'indépendance algébrique, puisqu'il est équivalent à l'énoncé suivant :

" Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des nombres algébriques linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors

$$e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}$$

sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ ".

Dans son exposé "Mathematische Probleme" au congrès de Paris de 1900, Hilbert (190) énonçait une liste de 23 problèmes dont le septième, "Irrationalität und Transzendenz bestimmter Zahlen", était une généralisation de la conjecture d'Euler :

" La puissance α^β d'un nombre algébrique α par un exposant algébrique irrationnel β , par exemple le nombre $2^{\sqrt{2}}$ ou $e^\pi = i^{-2i}$, est elle toujours un nombre transcendant, ou même seulement irrationnel ? "

Les méthodes connues s'appliquaient exclusivement aux valeurs à des points algébriques d'une fonction qui satisfait une équation différentielle linéaire, et il était nécessaire que le développement en série entière de cette fonction ait des coefficients algébriques.

A partir de 1914 se sont développés des travaux sur les fonctions de variable complexe, qui établirent un lien entre l'ordre de croissance d'une fonction analytique et la nature arithmétique des valeurs de cette fonction. C'est ainsi que Polya (330) montre que, si une fonction entière vérifie $f(z) \in \mathbb{Z}$ pour tout $z \in \mathbb{Z}$, et si

$$|f(z)| < c \,.\, 2^{\alpha |z|}$$

où c et α sont deux constantes réelles, $c > 0$ et $\alpha < 1$, alors f est un polynôme en z .

Ce principe essentiel a été amélioré par Fukasawa, puis par Gel'fond (n° 7, 9) qui étudie les fonctions entières f telles que $f(z) \in \mathbb{Z}$ pour tout $z \in \mathbb{Z}(i)$, anneau des entiers de Gauss.

Ses résultats, appliqués à la fonction $e^{\pi z}$, lui permettent de donner la première réponse au problème en 1929 (n° 8) : grâce aux séries d'interpolation de Newton, il démontre la transcendance de e^π, et, plus généralement, de a^b pour a algébrique, $a \neq 0 , 1$ et b quadratique imaginaire.

En 1930, Kuz'min (n° 44) étendait la méthode au cas où b est quadratique réel, puis Boehle (n° 130) montrait que, si b est algébrique de degré $d \geq 2$ et si $a \neq 0 , 1$, alors l'un au moins des nombres

$$a , a^{b} , \dots , a^{b^{d-1}}$$

est transcendant.

En 1933, Gel'fond (n° 12) étudie l'ordre de croissance des fonctions qui prennent des valeurs entières en tous les points d'une progression géométrique. Il fallait utiliser un lemme de Siegel fondé sur le principe de Dirichlet, les idées de Thue et Liouville sur l'approximation de nombres algébriques par des nombres rationnels, ainsi que l'intégrale de Cauchy et le principe du maximum pour résoudre complètement le problème. La solution générale était donnée en 1934, par Gel'fond (n° 13, 14) et Schneider (n° 368), indépendamment l'un de l'autre, et utilisant des méthodes distinctes. Un an après, Mahler (n° 257) prouvait l'analogue p-adique de ce théorème. La méthode analytique que Gel'fond venait de créer était alors utilisée par Schneider (n° 369,372), qui obtenait des résultats de transcendance sur les fonctions elliptiques, et, plus tard, par Ricci (n° 355), Franklin (n° 163), Lototskii (n° 48), Siegel, Koksma et Popken (n° 215), Fel'dman, Lang et Ramachandra.

§ 2. - Certains résultats d'indépendance algébrique, obtenus dès 1929 par Siegel (n° 384) sur les fonctions de Bessel, devaient être généralisés aux E-fonctions par Nesterenko, Persikova, Oleinikov, Belogrivov, Galockin, et surtout Shidlovskii. En ce qui concerne la fonction exponentielle, les résultats les plus spectaculaires furent obtenus par Gel'fond (n° 25, 26, 27), en 1949, où il généralisait sa méthode pour obtenir des théorèmes d'indépendance algébrique. Ces travaux devaient être complétés par Lang et Smelev, et étendus au cas p-adique par Adams (n° 431).

§ 3. - Enfin, en 1966, Baker apportait une contribution essentielle à la théorie. Le théorème de Gel'fond - Schneider, qui résolvait le septième problème de Hilbert, peut s'énoncer :

"Si les logarithmes de deux nombres algébriques sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors ils sont linéairement indépendants sur le coprs des nombres algébriques ".

Aussi Gel'fond avait-il conjecturé que la propriété était vraie pour n logarithmes, et il avait mis en évidence l'importance de ce problème. La résolution de cette conjecture par Baker [2] eut des conséquences dans plusieurs domaines de la théorie des nombres, en particulier dans l'étude des équations diophantiennes, elle a permis également de résoudre une conjecture de Gauss suivant laquelle il n'y a que neuf corps quadratiques imaginaires de nombre de classe 1 , (problème résolu différemment par Stark). L'équivalent p-adique du théorème de Baker, démontré par Brumer [6], permit de calculer le rang p-adique du groupe des unités des corps de nombres abéliens.

§ 4. - La méthode de Gel'fond était d'autant plus remarquable qu'elle n'établissait pas seulement la transcendance de certains nombres, mais permettait également d'obtenir des mesures de transcendance de certains nombres tels que

$$e^{\alpha}\ ,\ \pi\ ,\ \operatorname{Log}\alpha\ ,\ \alpha^{\beta}$$

et également des mesures d'indépendance algébrique.

De tels travaux ont été accomplis par Koksma, Popken (n° 344), Shidlovskii (n° 95) et surtout par Gel'fond et Fel'dman (n° 36).

Ce dernier [8], [9], améliorait les minorations de Baker pour une forme linéaire de logarithmes de nombres algébriques. Les constantes obtenues dans ces résultats étaient effectives -par opposition aux méthodes de Thue, Dyson, Roth par exemple qui ne démontrent que l'existence de constantes.

Baker a donné la première amélioration effective du théorème de Liouville et, avec Coates [7], il donnait le premier résultat effectif concernant le théorème de Thue-Siegel-Roth.

§ 5. - Les problèmes ouverts sont extrêmement nombreux dans la théorie des nombres transcendants. On ignore par exemple la nature algébrique des nombres suivants :

$$e\pi\ ,\ e+\pi\ ,\ 2^{\pi}\ ,\ \pi^{\pi}\ ,\ \pi^{e}\ ,\ e^{e}\ ,\ 2^{e}\ ,\ \Gamma(\tfrac{1}{3})\ ,\ \zeta(2n+1)\ ,\ \gamma\ ,$$

où n est un entier positif, ζ la fonction Zêta, Γ la fonction gamma, et γ la constante d'Euler.

D'autres conjectures importantes sont dues à Schanuel, Schneider, Lang et Ramachandra.

III. - PRINCIPE DES DEMONSTRATIONS - LEMME DE SIEGEL

A/ Schéma

Les démonstrations se font, en général, par l'absurde et le schéma en est le suivant : on suppose un ou plusieurs nombres algébriques (par exemple a , b et a^b).

§ 1. - Un lemme de Siegel [25], utilisant le "principe des tiroirs" de Dirichlet, permet de construire une fonction entière $F \not\equiv 0$, qui s'annule (ainsi que ses dérivées dans le cas où intervient une équation différentielle) en un certain nombre de points.

La fonction F est généralement du type :

$$(1) \qquad F(z) = \sum_i \sum_j p_{i,j}\, z^i \omega_j^z \quad , \qquad p_{i,j} \text{ algébriques.}$$

§ 2. - On majore le nombre de zéros de F (avec leur ordre de multiplicité) grâce au fait qu'une fonction entière d'ordre 1 a un nombre de zéros dans le disque $|z| \leq R$ qui est $O(R)$. Cette majoration peut également utiliser le calcul d'un déterminant, ou encore le fait qu'une fonction entière non nulle ne peut avoir toutes ses dérivées nulles en un point. Enfin, dans le cas de fonctions du type (1) , des formules d'interpolation permettent d'obtenir des résultats plus précis.

§ 3. - Le principe du maximum permet de majorer F (ou ses dérivées) aux points d'un sous-ensemble E de $\mathbb{C}$. On peut aussi appliquer le lemme de Schwarz ou des formules d'interpolation.

§ 4. - En utilisant des propriétés arithmétiques, telles que le théorème de Liouville [22], on minore F (ou ses dérivées) pour $z \in E$ et $F(z) \neq 0$.

§ 5. - Si les conclusions de 2, 3 et 4 sont incompatibles, on obtient la contradiction désirée et on en déduit que l'un au moins des nombres considérés est transcendant.

B/ Lemme de Siegel

La construction d'une fonction auxiliaire repose sur un lemme, dû à Siegel (1929), qui montre que, étant donné un système d'équations linéaires homogènes à coefficients entiers rationnels, si le nombre des inconnues est supérieur au nombre des équations, alors il existe une solution non triviale dans $\mathbb{Z}$, que l'on peut explicitement majorer.

LEMME (Siegel [25]). Soient n et r, $n > r$ deux nombres entiers positifs et $a_{i,j}$ $(1 \le i \le n\ ;\ 1 \le j \le r)$ nr nombres entiers relatifs. On pose

$$A = \max_{i,j} |a_{i,j}| .$$

Alors il existe n entiers relatifs non tous nuls,

$$x_1, \ldots, x_n$$

tels que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_i = 0 \quad , \ 1 \le j \le r \quad \text{et} \quad |x_i| \le 1 + (nA)^{\frac{r}{n-r}} \quad , \ 1 \le i \le n .$$

Démonstration du lemme de Siegel

Soit

$$L : \mathbb{Z}^{(n)} \to \mathbb{Z}^{(r)}$$

l'application linéaire définie par :

$$L(x_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_j \right) .$$

On définit, pour $B \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{Z}^{(n)}(B) = \{(x_i) \in \mathbb{Z}^{(n)} \mid |x_i| \le B \ \text{pour tout} \ i = 1, \ldots, n \} .$$

Alors L applique $\mathbb{Z}^{(n)}(B)$ dans $\mathbb{Z}^{(r)}(nAB)$. Comme $\mathbb{Z}^{(n)}(B)$ a $(2B+1)^n$ éléments, d'après le principe de Dirichlet, si

$$(2B+1)^n > (2nAB+1)^r ,$$

l'application L n'est pas injective et il existe (y_i) et (z_i) appartenant à $\mathbb{Z}^{(n)}(B)$, distincts, tels que

$$L(y_i) = L(z_i) .$$

Soit $x_i = y_i - z_i$. Alors $(x_i) \neq (0)$ et $L(x_i) = 0$ avec $|x_i| \leq 2B$.

Soit :

$$B = [\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n\,A)^{\frac{r}{n-r}}] .$$

Alors

$$2B + 1 > (nA)^{\frac{r}{n-r}} , \quad \text{donc}$$

$$(2B+1)^n > [nA \times (2B+1)]^r$$

$$(2B+1)^n > (2nAB+1)^r$$

et le lemme est démontré.

IV. - UN THEOREME DE LANG : TRANSCENDANCE DES VALEURS DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Pour illustrer la méthode de Gel'fond, il semble intéressant de commencer par un théorème facile (et important) démontré par Lang en 1966.

§ 1. - Enoncé du théorème et conséquences

THEOREME [14], [15]. *Soient* x_1, x_2, x_3 (*resp.* y_1, y_2) *des nombres complexes linéairement indépendants sur* $\mathbb{Q}$. *Alors l'un au moins des six nombres*

$$e^{x_i y_j} , \quad (i = 1,2,3 ; j = 1 , 2)$$

est transcendant.

Ce théorème a été étendu par J. P. Serre au cas p-adique ([23], 1966) et par Ramachandra aux fonctions $\wp$ de Weierstrass ([19], 1968). Il admet de nombreux corollaires, dont les suivants :

COROLLAIRE 1. Si a est un nombre algébrique différent de 0 et 1, et b un nombre complexe irrationnel, alors l'un au moins des trois nombres

$$a^b \ , \ a^{b^2} \ , \ a^{b^3}$$

est transcendant.

Preuve : On pose : $x_1 = 1$; $x_2 = b$; $x_3 = b^2$; $y_1 = \operatorname{Log} a$; $y_2 = b \operatorname{Log} a$. Le seul cas non démontré est alors celui où b est algébrique quadratique, qui est résolu par le théorème de Gel'fond - Schneider que nous verrons plus loin.

Remarquons que ce corollaire s'énonce également :

Soient α et β deux nombres complexes, $\alpha \neq 0, 1$ et $\beta \notin \mathbb{Q}$. Alors l'un au moins des quatre nombres

$$\alpha^\beta \ , \ \alpha^{\beta^2} \ , \ \alpha^{\beta^3} \ , \ \alpha^{\beta^4}$$

est transcendant.

COROLLAIRE 2. Soient α_1, α_2, α_3 trois nombres algébriques dont les logarithmes sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$; soit β un nombre complexe irrationnel. Alors l'un au moins des trois nombres

$$\alpha_1^\beta \ , \ \alpha_2^\beta \ , \ \alpha_3^\beta$$

est transcendant.

Preuve : On pose $x_1 = \operatorname{Log} \alpha_1$, $x_2 = \operatorname{Log} \alpha_2$, $x_3 = \operatorname{Log} \alpha_3$
$y_1 = 1$, $y_2 = \beta$.

Ce corollaire 2 montre que, pour $x \notin \mathbb{Q}$, parmi les nombres

$$p^x \ , \quad p \text{ premier},$$

deux au plus sont algébriques. Ce résultat intervient dans la détermination des caractères de certaines classes d'idèles de corps de nombres [14], [23].

D'autre part, d'après [1], on en déduit que le quotient de deux nombres colossalement abondants consecutifs est soit premier, soit produit de deux nombres premiers. Alaoglu et Erdös conjecturent qu'un tel nombre est premier, c'est-à-dire que, parmi les nombres

$$P^x \ , \quad P \text{ premier},$$

un au plus est algébrique. (Par exemple $2^{\frac{\operatorname{Log} 3}{\operatorname{Log} 2}} = 3$).

Ce problème a été repris par Lang qui conjecture [15] :

" Soient x_1, x_2 (resp. y_1, y_2) deux nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors l'un au moins des quatre nombres

$$e^{x_i y_j} \qquad (i = 1,2 \ ; \ j = 1,2)$$

est transcendant. "

Cette conjecture est équivalente au problème 1 de Schneider ([21]) : " Si α, β, γ sont des nombres algébriques tels que $\frac{\operatorname{Log} \beta}{\operatorname{Log} \alpha}$ et $\frac{\operatorname{Log} \gamma}{\operatorname{Log} \alpha}$ soient irrationnels ; étudier la transcendance de $\exp \frac{\operatorname{Log} \beta \operatorname{Log} \gamma}{\operatorname{Log} \alpha}$ ". On peut étendre ce problème au cas p-adique [23].

Enfin nous verrons dans l'exposé suivant une conjecture plus générale sur l'indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle.

§ 2. - Démonstration du théorème de Lang

Supposons, avec les hypothèses du théorème,

$$e^{x_i y_j} \in \mathbb{Z} \qquad (i = 1,2,3 \ ; \ j = 1,2) .$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ arbitrairement grand, c'est-à-dire minoré par un nombre fini d'inégalités que nous allons déterminer, et soit $r = (2n)^3$. k_i , $i \in \mathbb{N}$ seront des constantes indépendantes de n .

1) On remarque que, pour tout ρ_1, ρ_2, ρ_3 entiers rationnels positifs, la fonction

$$e^{iy_1 z} \times e^{jy_2 z}$$

prend une valeur entière au point $z = \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \rho_3 x_3$. Ainsi, il existe des nombres $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$, non tous nuls, tels que

$$|a_{i,j}| < \exp k_o r n^2$$

et que la fonction

$$F(z) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} a_{i,j} e^{iy_1 z} e^{jy_2 z}$$

vérifie

$$F(\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \rho_3 x_3) = 0 \qquad 1 \le \rho_i \le n^2 \ , \quad i = 1, 2, 3 \ .$$

(il suffit d'appliquer le lemme de Siegel : on a n^6 équations à $r^2 = 2^6 n^6$ inconnues, à coefficients dans Z majorés par

$$\exp k_1 r n^2 \ ) .$$

On écrira $\rho . x$ pour $\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \rho_3 x_3$.

2) Il existe un entier $s \ge n^2$ tel que

a) $\quad F(\rho . x) = 0 \qquad 1 \le \rho_i \le s$

et b) $\quad$ il existe h_1, h_2, h_3 , $\quad 1 \le h_i \le s+1$

avec $\quad F(h. x) \ne 0$.

(Le nombre de $\rho . x$ dans le disque $|z| \le R$ n'est pas majoré par $O(R)$).

3) On utilise le principe du maximum pour majorer $F(h. x)$.

Si on écrit

$$\prod_{\rho} \quad \text{pour} \quad \prod_{\rho_1=1}^{s} \prod_{\rho_2=1}^{s} \prod_{\rho_3=1}^{s} ,$$

on a

$$F(h. x) = \left[\frac{F(z)}{\prod_{\rho} (z - \rho . x)} \cdot \prod_{\rho} (h. x - \rho . x) \right]_{z=h. x} .$$

Or, sur le cercle de rayon $s^{3/2}$, on a $|F(z)| \le \exp k_2 s^3$ et

$$\prod_{\rho} \left| \frac{h. x - \rho . x}{z - \rho x} \right| \le \exp - k_3 s^3 \operatorname{Log} s \ .$$

D'où

$$| F(h. x)| \le \exp - k_4 s^3 \operatorname{Log} s \ .$$

4) Comme $F(h. x)$ est un entier non nul, on a immédiatement la minoration :

$$1 \le | F(h. x)| \ .$$

5) Les conditions 3 et 4 sont incompatibles, ce qui démontre le théorème dans le cas particulier envisagé :

$$e^{x_i y_j} \in \mathbb{Z} .$$

La démonstration générale utilise la technique classique des nombres algébriques.

V. - SOLUTION DU SEPTIEME PROBLEME DE HILBERT : THEOREME DE GEL'FOND - SCHNEIDER

Le théorème de Gel'fond - Schneider sur la transcendance de a^b a été énoncé sous une forme plus générale par Schneider en 1949 [22] ; il obtient ainsi un résultat d'indépendance algébrique de deux fonctions qui prennent, ainsi que leurs dérivées (et c'est là seulement qu'interviennent les équations différentielles) des valeurs algébriques en une suite de points algébriques. L'énoncé donné ici, dû à Lang [15], est plus simple que celui de Schneider. Ce théorème a été généralisé par Bombieri [4] au cas de d fonctions algébriquement indépendantes $(d \geq 2)$.

Enfin signalons que l'analogue p-adique a été démontré par Gunther et Içen ([10] n° 175, 176, 200).

THEOREME [15]. <u>Soient</u> f_1 , f_2 <u>deux fonctions méromorphes dans le plan complexe, d'ordre</u> $\leq \rho$, <u>et algébriquement indépendantes sur</u> $\mathbb{C}$. <u>Soit</u> K <u>un corps de nombres algébriques de degré</u> s <u>sur</u> $\mathbb{Q}$, <u>tel que la dérivation</u> $\frac{d}{dz}$ <u>applique l'anneau</u> $K[f_1 , f_2]$ <u>dans lui-même. Soient</u> $\omega_1 , \dots , \omega_m$ <u>des nombres complexes distincts, non pôles des</u> f_i , <u>tels que</u>

$$f_i(\omega_j) \in K \qquad i = 1, 2 \ ; \ j = 1, \dots , m .$$

<u>Alors</u>

$$m \leq 10 \rho . s \quad .$$

On déduit de ce résultat général les théorèmes de Gel'fond - Schneider sur la transcendance de a^b , de Hermite - Lindemann sur la transcendance de e^{α} , et de Schneider sur les valeurs de la fonction $\wp$ de Weierstrass. La meilleure majoration connue est due à Bombieri [4] : $m \leq 2\rho s$.

COROLLAIRE 1 (Herminte-Lindemann). Si $\alpha \neq 0$ est algébrique, alors e^{α} est transcendant.

COROLLAIRE 2 (Gel'fond - Schneider). Si $\alpha \neq 0, 1$ est algébrique et si β est algébrique irrationnel, alors α^{β} est transcendant.

Démonstration des corollaires

1. - On utilise le théorème avec $f_1(z) = z$, $f_2(z) = e^z$, $\rho = 1$, $\omega_m = m.\alpha$ $(m \in \mathbb{Z})$.

Le seul problème consiste à montrer que f_2 est une fonction transcendante.

Or, si $P(z, e^z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, où P est un polynôme de $\mathbb{Q}[X, Y]$, alors, pour tout $z_o \in \mathbb{C}$, $P(z_o + 2ik\pi, e^{z_o}) = 0$.

Donc le polynôme $P(X, e^{z_o}) \in \mathbb{Q}(e^{z_o})[X]$ a une infinité de racines, à savoir $z_o + 2ik\pi$, $k \in Z$. Donc $P(X, e^{z_o}) \equiv 0$ et $P = 0$.

2. - Pour le corollaire 2, on pose :

$$f_1(z) = e^z , \quad f_2(z) = e^{\beta z} , \quad \omega_m = m \operatorname{Log} \alpha , \quad m \in \mathbb{Z} .$$

Comme $\operatorname{Log} \alpha \neq 0$, les nombres ω_m sont tous distincts. Il reste à prouver que f_1 et f_2 sont algébriquement indépendantes. On procède comme précédemment, avec

$$P(e^{\beta z}, e^z) = 0$$

$$P(e^{\beta z_o} \times e^{2k\pi i \beta}, e^{z_o}) = 0$$

et comme $\beta \notin \mathbb{Q}$, on en déduit

$$P = 0 .$$

Démonstration du théorème

Un des avantages de l'énoncé du théorème est de permettre une démonstration directe, le raisonnement par l'absurde n'intervenant que pour le passage du théorème aux corollaires.

Supposons les hypothèses du théorèmes vérifiées et soit r un nombre entier arbitrairement grand

$$n = [\frac{r^2}{2m}] .$$

1. Il existe des nombres entiers algébriques $b_{i,j}$ non tous nuls, majorés ainsi que leurs conjugués par

$$k_o n^{2n}$$

(où k_o est une constante indépendante de r) et tels que la fonction F, définie par

$$F = \sum_{i,j=1}^{r} b_{i,j} f_1^i f_2^j$$

vérifie

$$F^{(k)}(\omega_j) = 0 \qquad 0 \leq k \leq n-1 \quad , \quad 1 \leq j \leq m \quad .$$

2. Il existe un nombre entier $\sigma \geq n$ tel que

$$F^{(\rho)}(\omega_i) = 0 \quad , \qquad 0 \leq \rho \leq \sigma - 1 \quad ; \quad 1 \leq i \leq m$$

et il existe i_o, $1 \leq i_o \leq m$ tel que

$$\gamma = F^{(\sigma)}(\omega_{i_o}) \neq 0 .$$

3. Le principe du maximum sur le cercle de rayon

$$R = \max [\sigma^{\frac{1}{2\rho}} , \max_j |\omega_j|]$$

donne

$$|\gamma| < \sigma^{4\sigma - \frac{m\sigma}{2\rho}} \times k_1^{\sigma}$$

où k_1 est une constante indépendante de n, r et σ.

4. Comme γ est non nul, si c est un dénominateur de γ, on a :

$$|N_{K/\mathbb{Q}}(c\,\gamma)| \geq 1 .$$

D'où

$$|\gamma| \geq k_2 \, \sigma^{5\sigma(s-1)} .$$

5. De 3 et 4, on déduit, pour r assez grand (donc σ assez grand) :

$$m \leq 10 \rho s .$$

VI. - FORMES LINEAIRES A COEFFICIENTS ALGEBRIQUES DE LOGARITHMES DE NOMBRES ALGEBRIQUES

Considérés du point de vue d'un théorème de transcendance, les résultats de Baker s'énoncent ainsi :

THEOREME [2]. *Soient* $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_o, \dots, \beta_n$ *des nombres algébriques,* $\alpha_i \neq 0$ *pour tout* i *et* $\beta_o \neq 0$. *Alors le nombre*

$$e^{\beta_o} \alpha_1^{\beta_1} \dots \alpha_n^{\beta_n}$$

est transcendant.

Dans le cas $\beta_o = 0$, Baker démontre le

THEOREME [2]. *Soient* $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ *des nombres algébriques,* $\alpha_i \neq 0, 1$ *pour tout* i . *Si*

$$1, \beta_1, \dots, \beta_n$$

sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, *alors*

$$\alpha_1^{\beta_1} \dots \alpha_n^{\beta_n}$$

est transcendant.

De plus, Baker donnait une minoration effective par une forme linéaire de logarithmes, à coefficients algébriques. En reprenant cette méthode, Fel'dman [8], [9] améliorait ces résultats :

THEOREME (Fel'dman [9]). *Il existe une constante absolue* c , *effectivement calculable, telle que pour tous logarithmes de nombres algébriques*

$$\operatorname{Log} \alpha_1, \dots, \operatorname{Log} \alpha_m \qquad m \geq 2$$

linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, *et pour tous nombres algébriques*

$$\gamma_o, \gamma_1, \dots, \gamma_m \qquad (|\gamma_o| + \dots + |\gamma_m| > 0)$$

les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$|\gamma_o + \gamma_1 \operatorname{Log} \alpha_1 + \ldots + \gamma_m \operatorname{Log} \alpha_m| > \exp\{-n(n+\operatorname{Log} H_o) [4^{6m^2-2m+1} \sqrt{n}(c+\operatorname{Log} h)]^{12m^2+4m-3}\}$$

où n est le degré de $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \gamma_o, \gamma_1, \ldots, \gamma_m)$

$$H_o = \operatorname{Max}\{L(\gamma_o), \ldots, L(\gamma_m)\}$$

$$h = \operatorname{Max}\{L(\alpha_1), \ldots, L(\alpha_m), e^{|\operatorname{Log} \alpha_1|}, \ldots, e^{|\operatorname{Log} \alpha_m|}\}$$

et $L(\beta)$ est la longueur du nombre algébrique β.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

Pour une bibliographie plus complète, voir en particulier l'article de Fel'dman et Shidlovskii [10].

[1] ALAOGLU L. et ERDOS P. - On highly composite and similar numbers. Trans. Amer. Math. Soc. 56 (1944), p. 455.

[2] BAKER A. - Linear form in the logarithms of algebraic numbers, I, Mathematika, 13, (1966) 204-216 ; II, id, 14 (1967), 102-107 ; III, id, 14 (1967) 220-228 ; IV, id, 15 (1968), 204-216.

[3] BAKER A. - An estimate for the $\wp$ function at an algebraic point. Amer. J. Math. 92 (1970) p. 619-622.

[4] BOMBIERI E. - Algebraic values of meromorphic maps. Inventiones Math, 10 (1970) p. 267-287.

[5] BOMBIERI E. et LANG S. - Analytic subgroups of group varieties, Invent. Math. 11 (1970) p. 1-14.

[6] BRUMER A. - On the units of algebraic number fields. Mathematika 14 (1967) p. 121-124.

[7] COATES J. - An effective p-adic analogue of a theorem of Thue. I, Acta Arithmetica XV (1969) p. 279-305 ; II id, XVI (1970) p. 399-412 ; III, id, XVI (1970) p. 425-435.

[8] FEL'DMAN N. I. - Estimate for a linear form of Logarithms of algebraic numbers. Mat. Sbornik 76 (118) (1968) p. 291-307.

[9] FEL'DMAN N. I. - Improved estimate for a linear form of the logarithms of algebraic numbers. Math. Sbornik, 17 (119) (1968) p. 393-406.

[10] FEL'DMAN N. I. et SHIDLOVSKII A. B. - The development and present state of the theory of transcendental numbers. Russion Mathematical Surveys, 22 (1967) p. 1-79.

[11] GEL'FOND A. O. - Transcendental and algebraic numbers. Dover, New-York, (1960).

[12] GEL'FOND A. O. et LINNIK Y. - Méthodes élémentaires dans la théorie analytique des nombres. Gauthier-Villars, Paris, (1965).

[13] KOKSMA J. F. - Diophantische approximationen. Erg. d. Math. 4 Springer Berlin (1936).

[14] LANG S. - Nombres transcendants. Sem. Bourbaki, (1965-66), n° 305.

[15] LANG S. - Introduction to transcendental numbers. Addison Wesley, New-York (1966).

[16] LEVEQUE W. J. - Topics in number theory. Addison Wesley, New-York (1956).

[17] LIPMAN J. - Transcendental numbers. Queen's University, Ontario, (1966).

[18] PYATETSKII - SHAPIRO I. I. et SHIDLOVSKII A. B. - Biographie de A. O. Gel'fond. Russion Math. Surveys, 22 (1967) p. 234-242.

[19] RAMACHANDRA K. - Contribution to the theory of transcendental numbers. Acta Arithm. 14 (1968) p. 65-88.

[20] RAMACHANDRA K. - A note on Baker's method. J. Austral. Math. Soc. 10 (1969) p. 197-203.

[21] RAUZY G. - Points transcendants sur les variétés de groupes d'après S. Lang. Sém. Bourbaki, (1963-64) , ° 276.

[22] SCHNEIDER Th. - Introduction aux nombres transcendants. Gauthier-Villars, Paris, (1959).

[23] SERRE J. P. - Dépendance d'exponentielles p-adiques. Sém. Delange-Pisot-Poitou (1966) n° 15.

[24] SERRE J. P. - Travaux de Baker. Sém. Bourbaki (1969-70), n° 368.

[25] SIEGEL C. L. - Transcendental numbers. Princeton Univ. Press (1949).

[26] SMELEV A. A. - On a certain class of transcendental numbers. Mat. Zametki, 4 (1968) p. 341-348 (Math. Notes, 4 (1968) p. 696-700).

[27] SMELEV A. A. - Apprpximation of one class of transcendental numbers. Mat. Zametki, 5 (1969) p. 117-128 (Math. notes, 73-79).

-:-:-:-

Michel WALDSCHMIDT
Université de Bordeaux 1
U.E.R. de Mathématiques
et d'Informatique
351, cours de la Libération
33 - TALENCE