Jean-Marc Deshouillers

Nombres presque premiers et sommes trigonométriques

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1970-1971), exp. n° 23, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971____A23_0>

NOMBRES PRESQUE PREMIERS
ET
SOMMES TRIGONOMETRIQUES

par

Jean-Marc DESHOUILLERS

-:-:-:-

§. I. - POSITION DU PROBLEME

Soit α un nombre irrationnel positif ; nous considérons ici la suite d'entiers $\mathcal{A}(\alpha) = \{[\alpha n^2] / n \in \mathbb{N}\}$ du point de vue des nombres premiers ou presque premiers qu'elle contient.

DEFINITION. Soit k un entier positif ; nous appellerons $\pi_\alpha^{(k)}(x)$ le nombre d'entiers n inférieurs à x tels que $[\alpha n^2]$ ait au plus k facteurs premiers (comptés avec leur multiplicité). Nous poserons $\pi_\alpha(x) = \pi_\alpha^{(1)}(x)$.

Des raisons heuristiques conduisent à penser que l'on a le résultat suivant :

CONJECTURE :

$$(1) \qquad \pi_\alpha(x) \sim \frac{x}{2 \operatorname{Log} x} .$$

Ce problème semble très loin d'être résolu, aussi nous allons étudier quelques conséquences de (1) :

(2) $\pi_\alpha(x) = O\left(\frac{x}{\operatorname{Log} x}\right)$;

(3) $\pi_\alpha(x) = o(x)$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \pi_\alpha(x) = +\infty$;

(5) $\exists k : \lim\limits_{x\to\infty} \pi_\alpha^{(k)}(x) = +\infty$;

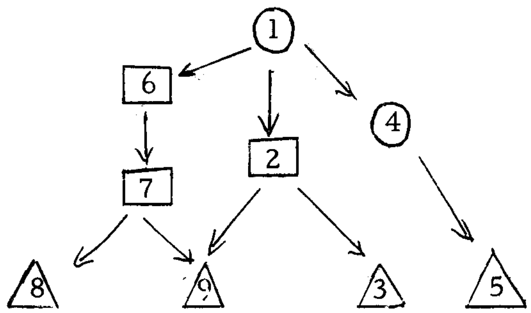
(6) pour presque tout α, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2 \operatorname{Log} x \, \pi_\alpha(x)}{x} = 1$;

(7) pour presque tout α, $\lim\limits_{x\to\infty} \pi_\alpha(x) = +\infty$;

(8) l'ensemble des α tels que $\lim\limits_{x\to\infty} \pi_\alpha(x) = +\infty$ est dense dans $\mathbb{R}$;

(9) pour presque tout α, $\pi_\alpha(x) = o\left(\frac{x}{\operatorname{Log} x}\right)$.

Dans le diagramme suivant, nous figurons l'enchaînement des propositions que nous venons d'énoncer ; un cercle signifie que la proposition nous semble très difficile, un carré signifie qu'elle semble résoluble, un triangle indique que nous avons résolu le problème posé. (N. B. les implications sont triviales).



§. II. - ETUDE DE LA 3e QUESTION

Choisissons un entier d tel que $\frac{\varphi(d)}{d} < \varepsilon$ (ε étant un nombre réel positif donné). On vérifie facilement l'équivalence de

(i) $[\alpha n^2] \equiv \ell \pmod{d}$,

et

(ii) $\frac{\ell}{d} \leq \left\{\frac{\alpha n^2}{d}\right\} < \frac{\ell+1}{d}$.

Or, on sait depuis les travaux de Weyl que la suite $\frac{\alpha n^2}{d}$ est équi-répartie modulo 1 ; pour x suffisamment grand, on a :

$$\mathcal{N}(n \leq x \,/\, [\alpha n^2] \equiv \ell \pmod d) = (1 + o(1)) \frac{x}{d} \ .$$

Soient alors $\ell_1, \dots, \ell_{d-\varphi(d)}$ les $(d - \varphi(d))$ restes modulo d tels que $(\ell_i, d) > 1$; on a :

$$\sum_{i=1}^{d-\varphi(d)} \mathcal{N}(n \leq x \,/ [\alpha n^2] \equiv \ell_i \pmod d) = \frac{d - \varphi(d)}{d} (1 + o(1))\, x \ .$$

Mais pour tout n ainsi compté (sauf pour un nombre fini A) les nombres $[\alpha n^2]$ sont composés, car ils sont divisibles par (ℓ_i, d) ; on en déduit :

$$\pi_\alpha(x) < \frac{\varphi(d)}{d} x + A \leq 2\varepsilon x$$

dès que x est assez grand, ce qui montre que $\pi_\alpha(x) = o(x)$.

§. III. - ETUDE DE LA 5e QUESTION

Sans introduire d'idée nouvelle, il ne semble pas possible de dépasser beaucoup ce stade ; pour aller plus loin, il nous faut une connaissance plus précise de la quantité

$$\mathcal{N}(n \leq x \,/\, [\alpha n^2] \equiv \ell \pmod{d}) \ .$$

Nous poserons

$$E(x\,;\, d,\, \ell) = |\, \mathcal{N}(n \leq x \,/\, [\alpha n^2] \equiv \ell \pmod d) - \frac{x}{d}\, |$$

et

$$E^*(x\,;\, d) = \sup_{\ell \bmod d} E(x\,;\, d,\, \ell) \ .$$

Le crible de A. Selberg

Nous utiliserons le résultat suivant de la théorie du crible, résultat dû à Richert (cf. [4]).

THEOREME (Richert). Soit $\mathcal{A}$ une suite finie d'entiers ; supposons que l'on puisse trouver trois nombres réels positifs β , B , x et un nombre entier r tels que :

(i) $\forall a \in \mathcal{A} \ : \ a \leq x^{\beta(r-1)}$;

(ii) $$\sum_{d \leq x^{\beta} (\mathrm{Log}\, x)^{-B}} \mu^2(d)\, 3^{\nu(d)}\, \eta(x,d) \ll \frac{x}{\mathrm{Log}^{15/14} x} ,$$

où

$$\eta(x,d) = \Big| \sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ a \equiv 0 (\mathrm{mod.}\ d)}} 1 - \frac{x}{d} \Big| .$$

Alors
$$\sum_{p_r \in \mathcal{A}} 1 \gg \frac{x}{\mathrm{Log}\, x} .$$

Pour résoudre la cinquième question, on va prendre pour $\mathcal{A}$ l'ensemble $\mathcal{A}(x)$ des nombres $[\alpha n^2]$ avec $n \leq x$ et $\eta(x,d) = E(x, d, 0)$. Pour trouver la valeur β convenable, il faut étudier des sommes qui sont essentiellement du type $\sum_{d \leq x^{\beta}} E(x, d, 0)$. Il semble que des arguments du genre "grand crible" permettent directement d'étudier les sommes $\sum_{d \leq x^{\beta}} E^*(x,d)$ et fournissent des résultats "à la Bombieri" ; nous n'avons pas encore réussi dans cette approche, aussi nous allons nous contenter de majorer chaque terme $E(x, d, 0)$.

DEFINITION. On appelle discrépance de la suite de nombres réels $u_1, \dots, u_n$ la quantité

$$D = \sup_{I \subset [0,1[} \Big| \frac{1}{n} \eta\, (k \,/\, \{u_n\} \in I) - \mu(I) \Big| ,$$

I parcourant l'ensemble des sous-intervalles de $[0,1[$, et $\mu(I)$ étant la longueur de I .

A l'aide de cette définition, on voit que la quantité $\eta(x,d) = E(x, d, 0)$ est inférieure ou égale à la discrépance $D_{\alpha}^{(d)}(x)$ de la suite $\frac{\alpha n^2}{d}$, multipliée par x .

Pour calculer cette discrépance, nous allons faire appel au résultat suivant dû à Erdös-Turán (cf. [1]).

THEOREME (Erdös-Turán).

$$x\, D_{\alpha}^{(d)}(x) \ll \frac{x}{m} + \sum_{h=1}^{m} \frac{1}{h} \Big| \sum_{n=1}^{x} e^{2i\pi h \frac{\alpha n^2}{d}} \Big| ,$$

la constante impliquée étant absolue.

On voit donc que notre problème se ramène à calculer des sommes trigonométriques $\sum_{n=1}^{x} e(\frac{h\alpha n^2}{d})$.

Or, on sait (cf. [2], ou [3]) que, lorsque h et d ne sont pas trop grands, les sommes en question sont essentiellement majorées par $x^{3/4}$ d'où une majoration de $x D_{\alpha}^{(d)}(x)$ et donc de $E(x, d, 0)$ de l'ordre de $x^{3/4}$. (Cela est assez grossier ; il faut en fait surveiller de plus près la dépendance en d et h). On voit alors que l'on peut choisir $\beta = \frac{1}{4}$ dans le résultat (ii) de Richert. Le choix de r dépend alors de la relation (i) : $x^2 \leq x^{\frac{1}{4}(r-1)}$; on peut donc choisir $r \geq 9$.

THEOREME. <u>Pour tout</u> α <u>irrationnel, il existe une infinité d'entiers</u> n <u>tels que</u> $[\alpha n^2]$ <u>ait au plus</u> 9 <u>facteurs premiers.</u>

<u>Remarque.</u> - Si l'on a des renseignements sur α , par exemple si l'on sait que les termes du développement en fraction continue de α sont bornés (ou ne croissent pas trop vite), on peut abaisser la borne de 9 à 5 .

§. IV. - REMARQUES SUR LES AUTRES QUESTIONS

<u>Deuxième question</u> : La méthode du crible permet de montrer que $\pi_{\alpha}(x) = O(\frac{x}{\text{Log } x})$ si α possède la propriété suivante : il existe un nombre réel $A > 2$ tel que l'inéquation $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^A}$ n'ait qu'un nombre fini de solution ; en particulier $\pi_{\alpha}(x) = O(\frac{x}{\text{Log } x})$ si α est algébrique, et plus généralement si α n'est pas un nombre de Liouville, ce qui démontre (9) .

<u>Sixième et septième questions</u> : Il me semble que la démonstration de (7) passe par la démonstration de (6) ; pour résoudre ces questions il faut connaître des résultats probabilistes d'indépendance ou de quasi-indépendance concernant les nombres premiers.

Remarquons enfin que l'on peut poser (et résoudre) le même genre de question en prenant pour suite d'entiers initiale une suite du genre $\{[g(n)] \,/\, n \in \mathbb{N}\}$, g étant un polynôme à coefficients réels, où une fonction presque polynômiale : n^c , n^c Log n , etc ...

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. ERDÖS et P. TURÁN. - On a problem in the theory of uniform distribution I, II. Proc. Kon. Ned. Akad. Wer. (ser. A) 51, 1948, pp. 370-378 et 406-413.

[2] L. K. HUA. - Additive theory of prime numbers. Amer. Math. Soc. Prov. (New-York), 1965, p. 63.

[3] J. F. KOKSMA. - Diophantische Approximationen (Berlin, 1936), Erg. der Math.

[4] H. E. RICHERT. - Selberg's sieve with weights. Mathematika 16, 1969, pp. 1-22.

-:-:-:-

Jean-Marc DESHOUILLERS
U. E. R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université de Bordeaux 1
351, cours de la Libération
33 - T A L E N C E