SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

BERNARD DE MATHAN

Sur les suites eutaxiques

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1970-1971), exp. nº 27, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971____A27_0>

© Université Bordeaux 1, 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de théorie des nombres de Bordeaux implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire de Théorie des Nombres
Année 1970-1971 - exposé n° 29

Premier Juin 1971

SUR LES SUITES EUTAXIQUES

par

Bernard de MATHAN

-:-:-:-

INTRODUCTION

La notion de suite eutaxique peut se définir dans un groupe abélien G, muni d'une distance invariante par translation, compact. (On pourrait d'ailleurs avoir une plus grande généralité, mais les choses seraient moins claires, et cela semble présenter peu d'intérêt). On désigne par $\|.\|$ la "norme" de G, en sorte que la distance de deux éléments x, y de G est $\|x-y\|$. Le groupe G est muni de sa mesure de Haar normalisée, μ.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de G. Nous nous intéressons aux approximations des éléments de G par des termes de cette suite. Soit pour chaque n, B_n un disque de centre u_n. Désignons, pour $x\in G$ et N entier positif, par $\nu(x;N)$ le nombre d'entiers n tels que $0<n\leq N$ et que $x\in B_n$. Soit β_n la fonction caractéristique du disque B_n. On a :

$$\nu(x;N) = \sum_{n=1}^{N} \beta_n(x)$$

donc

$$\int \nu(x;N)dx = \sum_{n=1}^{N} \mu(B_n) .$$

Il est facile de voir que si la série $\sum_n \mu(B_n)$ est convergente, alors pour presque tout $x \in X$, il n'existe qu'un nombre fini d'entiers n tels que $x \in B_n$. En effet, l'ensemble des x pour lesquels il existe une infinité de n tels que $x \in B_n$, c'est-à-dire $\bigcap_{N>0} (\bigcup_{n \geq N} B_n)$, est négligeable, car $\mu(\bigcup_{n\geq N} B_n) \leq \sum_{n \geq N} \mu(B_n)$ donc $\lim_{N\to\infty} \mu(\bigcup_{n \geq N} B_n) = 0$ puisque la série $\sum \mu(B_n)$ est convergente.

On est ainsi conduit à la définition suivante.

DEFINITION 1. La suite (u_n) est dite eutaxique (respectivement fortement eutaxique) si les conditions que la suite $(\mu(B_n))$ soit décroissante, et la série $\sum \mu(B_n)$ divergente, impliquent que pour presque tout $x \in G$, il existe une infinité de n tels que $x \in B_n$ (respectivement, que l'on ait pour presque tout x, $\nu(x;N) \simeq \sum_{n=1}^{N} \mu(B_n)$).

Naturellement, toute suite eutaxique est dense, toute suite fortement eutaxique est équirépartie.

Il faut supposer dans cette définition, la suite $(\mu(B_n))$ décroissante, car sinon on peut toujours construire une suite de disques (B_n) telle que la série $\sum \mu(B_n)$ soit divergente, et que l'ensemble $x \in G$ pour lesquels il existe une infinité de n tels que $x \in B_n$, ne soit pas de mesure pleine (à condition que G ne soit pas discret). En effet, soit r un nombre réel positif tel que le disque D_{2r} : $\|x\| \leq 2r$ ne soit pas G lui-même. Supposons la suite (u_n) dense, le disque D_r : $\|x\| \leq r$ contient alors une infinité de termes u_n de la suite. Soit alors B_n la suite de disques ainsi construite :

si $u_n \in D_r$, B_n est le disque $\|x-u_n\| \leq r$;

si $u_n \notin D_r$, B_n est un disque de centre u_n tel que

$$\mu(B_n) \leq \frac{a}{3^n} \quad \text{où} \quad a = \mu([D_{2r}]) .$$

La série $\sum \mu(B_n)$ est divergente, mais comme $B_n \subset D_{2r}$ si $u_n \in D_r$, on a

$$\mu((\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n) \cap [D_{2r}]) \leq \frac{a}{2} ,$$

donc

$$\mu([\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n]) \geq \frac{a}{2} .$$

Il est commode de décomposer la définition 1 de la façon suivante : soit $\sigma = (\varepsilon_n)$ une suite de nombres réels positifs, qui soient les mesures de disques de G, décroissante, et telle que la série $\Sigma\, \varepsilon_n$ soit divergente. Nous dirons que la suite (u_n) est eutaxique (resp. fortement eutaxique) relativement à la suite σ, si la condition $\lim_{N\to\infty} \nu(x;N) = +\infty$ (respectivement $\nu(x;N) \simeq \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n$) pour presque tout $x \in G$, est satisfaite pour toute suite de disques (B_n), de centres (u_n), de mesures (ε_n). (Il suffit qu'il en soit ainsi pour une suite de disques (B_n), de centres (u_n), de mesures (ε_n), car pour une autre telle suite (B'_n), l'ensemble des éléments appartenant à l'un des deux disques B_n, B'_n, sans appartenir à l'autre, est négligeable pour chaque n, et par suite pour presque tout x, l'ensemble des entiers n tels que $x \in B_n$, et l'ensemble des n tels que $x \in B'_n$ coïncident).

Ainsi, une suite est donc eutaxique, resp. fortement eutaxique, si elle est eutaxique, resp. fortement eutaxique, relativement à toute suite σ.

Cette notion de suite eutaxique, a été introduite par J. Lesca ([3]), puis renforcée par l'auteur ([5]). Un des premiers résultats, qui apparaisse comme un résultat d'eutaxie, est le théorème de Khintchine, selon lequel, si $(\varepsilon_q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de nombres réels positifs, telle que la suite $\sum_q \varepsilon_q$ soit divergente, alors presque tout nombre réel x admet une infinité d'approximations rationnelles $\frac{p}{q}$ (p et q entiers, $q > 0$) telles que :

$$(1) \qquad \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{\varepsilon_q}{q} .$$

Ce résultat a été renforcé plus récemment par P. Erdös ([1]) et W. Schmidt ([9]), qui montrent que le nombre $\nu(x;Q)$ de solutions $\frac{p}{q}$ de l'inéquation (1), avec $0<q\leq Q$, est équivalent à $\sum_{q=1}^{Q} \varepsilon_q$, pour presque tout x.

Des résultats du type suivant ont également été établis. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'applications d'un intervalle réel J dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et soit Φ l'application de J dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\Phi(\alpha) = (\varphi_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Alors pour certaines applications Φ, que nous décrivons ci-dessous, on a le résultat suivant : Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'intervalles de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, telle que la série $\sum_n \mu(I_n)$ soit divergente. Alors pour presque tout $\alpha \in J$, le nombre $\nu(\alpha;N)$ d'entiers n tels que $0<n\leq N$ et que $\varphi_n(\alpha)\in I_n$, est équivalent à $\sum_{n=1}^{N}\mu(I_n)$. Ceci a été établi, par exemple lorsque φ_n est l'application $\alpha\to P(n)\alpha$, P étant un polynôme à coefficients entiers, (J étant alors remplacé par $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$), ([10]), ou $\varphi_n(\alpha)=\alpha\,\theta^n \pmod{1}$, θ étant un nombre réel supérieur à 1, ([8]), ou encore $\varphi_n(\alpha)=\lambda\,\alpha^n \pmod{1}$ où $\lambda>0$ $(J=]1,+\infty[)$([5]).

Un tel résultat implique que <u>pour une suite</u> $\sigma=(\varepsilon_n)$ <u>donnée,</u> la suite $\Phi(\alpha)$ est fortement eutaxique, dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, <u>relativement à</u> σ, pour presque tout α. En effet, désignons par $\nu(\alpha;x;N)$ le nombre d'entiers n tels que $0<n\leq N$ et pour $|x-\varphi_n(\alpha)|\leq\varepsilon_n/2$ (où $x\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$). On a alors pour presque tout couple (α,x), $\nu(\alpha;x;N)\simeq\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n$, donc pour presque tout α, l'ensemble des x pour lesquels on a $\nu(\alpha;x;N)\simeq\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n$ est de mesure pleine. Mais cela n'entraîne pas que la suite $\Phi(\alpha)$ soit fortement eutaxique, ni même eutaxique, pour presque tout α. Ainsi, J. Lesca a caractérisé les éléments $\alpha\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ pour lesquels la suite $(n\,\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est eutaxique : ce sont les éléments dont la constante de Markov : $M(\alpha)=\limsup_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n\|n\,\alpha\|}$, soit finie, c'est-à-dire en fait presque aucun élément de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Nous avons cherché tout d'abord s'il existe des suites fortement eutaxiques dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Nous avons établi le résultat suivant :

THEOREME 1. <u>Soit</u> $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ <u>une suite d'éléments de</u> $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. <u>Supposons qu'il existe une suite croissante de nombres réels positifs,</u> (R_k), <u>tendant vers</u> $+\infty$, <u>et pour tout</u> k, <u>un recouvrement de</u> $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ <u>par une famille</u> $(J_k^i)_{1\leq i\leq H_k}$, <u>de</u> H_k <u>intervalles de mesure</u> $1/R_k$, <u>tels que les conditions suivantes soient vérifiées</u> :

(i) $H_k=R_k+O(1)$;

(ii) <u>soient, pour</u> M <u>et</u> N <u>entiers, tels que</u> $0\leq M<N$, $\pi(J_k^i,M,N)$ <u>le nombre d'entiers</u> n <u>tels que</u> $M<n\leq N$ <u>et que</u> $u_n\in J_k^i$. <u>Alors :</u>

$$\pi(J_k^i,M,N)\leq\frac{N-M}{R_k}+O(1)$$

<u>(uniformément par rapport à</u> M,N,k <u>et</u> i);

(iii) <u>la suite</u> R_{k+1}/R_k <u>est bornée</u>.

Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est fortement eutaxique. De façon plus précise, soit une suite d'intervalles I_n de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, de centres u_n, de mesures ε_n, telle que la suite (ε_n) soit décroissante, et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ divergente. Désignons, pour N entier positif, et $x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, par $\nu(x;N)$ le nombre d'entiers n tels que $0<n\leq N$ et que $x\in I_n$. Posons $S(N) = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n$. Pour presque tout x, on a l'estimation (relative à N) :

$$\nu(x;N) = S(N) + O\left((S(N))^{5/6}(\operatorname{Log} S(N))^{1+\varepsilon}\right)$$

quel que soit $\varepsilon > 0$.

Pour la démonstration de ce théorème, nous renvoyons le lecteur à [6].

Ce résultat fournit des exemples très simples de suites fortement eutaxiques. Par exemple, soit q un entier plus grand que 1, et soit (u_n) la suite d'éléments de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ définie de la façon suivante :

Si le développement q-adique de n est :

$$n = a_o + a_1 q + \dots + a_s q^s ,$$

alors

$$u_n = a_o q^{-1} + a_1 q^{-2} + \dots + a_s q^{-(s+1)} \qquad (\text{mod. } 1) .$$

La suite (u_n) est fortement eutaxique. On applique le théorème 1, avec comme intervalles J_k^i, les intervalles $\left[\frac{i}{q^k}, \frac{i+1}{q^k}\right[$ $(0\leq i<q^k)$.

Une application plus intéressante est l'étude de la suite $(n\alpha)$. Un travail de J. Lesca ([2], [4]) permet de voir que si I est un intervalle de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, de la forme $[\beta, \gamma[$ (*) de longueur $\|q_k\alpha\|$, où (q_k) est la suite des dénominateurs des réduites dans le développement en fraction continue de α, on a :

$$|\pi(I, M, N) - (N-M)\|q_k\alpha\|| < 2 .$$

(*) ($[\beta,\gamma[$ désigne l'invervalle de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ $0\leq\{x-\beta\}<\{\gamma-\beta\}$, la notation $\{x\}$ désignant le représentant de l'élément $x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, situé dans l'intervalle $[0,1[$).

On peut alors appliquer le théorème 1 , en recouvrant pour tout k , $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par une famille de $[\frac{1}{\|q_k\alpha\|}]+1$ intervalles de longueur $\|q_k\alpha\|$. La condition (iii) sera assurée si la <u>constante de Markov de</u> α <u>est finie.</u> Donc :

COROLLAIRE. <u>Si</u> $M(\alpha) < +\infty$, <u>la suite</u> $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ <u>est fortement eutaxique.</u>

Nous allons chercher maintenant des conditions pour qu'une suite ne soit pas eutaxique.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Soit N un entier positif. Désignons par $\lambda(u,N)$ le nombre d'entiers k tels que $0 \le k < N$ et que l'intervalle $[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}[$ contienne au moins un point $\{u_n\}$, avec $0 < n \le N$. On pose :

$$\lambda(u) = \liminf \frac{\lambda(u,N)}{N} .$$

Cette fonction $\lambda(.)$ est étroitement liée à la fonction $\ell(.)$ suivante. Soit

$$\ell(u,N) = \mu\Big(\bigcup_{1\le n\le N} I(u_n, \frac{1}{2N})\Big)$$

(où μ désigne la mesure de Haar de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et la notation $I(x,\varepsilon)$ l'intervalle fermé de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, de centre x et de rayon ε).

Posons

$$\ell(u) = \liminf \ell(u,N) .$$

On voit alors aisément que :

$$\frac{\ell(u)}{2} \le \lambda(u) \le 2\ell(u) .$$

Remarquons également que les fonctions λ et ℓ sont invariantes par l'endomorphisme T de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}^*}$: $u \to v$ où v est la suite définie par $v_n = u_{n+1}$ (Shift-endomorphism).

On a alors le résultat suivant :

THEOREME 2. <u>Si</u> $\lambda(u) = 0$, <u>la suite</u> u <u>n'est pas eutaxique.</u>

Preuve.- On peut construire, par récurrence, une suite croissante d'entiers positifs $(N_s)_{s\in \mathbb{N}^*}$, telle que, posant $M_s = \sum_{0<t\leq s} N_t$ (et $M_o = 0$), on ait pour tout $s \geq 0$:

$$\ell(T^{M_s}(u)\,,\, N_{s+1}) \leq \frac{1}{3^{s+1}}\ .$$

Soit (ε_n) la suite de nombres réels positifs ainsi définie : $\varepsilon_n = \frac{1}{2N_{s+1}}$ si $M_s < n \leq M_{s+1}$. Cette suite est décroissante, et la série $\Sigma\, \varepsilon_n$ est divergente, puisque $\sum_{M_s<n\leq M_{s+1}} \varepsilon_n = \frac{1}{2}$. Mais

$$\mu(\bigcup_{M_s<n\leq M_{s+1}} I(u_n\,,\,\varepsilon_n) \leq \frac{1}{3^{s+1}}\ ,$$

donc

$$\mu(\bigcup_{n\in \mathbb{N}^*} I(I_n\,,\,\varepsilon_n)) \leq \frac{1}{2}\ .$$

On voit d'ailleurs que l'ensemble des éléments $x\in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ appartenant à une infinité d'intervalles $I(u_n\,,\,\varepsilon_n)$, est négligeable.

La condition $\lambda(u) \neq 0$ n'est pas suffisante pour que la suite u soit eutaxique : il est facile de construire une suite non dense, telle que $\lambda(u) \neq 0$. Le théorème 2 ne permet pas de répondre à la question de savoir si presque aucune suite n'est eutaxique. En effet :

THEOREME 3. Soit π la mesure de Haar du groupe $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}^*}$. Pour π-presque toute suite, on a $\lambda(u) \geq \frac{1}{2}$.

Preuve.- Soit $\rho \in\,]0,1[$, soit N un entier positif, et soit $L_N(\rho)$ l'ensemble des suites u telles que $\lambda(u,N) \leq \rho N$. Posons $M = [\rho N]$, et $\rho_N = M/N$.

Soit K une partie à M éléments de l'intervalle entier $[1,N]$, et soit V_K l'ensemble des suites telles que $\{u_n\} \in \bigcup_{k\in K} [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}[$ pour tout n tel que $1\leq n\leq N$.

On a $\pi(V_K) = (\rho_N)^N$, et comme $L_N(\rho) = \bigcup_K V_K$

$$\pi(L_N(\rho)) \leq \binom{M}{N} (\rho_N)^N\ .$$

D'après la formule de Striling (!)

$$\binom{M}{N} (\rho_N)^N \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho(1-\rho)^N}} \left(\frac{\rho_N}{1-\rho_N}\right)^{(1-\rho_N)^N}$$

Ainsi, on voit que si $\rho < \frac{1}{2}$, la série $\Sigma\, \pi(L_N(\rho))$ est convergente, et il en résulte que $\lambda(u) \geq \rho$ pour π - presque toute suite. La démonstration s'achève en appliquant ce résultat à chaque terme ρ d'une suite d'éléments de $]0, \frac{1}{2}[$ tendant vers $1/2$.

Soit maintenant $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. Soit $a(x)$ la suite $(a_n x)_{n \in \mathbb{N}^*}$, modulo 1 . On peut se demander si $\lambda(a(x)) = 0$ pour presque tout x .

Dans le cas de la suite $a_n = n$, la réponse est fournie par le résultat suivant :

THEOREME 4. <u>Soit</u> $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, <u>et soit</u> $M(\alpha)$ <u>la constante de Markov de</u> α. <u>On a</u> :

$$\frac{1}{1 + [M(\alpha)]} \leq \lambda((n\alpha)) \leq 2\sqrt{\frac{2}{M(\alpha)}} \; .$$

<u>En particulier, pour que</u> $\lambda((n\alpha)) = 0$, <u>il faut et il suffit que</u> $M(\alpha) = +\infty$.

<u>Preuve.-</u> Soit $C > 0$, tel que l'inéquation $\|q\,\alpha\| \leq 1/C\,q$ n'ait qu'un nombre fini de solutions entières positives q . On a alors, pour N suffisamment grand, et pour tout couple (m, n) d'entiers tels que $0 < n < m \leq N$:

$$|n\,\alpha - m\alpha| > \frac{1}{CN} \; .$$

Soit $\nu(k, N)$ le nombre d'entiers n tels que

$$0 < n \leq N \quad \text{et que} \quad \{n\alpha\} \in [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}[$$

on a pour tout k , $\nu(k, N) < 1 + C$, donc aussi $\nu(k, N) \leq 1 + C_o$, où C_o est le plus grand entier inférieur à C . D'où $\lambda((n\alpha), N) \geq \frac{N}{1 + C_o}$, et par suite, $\lambda((n\alpha)) \geq \frac{1}{1+C_o}$.

Supposons mainteant que l'inéquation $\|q\,\alpha\| \leq 1/C\,q$ ait une infinité de solutions. Soit q une solution, posons $D = [\sqrt{2C}]+1$ et $N = D\,q$. Pour n , entier tel que $0 < n \leq N$, soit la division de n par q : $n = h\,q + r$ $(0 < r \leq q)$; on a $0 \leq h < D$. Pour r donné, tous les points $n\alpha$, où $0 < n \leq N$ et $n \equiv r \pmod q$ appartiennent à un même intervalle I_r de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, de longueur au plus $\frac{D-1}{Cq}$, et le nombre d'intervalles $[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}[$ rencontrant $\{I_r\}$ est au plus $[\frac{D-1}{Cq}]N+2$. D'où

$$\lambda((n\alpha), N) \le q\left(\frac{D-1}{C}N+2\right) \le 2\sqrt{\frac{2}{C}}\ N .$$

On voit en particulier que l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tels que $\lambda((n\alpha)) = 0$ est l'ensemble des éléments de constante de Markov infinie, et est donc de mesure pleine.

On retrouve, comme corollaire, le résultat de J. Lesca d'après lequel, lorsque $M(\alpha) = +\infty$, la suite $(n\alpha)$ n'est pas eutaxique.

Par contre, si la suite (a_n) croît suffisamment vite, on a $\lambda(a(x)) > 0$ pour presque tout x :

THEOREME 5. Soit a_n une suite de nombres réels positifs, telle que la série $\Sigma\, a_n/a_{n+1}$ soit convergente. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda(a(x)) > 0$.

Nous ne connaissons pas de résultat intermédiaire entre ceux du théorème 4 et du théorème 5 . Nous conjecturons que si $a_n = f(n)$ où f est un polynôme, on ait $\lambda(a(x)) = 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. La suite $a(x)$ ne serait alors eutaxique pour presque aucun x .

Nous conjecturons d'autre part que presque aucune suite ne serait eutaxique.

Le problème de généraliser, à plusieurs dimensions, les résultats d'eutaxie sur la suite $(n\alpha)$, reste ouvert.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] ERDÖS P. - Some results on diophantine approximation. Acta Arith. 5 (1959), p. 359-369.

[2] LESCA J. - Sur la répartition mod. 1 des suites $(n\alpha)$. Séminaire Delange-Pisot-Poitou (1966-67) n° 2, Paris.

[3] LESCA J. - Sur les approximations diophantiennes à une dimension. Thèse Sc. math., Grenoble, (1968).

[4] LESCA J. - Sur la répartition modulo 1 de la suite $(n\alpha)$. Acta Arith. 20 (n° 4) (1972), (à paraître).

[5] de MATHAN B. - Approximations diophantiennes dans un corps local. Bull. Soc. math. France, mémoire 21, (1970), 93 pages.

[6] de MATHAN B. - Un problème métrique d'approximation diophantienne. Bull. Soc. Math. France, 99, 1971, p. 269-385.

[7] de MATHAN B. - Un critère de non eutaxie. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 273, (1971) A, p. 433-436.

[8] PHILIPP W. - Some metrical theorems in number theory. Pacific J. Math. 20, 1, (1967), p. 109-127.

[9] SCHMIDT W. - A metrical theorem in diophantine approximation. Canad. J. Math. 12 (1960) p. 619-631.

[10] SCHMIDT W. - Metrical theorems on fractionnal parts of sequences. Trans. Amer. Math. Soc. 110, 3 (1964), p. 493-518.

-:-:-:-

Bernard de MATHAN
U. E. R. de Mathématiques
et d' Informatique
Université de Bordeaux 1
351,cours de la Libération
33 - T A L E N C E