Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux

PIERRE DAMEY

Extensions quaternioniennes d'un corps de caractéristique différente de 2

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1970-1971), exp. n° 3, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971____A3_0>

EXTENSIONS QUATERNIONIENNES D'UN CORPS DE CARACTERISTIQUE DIFFERENTE DE 2

par

Pierre DAMEY

-:-:-:-

§. I. - DEFINITION DES GROUPES O_q ET D_q

Si $q = 2^{n-1}$ est une puissance de 2 , on définit les groupes diédraux D_q et quaternioniens généralisés O_q par 2 générateurs et les relations :

$$D_q \ : \ \tau^2 = 1 \ , \ \sigma^q = 1 \ , \ \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$$

$$O_q \ : \ \tau^2 = \sigma^{q/2} \ , \ \sigma^q = 1 \quad \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1} \ .$$

§. II. - EXTENSIONS QUATERNIONIENNES

Soit $k = \varkappa(\sqrt{m})$ une extension quadratique d'un corps $\varkappa$ de caractéristique différente de 2 . Peut-on trouver une extension N cyclique de degré $q = 2^{n-1}$ sur k , galoisienne sur $\varkappa$, à groupe de Galois isomorphe à l'un des 2 groupes O_q ou D_q ?

On dira que l'on a plongé k dans une extension quaternionienne (ou diédrale).

PROPRIETE. - Si N (resp. N') est une extension quaternionienne (resp. diédrale) de $\varkappa$, cyclique sur k, de degré 2^n (resp. $2^{n'}$) sur $\varkappa$ avec $n < n'$, alors quel que soit m tel que $n \leq m \leq n'$, le composé $N(N')$ contient une extension quaternionienne de degré 2^m, cyclique sur k.

Pour la démontrer, il suffit de considérer le groupe $\mathrm{Gal}(N(N')/\varkappa)$.

§. III. - EXISTENCE ET CONSTURCTION DANS LE CAS OU LE CORPS $\varkappa$ CONTIENT LES RACINES q-ième DE L'UNITE

Une étude simple conduit au théorème suivant :

THEOREME. - Soit $k = \varkappa(\sqrt{m})$ une extension quadratique de $\varkappa$, le corps $N = k(\sqrt[q]{\alpha})$ est une extension diédrale (resp. quaternionienne) sur $\varkappa$, si et seulement si $N_{k|\varkappa}(\alpha) = a^q$ (resp. $N_{k|\varkappa}(\alpha) = m^{q/2}\, a^q$) où $a \in \varkappa^*$ et $\alpha \notin k^2$.

L'utilisation du théorème 90 montre que l'on a alors

$$\alpha = a^{q/2}\, \frac{\mu}{\mu^\tau} \quad (\text{resp. } \alpha = m^{q/4}\, a^{q/2}\, \frac{\mu}{\mu^\tau})$$

où $\mu \in k$ et τ désigne le $\varkappa$-automorphisme de k autre que l'identité.

On en déduit le théorème d'existence :

Le corps $k = \varkappa(\sqrt{m})$ se plonge dans une extension quaternionienne (resp. diédrale) si et seulement si il existe $\mu \in k$ de norme non carré dans k.

Exemple : $\varkappa = \mathbb{C}(t)$ (où $\varkappa = E(t)$ avec E algébriquement clos).

On peut montrer que :

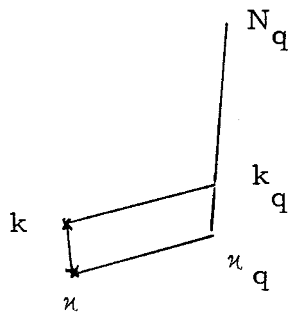
PROPRIETE. - $\forall m \in \mathbb{C}(t) - (\mathbb{C}(t))^2$, $N(k^*)/\varkappa^{*2}$ est un groupe infini.

Ce résultat implique que toute extension k quadratique de $\varkappa$ se plonge dans une infinité d'extensions quaternioniennes linéairement disjointe sur k .

§. IV. - IDEE DE LA METHODE DANS LE CAS GENERAL

Notation : si L désigne un corps, L_q désigne le corps obtenu par adjonction à L des racines q-ièmes de l'unité.

On utilise le diagramme suivant :



On cherche une extension N_q cyclique sur k_q quaternionienne sur $\varkappa_q$, contenant une extension quaternionienne sur $\varkappa$ et cyclique sur k .

Exemple : Dans le cas $k \cap x_q = \varkappa$, on cherche $\alpha \in k_q$ tel que l'extension $N_q = k_q(\sqrt[q]{\alpha})$ soit galoisienne sur $\varkappa$ avec $\mathrm{Gal}(N_q/\varkappa)$ isomorphe au produit direct $\mathrm{Gal}(\varkappa_q/\varkappa)$ par O_q .

§. V. - CAS PARTICULIER $\varkappa = \mathbb{Q}_p$

a) $p \equiv 1 \pmod 4$

$\mathbb{Q}_p$ ne se plonge pas dans une extension quaternionienne de degré 8 sur $\mathbb{Q}_p$. En effet, pour toute extension quadratique k de $\mathbb{Q}_p$ on a $N(k) \subset k^2$. Il en résulte qu'il n'y a pas d'extension quaternionienne ni dièdrale sur $\mathbb{Q}_p$.

b) $p \equiv -1 \pmod 4$

On montre que nécessairement $k = \mathbb{Q}_p(\sqrt{-1})$ et de plus :

$\mathbb{Q}_p(\sqrt{-1})$ ne se plonge dans une extension quaternionienne ou dièdrale de degré $2q$ sur $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si $p \equiv 1 \pmod q$.

c) $p = 2$

On a le résultat suivant :

Si $k \neq \mathbb{Q}_2(\sqrt{-1})$, k se plonge dans des extensions dièdrales (resp. quaternioniennes) de degré 8 et 16 sur $\mathbb{Q}_2$.

Si $k = \mathbb{Q}_2(\sqrt{-1})$, k se plonge dans des extensions quaternioniennes de degré 16, mais pas de degré 8, sur $\mathbb{Q}_2$.

Remarque : En utilisant la localisation (i. e. en complétant par rapport à une valeur absolue), on en déduit des résultats pour le cas $x = \mathbb{Q}$:

Le corps $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ne se plonge pas dans une extension quaternionienne de degré 8 sur $\mathbb{Q}$ si m est négatif ou si $m \equiv -1 \pmod 8$.

Pour le voir il suffit de compléter soit par rapport à la valeur absolue usuelle, soit par rapport à la valuation 2-adique.

-:-:-:-

REFERENCES

P. DAMEY et J. J. PAYAN. - J. Reine angew. Math. Bd 244, 1970, S. 37-54.

P. DAMEY. - C.R.A.S., t. 269, p. 503-506.

-:-:-:-

Pierre DAMEY
U.E.R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université de Bordeaux 1
351, cours de la Libération
33 - TALENCE