SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

DIDIER NORDON

Points rationnels de la cubique $y^2 = x^3 - Ax - B$ dans les corps p-adiques

Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1970-1971), exp. n° 4, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=STNB_1970-1971____A4_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
Année 1970-1971 , exposé n° 6

24 Novembre 1970

POINTS RATIONNELS DE LA CUBIQUE $y^2 = x^3 - Ax - B$ DANS LES CORPS $\mathfrak{P}$-ADIQUES

par

Didier NORDON

-:-:-:-

Cet exposé est une reproduction à peine modifiée d'une partie d'un article de Mle Elisabeth Lutz [sur l'équation $y^2 = x^3 - Ax - B$ dans les corps $\mathfrak{P}$-adiques, J. Reine angew. Math., 1937, n° 177].

Soit k un corps. A toute courbe algébrique définie sur k (c'est-à-dire dont l'équation est à coefficients dans k) on associe un entier positif, son genre. On appelle courbe elliptique définie sur k une courbe projective, sans point multiple, de genre 1, définie sur k et ayant au moins un point à coordonnées dans k. On montre qu'une telle courbe est isomorphe (en un sens qu'on peut préciser) à une cubique sans point multiple admettant le point à l'infini sur Oy comme point d'inflexion, la droite de l'infini étant tangente d'inflexion. Si la caractéristique de k est différente de 2 et de 3, en changeant de coordonnées on peut donner à une telle cubique une équation de la forme

$$y^2 = x^3 - Ax - B \quad , \quad A, B \in k \quad , \quad \Delta = 4A^3 - 27B^2 \neq 0 .$$

On appelle point rationnel d'une courbe définie sur k tout point de la courbe dont les coordonnées sont dans k, ou bien le point à l'infini de la courbe.

On sait (nous le verrons plus loin) que l'ensemble des points rationnels d'une cubique de genre 1 , $y^2 = x^3 - Ax - B$, $A, B \in k$, $\Delta \neq 0$ peut être muni d'une structure de groupe abélien, qu'on notera G .

OBJET DE L'EXPOSE

Il s'agit d'étudier le groupe des points rationnels d'une telle cubique et plus spécialement d'en rechercher les points d'ordre fini dans le cas où le corps k est un corps $\mathfrak{P}$-adique, $k_{\mathfrak{P}}$.

Un corps $\mathfrak{P}$-adique est une extension d'un corps p-adique usuel ($p \in Z$, p premier). Si $[k_{\mathfrak{P}} : k_p] = d$, on a $d = ef$ où e est l'indice de ramification de p dans $k_{\mathfrak{P}}$ et où $N(\mathfrak{P}) = p^f$. On désignera par π une uniformisante : $\mathfrak{P} = (\pi)$ et par φ la valuation $\mathfrak{P}$-adique dans $k_{\mathfrak{P}}$ déterminée par exemple par la condition $\varphi(\pi) = w < 1$. Le corps résiduel d'un tel corps est fini.

LE GROUPE G DES POINTS RATIONNELS

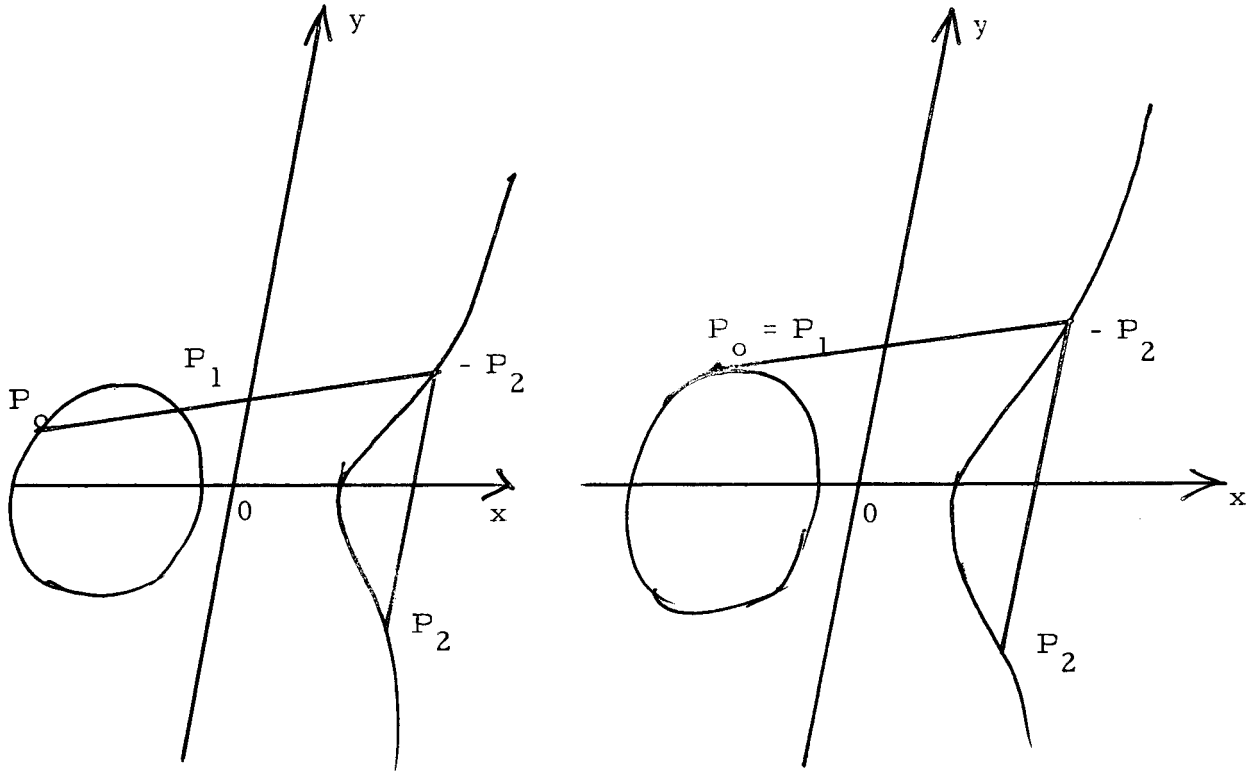
Soit la cubique de genre 1 , $y^2 = x^3 - Ax - B$, A et B entiers de $k_{\mathfrak{P}}$, $\Delta \neq 0$. A deux points rationnels $P_o(x_o, y_o)$ et $P_1(x_1, y_1)$ on fait correspondre le point $P_2(x_2, y_2)$ symétrique par rapport à Ox du troisième point d'intersection de la droite $P_o P_1$ avec la cubique et on écrit $P_2 = P_o + P_1$. On trouve facilement les coordonnées de P_2 en fonction de celles de P_o et P_1 ; en particulier

$$x_2 = \left(\frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o}\right)^2 - (x_1 + x_o)$$

Si P_1 et P_o sont confondus, on prend au lieu de la droite $P_o P_1$ la tangente en P_o à la cubique et on écrit $2P_o = P_2$ avec

$$x_2 = \left(\frac{3x_o^2 - A}{2y_o}\right)^2 - 2x_o .$$

Le point $-P_o$ est le point de coordonnées $(x_o, -y_o)$ et le point à l'infini de la courbe étant considéré comme point rationnel est l'unité du groupe G .



L'ENTIER n(P)

LEMME 1. Tout point rationnel P sur la courbe a des coordonnées de la forme $(\xi \pi^{-2n}, \eta \pi^{-3n})$ où $n \in \mathbb{N}$, ξ et η sont des entiers de $k_\wp$, premiers à $\wp$ si $n > 0$.

Démonstration. Soit P (x, y) un point rationnel. Si x est un entier $\wp$-adique, y l'est aussi. Si $\varphi(x) > 1$

$$\varphi(x^3) = [\varphi(x)]^3 > \varphi(A\,x) \quad \text{et} \quad \varphi(x^3) > \varphi(B)\,,$$

$$\text{donc} \qquad \varphi(y^2) = \varphi(x^3 - A\,x - B) = \varphi(x^3)\ ;$$

en ce point, nous avons donc

$$\varphi(x) = w^{-2n}\,, \quad \varphi(y) = w^{-3n}\,, \quad n > 0\,,$$

de sorte que les coordonnées (x, y) sont bien de la forme

$$x = \xi\,\pi^{-2n}\,, \quad y = \eta\pi^{-3n}$$

avec ξ et η entiers premiers à $\wp$; ξ et η satisfont l'équation $\eta^2 = \xi^3 - A\xi\pi^{4n} - B\,\pi^{6n}$.

A tout point P correspond ainsi un entier $n \geq 0$ qu'on désignera par $n(P)$; si P est le point à l'infini, on pose $n(P) = \infty$.

POINTS TELS QUE $n(P) \geq m$

Soit m un entier > 0 quelconque. Alors :

THEOREME 1. *Les points P pour lesquels $n(P) \geq m$ forment un sous-groupe G_m de G, d'indice fini dans G.*

Démontrons d'abord le lemme 2

LEMME 2. *Soient deux points rationnels P_o et P_1, et $P_2 = P_o + P_1$. Alors $n(P_2) \geq \min[n(P_o), n(P_1)]$.*

Démonstration. Distinguons deux cas

1er cas - $n(P_1) > n(P_o)$, donc $n(P_1) > 0$. Ecrivons la formule d'addition sous la forme

$$x_2 = \frac{x_o x_1^2 + x_o^2 x_1 - A(x_o + x_1) - 2B - 2y_o y_1}{(x_o - x_1)^2} ,$$

d'où

$$\varphi(x_2) = \frac{\varphi(x_1^2 x_o)}{\varphi(x_1^2)} = \varphi(x_o)$$

et par suite

$$n(P_o + P_1) = \min[n(P_o), n(P_1)] \quad \text{si} \quad n(P_o) \neq n(P_1) .$$

Nous aurions de même

$$n(P_o - P_1) = \min[n(P_o), n(P_1)] \quad \text{si} \quad n(P_o) \neq n(P_1) .$$

2ème cas - $n(P_1) = n(P_o)$; écrivons $P_o = P_2 - P_1$; si $n(P_2) \neq n(P_1)$, on a

$$n(P_o) = \min[n(P_2), n(P_1)] ,$$

donc $n(P_2) \geq n(P_o)$.

On a donc dans tous les cas

$$n(P_2) \geq \min[n(P_o), n(P_1)] .$$

De ce lemme résulte évidemment la première partie du théorème 1 : G_m est un sous-groupe de G.

Pour en démontrer la seconde partie, nous devons examiner à quelles conditions deux points P_o , P_1 de G doivent satisfaire pour que $P_1 - P_o$ soit dans G_m , c'est-à-dire pour que $n(P_1 - P_o) \geq m$; nous pouvons supposer que ni P_o ni P_1 ne sont dans G_m ; alors, on doit avoir, tout d'abord, $n(P_o) = n(P_1) = n < m$. Soient $(\xi_o \pi^{-2n}, \eta_o \pi^{-3n})$ et $(\xi_1 \pi^{-2n}, \eta_1 \pi^{-3n})$ les coordonnées de P_o et P_1 ,

$$\eta_o^2 = \xi_o^3 - A\,\xi_o\,\pi^{4n} - B\,\pi^{6n} ,$$
$$\eta_1^2 = \xi_1^3 - A\,\xi_1\,\pi^{4n} - B\,\pi^{6n} .$$

Il est clair, d'après la formule d'addition, que la condition nécessaire et suffisante pour que $n(P_1 - P_o) \geq m$, si $n(P_o) = n(P_1) < m$ est

$$\frac{x_1 - x_o}{y_1 + y_o} \equiv 0 \pmod{\wp^m}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\xi_1 - \xi_o}{\eta_1 - \eta_o} \equiv 0 \pmod{\wp^{m-n}} .$$

Or on a

$$\frac{\xi_1 - \xi_o}{\eta_1 + \eta_o} = \frac{\eta_1 - \eta_o}{\xi_o^2 + \xi_o \xi_1 + \xi_1^2 - A\,\pi^{4n}} .$$

Une condition nécessaire pour que $n(P_1 - P_o) \geq m$ est donc

$$\xi_1 \equiv \xi_o \quad , \quad \eta_1 \equiv \eta_o \pmod{\wp^{m-n}} .$$

Cela est même suffisant si $n > 0$ car alors

$$\eta_1 + \eta_o \equiv 2\eta_o \not\equiv 0 \pmod{\wp} \quad \text{si} \quad p \neq 2 ,$$

et

$$\xi_o^2 + \xi_o \xi_1 + \xi_1^2 - A\pi^{4n} \equiv 3\xi_o^2 \not\equiv 0 \pmod{\wp} \quad \text{si} \quad p \neq 3 .$$

On en déduit que $\frac{G_{m-1}}{G_m}$ est un groupe fini si $m > 1$, donc que G_m est d'indice fini dans G_1 .

Il reste à montrer que $\frac{G}{G_1}$ est fini. Cela est une conséquence immédiate du lemme suivant :

LEMME 3. Soit $\wp^R$ la plus haute puissance de $\wp$ qui divise $2(4A^3 - 27B^2)$. Soient P_o et P_1 tels que $n(P_o) = n(P_1) = 0$; alors

$$\begin{cases} r > R \\ \xi_1 \equiv \xi_o \pmod{\wp^{r+m}} \\ \eta_1 \equiv \eta_o \pmod{\wp^{r+m}} \end{cases} \Rightarrow n(P_1 - P_o) \geq m .$$

Démonstration. Supposons en effet

$$n(P_1 - P_o) < m$$

$$\xi_1 \equiv \xi_o \pmod{\wp^{r+m}}$$

$$\eta_1 \equiv \eta_o \pmod{\wp^{r+m}} .$$

On a, d'après ce qui précède

$$\eta_1 + \eta_o \equiv 0 \quad \text{et} \quad \xi_o^2 + \xi_o \xi_1 + \xi_1^2 - A \equiv 0 \pmod{\wp^r} .$$

On en déduit

$$2\eta_o \equiv 0 \quad \text{et} \quad 3\xi_o^2 - A \equiv 0 \pmod{\wp^r} .$$

Mais on a l'identité

$$4A^3 - 27B^2 = (x^3 - Ax - B) \cdot P(x) + (3x^2 - A) \cdot Q(x)$$

où $$P(x) = -18Ax + 27B \quad \text{et} \quad Q(x) = 6Ax^2 - 9Bx - 4A^2$$

sont des polynômes à coefficients entiers ; en y faisant $x = \xi_o$, on voit donc que

$$2(4A^3 - 27B^2) \equiv 0 \pmod{\wp^r} .$$

Comme on a supposé $4A^3 - 27B^2 \neq 0$, cette dernière congruence entraîne bien $r \leq R$.

Ceci achève la démonstration du théorème 1.

PARAMETRE DE LA COURBE

Nous utilisons le paramétrage suivant

$$x = \frac{1}{t^2} , \qquad y = \frac{\varepsilon(t)}{t^3}$$

où $\varepsilon(t)$ est défini par

$$\varepsilon(t) = (1 - At^4 - Bt^6)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \gamma_\nu t^{2\nu}$$

avec $\gamma_2 = -\frac{A}{2}$, $\gamma_3 = -\frac{B}{2}$, etc . Il est clair que si $t \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^m}$ et si la série $\varepsilon(t)$ est convergente, les formules ci-dessus définissent un point P de la courbe, et que ce point appartient à G_m .

Or on sait que dans la série

$$(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 - \ldots$$

les dénominateurs des coefficients ne contiennent pas d'autre facteur premier que 2 , et que le dénominateur du coefficient de u^ν divise $2^{2\nu}$. Il en résulte que

si $p \neq 2$, la série $\varepsilon(t)$ converge dès que $t \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$

si $p = 2$, la série $\varepsilon(t)$ converge dès que $t \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^\mu}$,

μ étant le plus petit entier plus grand que $\frac{e}{2}$; posons $\mu = 1$ pour $p \neq 2$ de sorte que, dans tous les cas, les formules ci-dessus définissent pour $t \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^\mu}$, un point de G_μ .

Réciproquement, tout point P de G_μ correspond ainsi à une valeur de t , définie par les formules

$$t = \frac{x}{y}\varepsilon$$

$$\varepsilon = (1 - \frac{A}{x^2} - \frac{B}{x^3})^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_2^\infty \gamma_\nu x^{-\nu}$$

la série étant convergente pourvu que P appartienne à G_μ .

Ce paramètre met en évidence le nombre n(P) défini plus haut ; en effet, n(P) est l'exposant de l'uniformisante π dans la décomposition de t

$$\varphi(t) = n(P) \cdot \varphi(\pi)$$

(φ , rappelons-le, est la valuation $\mathfrak{P}$-adique).

Notation - Dans toute la suite, nous désignons par α le plus petit entier plus grand que $\frac{e}{4}$ dans le cas $p \neq 2$, et nous posons $\alpha = e$ dans le cas $p = 2$.

STRUCTURE DE G_α

Soient P_o et P_1 deux points de G_μ , de paramètres respectifs t_o et t_1 ; posons $\varepsilon_o = \varepsilon(t_o)$, $\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1)$ et calculons le paramètre t_2 du point $P_2 = P_o + P_1$ en fonction de t_o et t_1 .

Posons

$$\theta = \sum_{\nu=2}^{\infty} \gamma_\nu \frac{t_1^{2\nu-3} - t_o^{2\nu-3}}{t_1 - t_o} .$$

Alors

$$\frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o} = \frac{\varepsilon_1 t_o^3 - \varepsilon_o t_1^3}{t_o t_1 (t_o^2 - t_1^2)} = \frac{t_o^3 - t_1^3 + t_o^3 t_1^3 \sum_{\nu=2}^{\infty} \gamma_\nu (t_1^{2\nu-3} - t_o^{2\nu-3})}{t_o t_1 (t_o^2 - t_1^2)}$$

$$= \frac{t_o^2 + t_o t_1 + t_1^2 - t_o^3 t_1^3 \theta}{t_o t_1 (t_o + t_1)} .$$

La formule d'addition pour x s'écrit alors

$$x_2 = \frac{1}{t_2^2} = \frac{1}{(t_o + t_1)^2} \left[1 - 2 t_o t_1 (t_o^2 + t_o t_1 + t_1^2) \theta + t_o^4 t_1^4 \theta^2 \right] .$$

L'ambiguité de signe pour t_2 se lève en considérant y_2 ; d'où

$$\frac{t_2}{t_o + t_1} = \left[1 - 2 t_o t_1 (t_o^2 + t_o t_1 + t_1^2) \theta + t_o^4 t_1^4 \theta^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

le second membre représentant le développement en série qui lui correspond au moyen de la formule du binôme, pourvu que ce développement soit convergent ; il en est évidemment ainsi pour $p \neq 2$ car alors θ est entier.

PROPOSITION. G_α est un module sur l'anneau des entiers p-adiques.

Démonstration. Nous allons démontrer la proposition dans le cas $p \neq 2$.

Supposons $n(P_o) \leq n(P_1)$; alors

$$\frac{t_2}{t_o + t_1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{3n(P_o)+n(P_1)}} .$$

Si P_o et P_1 appartiennent tous deux à G_m , on a donc, a fortiori,

$$t_2 \equiv t_o + t_1 \pmod{\mathfrak{p}^{5m}}$$

et en particulier par récurrence sur ℓ

$$t(\ell P_o) \equiv \ell\, t(P_o) \pmod{\mathfrak{p}^{5m}}$$

d'où, pour $\ell = p$ et en posant $n(P_o) = n$

$$\frac{t(p\,P_o)}{p\,t(P_o)} \equiv 1 \pmod{\wp^{4n-e}}$$

et par récurrence sur ν

$$\frac{t(p^\nu P_o)}{p^\nu\, t(P_o)} \equiv 1 \pmod{\wp^{4n-e}}$$

donc, enfin, en combinant les résultats ci-dessus

$$\frac{t(\ell\, P_o)}{\ell\, t(P_o)} \equiv 1 \pmod{\wp^{4n-e}}$$

quel que soit ℓ . En particulier, si $4n > e$ et si p^ν est la plus haute puissance de p contenue dans ℓ

$$n(\ell\, P_o) = n(P_o) + \nu\, e\ .$$

De ce qui précède résulte que si P_o appartient à G_α , et si la suite d'entiers ordinaires ℓ_i converge p-adiquement vers un entier p-adique L , les nombres $t(\ell_i P_o)$ convergent p-adiquement vers une certaine valeur de t : le point de la courbe qui correspond à celle-ci est désigné par LP et on voit ainsi que G_α est un module sur l'anneau des entiers p-adiques.

Dans le cas où $p = 2$, on a des résultats un peu moins précis. Supposons que P_o et P_1 appartiennent à G_m avec $m \geq e$; alors $t_2 \equiv t_o + t_1 \pmod{\wp^{5m-2e}}$.

D'où successivement

$$t(\ell\, P_o) \equiv \ell\, t(P_o) \pmod{\wp^{5m-2e}}$$

$$\frac{t(2\,P_o)}{2t(P_o)} \equiv 1 \pmod{\wp^{4n(P_o)-3e}}$$

$$\frac{t(\ell\, P_o)}{\ell\, t(P_o)} \equiv 1 \pmod{\wp^{4n(P_o)-3e}}$$

et si 2^ν est la plus grande puissance de 2 qui divise ℓ

$$n(\ell\, P_o) = n(P_o) + \nu\, e \qquad \text{pour } n(P_o) \geq e\ .$$

D'où, dans ce cas aussi, la proposition.

STRUCTURE DE G_β

Désignons par β un entier $\geq \alpha$. On a alors le théorème suivant :

THEOREME 2. G_β est isomorphe au groupe additif des entiers $\wp$-adiques.

Démonstration. Il suffit de montrer que G_β possède une base de $d = ef$ éléments sur l'anneau des entiers p-adiques.

Soit donc $t_1^{(\rho)} \ldots t_f^{(\rho)}$ une base de $\dfrac{\wp^{\beta+\rho}}{\wp^{\beta+\rho+1}}$ $(\rho = 0, 1, \ldots, e-1)$, on a $t_i^{(\rho)} \equiv 0 \pmod{\wp^{\beta+\rho}}$ $(i = 1, \ldots, f)$.

Soient $P_i^{(\rho)}$ les points correspondant à ces ef valeurs de t ; soit $t_i^{(\rho+\nu e)}$ la valeur du paramètre t qui correspond au point $P_i^{(\rho+\nu e)} = p^\nu P_i^{(\rho)}$. Soit P_o un point quelconque de G_β, et t_o son paramètre ; il existe des entiers $n_i^{(o)}$, bien déterminés mod. p, tels que

$$t_o \equiv \sum_i n_i^{(o)} t_i^{(o)} \pmod{\wp^{\beta+1}} ;$$

le point $P_1 = P_o - \sum_{i=1}^{f} n_i^{(o)} P_i^{(o)}$ appartient à $G_{\beta+1}$; soit t_1 le paramètre de P_1 ; il existe des entiers $n_i^{(1)}$, bien déterminés modulo p tels que

$$t_1 \equiv \sum_i n_i^{(1)} t_i^{(1)} \pmod{\wp^{\beta+2}} ;$$

en continuant ainsi, on voit que le point

$$P_n = P_o - \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_i n_i^{(\nu)} P_i^{(\nu)}$$

appartient à $G_{\beta+n}$; d'où

$$P_o = \sum_{\rho=0}^{e-1} \sum_{i=1}^{f} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} n_i^{(\rho+\nu e)} p^\nu \right) P_i^{(\rho)}$$

expression unique de P_o en fonction des ef points $P_i^{(\rho)}$.

COROLLAIRE. Un point P de G_β ne peut être d'ordre fini dans G ; en particulier, si $e = 1$, un point d'ordre fini dans G est à coordonnées entières.

CAS DE $\mathbb{Q}$

Etudions les points à coordonnées dans $\mathbb{Q}$ de la cubique $y^2 = x^3 - Ax - B$ $(A, B \in Z)$. Ils forment un groupe qui est contenu dans le groupe des solutions p-adiques de la même équation, et cela pour tout p. Un point à coordonnées rationnelles ne peut être d'ordre fini que si x et y sont entiers dans tout corps p-adique, c'est-à-dire s'ils appartiennent à Z. La détermination effective de ces points est fournie par le théorème suivant.

THEOREME 3. Soit $y^2 = x^3 - Ax - B$ une cubique de genre 1, $A, B \in Z$. Tout point $P(x, y)$ à coordonnées rationnelles d'ordre fini dans le groupe des points rationnels sur la cubique est à coordonnées entières et tel que y^2 soit égal à 0 ou à un diviseur de $4A^3 - 27B^2$.

Démonstration. Le début a déjà été vu. Voyons le second point. Si P est d'ordre fini, il en est de même de 2P, qui doit donc être aussi à coordonnées entières, s'il n'est à l'infini ; ce dernier cas se présente si $y = 0$; s'il n'en est pas ainsi il est à coordonnées entières si et seulement si

$$3x^2 - A \equiv 0 \pmod{2y}.$$

Or

$$(3x^2 - A)^2 (3x^2 - 4A) \equiv -4A^3 + 27B^2 \pmod{x^3 - Ax - B}$$

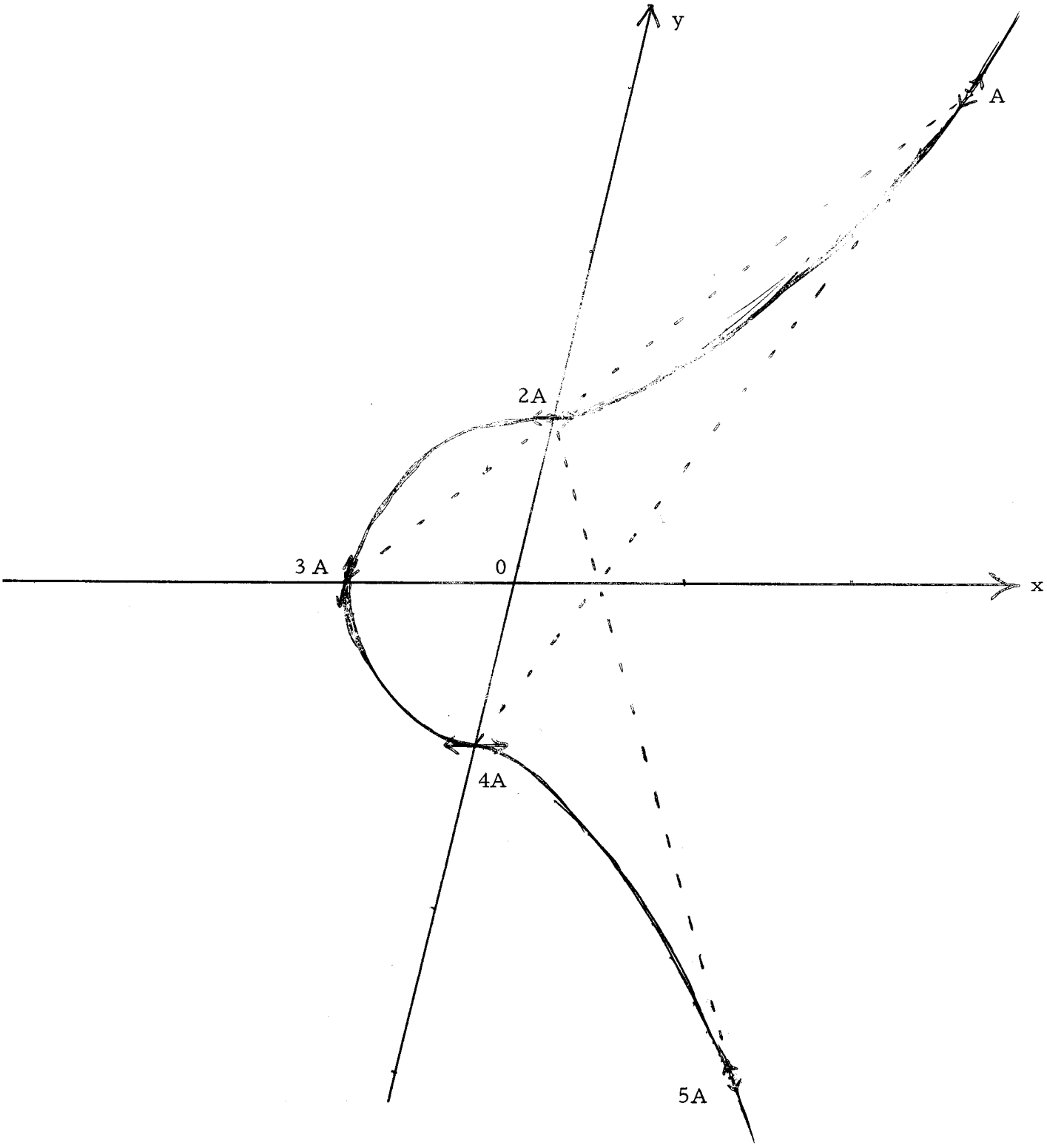
et par conséquent, dans le cas présent

$$-4A^3 + 27B^2 \equiv 0 \pmod{y^2}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exemple : points rationnels d'ordre fini sur la cubique $y^2 = x^3 + 1$.

Dans ce cas, $\Delta = 27$ et les seuls points rationnels d'ordre fini ont une ordonnée égale à $0, \pm 1, \pm 3$. D'où le groupe des points d'ordre fini, qui a 6 éléments. Le point A est d'ordre 6.



Didier NORDON
U. E. R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université de Bordeaux 1
351, cours de la Libération
33 - TALENCE