Séminaire de théorie des nombres de Grenoble

Jean-René Joly

Petite analyse de Fourier et évaluation de $L(1,\chi)$ paquet par paquet

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 5 (1975-1977), exp. nº 1, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=STNG_1975-1977__5__A1_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
8 et 15 avril 1976
Grenoble

PETITE ANALYSE DE FOURIER ET EVALUATION DE $L(1,\chi)$ PAQUET PAR PAQUET

par

Jean René JOLY

§1 - INTRODUCTION.

Soit χ un caractère réel primitif modulo $k>1$, et posons

(1) $$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^{-s} \ ;$$

(2) $$M(\chi) = \max_{x\geq 1} \Big| \sum_{n\leq x} \chi(n)\Big| \ ;$$

(3) $$\tau(\chi,a) = \sum_{n=1}^{k-1} \chi(n)e^{2\pi ian/k} \quad \text{(a, entier relatif)} \ ;$$

(4) $$\tau(\chi) = \tau(\chi,1) = \sum_{n=1}^{k-1} \chi(n)e^{2\pi in/k} \ ;$$

(5) $$K = K_\chi = \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \ , \text{ avec } \ d = \chi(-1)k \ .$$

On sait que le corps quadratique K a pour discriminant d , pour caractère χ', pour fonction zêta le produit $\zeta(s)L(s,\chi)$, et que par conséquent

$$L(1,\chi) = \begin{cases} 2Rh/k^{1/2} & \text{si } \chi(-1) = 1 \ , \\ 2\pi h/wk^{1/2} & \text{si } \chi(-1) = -1 \ , \end{cases}$$

R désignant le régulateur, h le nombre de classes et w le nombre de racines de l'unité de K (voir [6] , chap.6). De là

(6) $$L(1,\chi) > 1/3k^{1/2} \quad ,$$

et en particulier

(7) $$L(1,\chi) > 0 \ .$$

Si on écrit la série $L(1,\chi)$ pour un caractère χ particulier de module k assez petit, l'inégalité (7) semble évidente ; la série $L(1,\chi)$ peut en effet s'écrire

(8) $$L(1,\chi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu \quad ,$$

avec

(9) $$L_\nu = L_\nu(1,\chi) = \sum_{\nu k+1}^{\nu(k+1)} \chi(n)n^{-1} \quad ;$$

et il n'est pas bien difficile, en regroupant les termes dans chaque somme L_ν , de montrer que $L_\nu > 0$ pour tout $\nu \geq 0$, d'où $L(1,\chi) > 0$, par (8) .

<u>Exemple 1</u>. - Soit χ le caractère de $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$. On a

$$L_\nu = \frac{1}{7\nu+1} + \frac{1}{7\nu+2} - \frac{1}{7\nu+3} + \frac{1}{7\nu+4} - \frac{1}{7\nu+5} - \frac{1}{7\nu+6} \quad ,$$

ou, en regroupant,

$$L_\nu = \left(\frac{1}{7\nu+1} - \frac{1}{7\nu+3}\right) + \left(\frac{1}{7\nu+2} - \frac{1}{7\nu+5}\right) + \left(\frac{1}{7\nu+4} - \frac{1}{7\nu+6}\right) \quad ,$$

d'où évidemment $L_\nu > 0$ quel que soit $\nu \geq 0$. ∎

Il serait donc tentant de conjecturer que $L_\nu(1,\chi)$ est positif pour tout χ et tout $\nu \geq 0$, et d'y voir une "explication" de l'inégalité $L(1,\chi) > 0$. En fait, cette conjecture est <u>correcte</u> pour χ <u>pair</u> $(\chi(-1)=1)$, mais elle est <u>fausse</u> pour χ <u>impair</u> $(\chi(-1)=-1)$. Plus précisément

THEOREME 1 (Davenport). - <u>Si</u> $\chi(-1) = 1$, <u>alors</u> $L_\nu > 0$ <u>pour tout</u> k <u>et tout</u> $\nu \geq 0$. <u>Si</u> $\chi(-1) = -1$, <u>alors</u> $L_0 > 0$, <u>et</u> $L_\nu > 0$ <u>pour</u> $\nu \geq \nu(k)$; <u>mais, quel que soit</u> $r \geq 1$, <u>il existe des valeurs de</u> k <u>telles que</u> $L_1 < 0$, $L_2 < 0, \dots, L_r < 0$.

[Pour une démonstration, voir [7] , ou le §3 ci-dessous] .

La possibilité d'inégalités telles que $L_1 < 0$ est une conséquence du résultat suivant (Chowla) : quel que soit $\epsilon > 0$, il existe un caractère χ impair tel que $L(1,\chi) < \epsilon$. (Même résultat d'ailleurs avec χ pair). [Pour une démonstration, voir [5] , [3] ou [10]] . Cette possibilité de $L_\nu < 0$ ("phénomène de Davenport") tient en gros à ce que, si $L(1,\chi)$ est petit, la suite $(\chi(n))_{1\le n\le k-1}$ comporte vers son début une prolifération de -1 qui interdit de regrouper les termes de L_ν comme dans l'exemple 1, et empêche de prouver ainsi l'inégalité $L_\nu > 0$.

Exemple 2. - Soit χ le caractère de $\mathbb{Q}(\sqrt{-163})$. On vérifie sans peine que $\chi(p) = -1$ pour p premier, $2 \le p \le 37$. Exercice : écrire explicitement la suite $(\chi(n))_{1\le n\le 162}$, et regarder s'il est possible de prouver (par exemple) l'inégalité $L_0 > 0$ par regroupement de termes. ■

En dehors du résultat de Chowla cité plus haut, la démonstration du théorème 1 donnée dans [7] fait intervenir un calcul de sommes du type

$$S = S(\chi,f) = \sum_{n=1}^{k-1} \chi(n)f(n) \tag{10}$$

(avec $f(x) = (\nu k + x)^{-1}$) qui utilise un développement de f en série de Fourier, et évoque une des démonstrations de la formule sommatoire de Poisson (voir [7] , pp. 230-231 et [6] , pp. 15-16). En fait, il n'est pas bien difficile d'étendre ladite formule de Poisson à des sommes telles que (10). L'objectif de cette rédaction est donc

(i) de rappeler la formule sommatoire de Poisson ordinaire, et d'en donner une extension applicable à des sommes du type $\sum_{a\le n\le b} \chi(n) f(n)$, et même (plus généralement) à des sommes du type $\sum_{a\le n\le b} \lambda(n)f(n)$, où λ est une fonction arithmétique k-périodique et f une fonction assez régulière (voir §2) ;

(ii) d'appliquer cette formule de Poisson généralisée à la démonstration du théorème 1, en renvoyant d'ailleurs le lecteur à [7] pour certains détails de calcul (voir §3) ;

(iii) d'indiquer enfin trois autres applications immédiates de la formule de Poisson généralisée :

- équation fonctionnelle de $L(s,\chi)$;
- signe de la somme de Gauss $\tau(\chi)$ (voir (4)) ;
- majoration de $M(\chi)$ (voir (2) ; le résultat obtenu apporte d'ailleurs une légère amélioration au classique "lemme de Polya-Vinogradov") ;

pour tout ceci, voir §4 .

Dans des exposés ultérieurs, nous donnerons de nouvelles applications de la formule de Poisson généralisée :

- étude de sommes du type $\sum_{n=1}^{k-1} \chi(n)n^q$;
- étude de sommes du type $\sum_{n=1}^{k-1} \chi(n) \log n$ (ce qui fera d'ailleurs apparaître un nouvel exemple de "phénomène de Davenport") ;
- étude de $L(s,\chi)$ pour χ <u>pair</u> sur l'intervalle réel $0 \leq s \leq 1$; etc...

§2 - PETITE ANALYSE DE FOURIER ET GENERALISATION DE LA FORMULE DE POISSON.

D'abord quelques rappels :

(2.1) <u>Développement de Fourier d'une fonction périodique</u>.

Soit f une fonction k-périodique et <u>à variations bornées</u>. Pour toute valeur x de la variable, on a

(11) $$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{-2\pi i n x/k}$$

avec (attention aux signes dans les exposants !)

(12) $$c_n = \frac{1}{k}\int_0^k f(x) e^{2\pi i n x/k} dx$$

= le n-ième coefficient de Fourier de f .

["Théorème de Dini-Jordan" ; voir par exemple [14] , pp. 181-184 ; dans la suite, nous écrirons $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ au lieu de $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N}$] .

Pour toute valeur x où f est continue, on a donc en particulier

(13) $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-2\pi i n x/k} .$$

(2.2) Formule de Poisson ordinaire.

Soit f une fonction continue et à variations bornées sur un intervalle compact $[a,b]$. Alors

(14) $$\sum_{a\le n\le b}{}' f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_a^b f(x) e^{2\pi i n x} dx ,$$

l'accent, pour la somme de gauche, indiquant que si a (resp. b) est un entier, le terme correspondant doit être remplacé par $\frac{1}{2} f(a)$ (resp. $\frac{1}{2} f(b)$) .

[Pour f monotone par morceaux, voir [6] , pp. 15-16 ; pour f à variations bornées, utiliser (2.1) ci-dessus, et raisonner comme en [6]] .

Deux remarques : (i) si f (à variations bornées) admet des discontinuités, la formule (14) reste valable à condition d'y remplacer $f(n)$ par $\frac{1}{2}[f(n^+)+f(n^-)]$; (ii) si f est continue, suffisamment régulière, et tend suffisamment vite vers 0 à l'infini, (14) donne par passage à la limite sur a et b ($a \to -\infty$, $b \to +\infty$) la formule classique (voir [12])

(15) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \ ,$$

avec

(16) $$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i x y} dy$$

= la <u>transformée de Fourier</u> de f .

(2.3) <u>Développement de Fourier d'une suite périodique</u>.

Soit $\lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une suite k-périodique. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

(17) $$\lambda(n) = \sum_{h=1}^{k} \mu(h) e^{2\pi i h n/k} \ ,$$

avec

(18) $$\mu(h) = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{k} \lambda(n) e^{-2\pi i n h/k}$$

= le h-ième coefficient de Fourier de λ : $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

En particulier, si $\lambda = \chi$ (voir §1) , on a

$$\mu(h) = \frac{1}{k} \tau(\chi, -h) = \frac{1}{k} \chi(-h) \tau(\chi) = \frac{\chi(-1)\tau(\chi)}{k} \chi(h) \ ,$$

d'où

(19) $$\chi(n) = \frac{\chi(-1)\tau(\chi)}{k} \sum_{h=1}^{k-1} \chi(h) e^{2\pi i h n/k} \ .$$

[A ce sujet, voir [6] , pp. 67-69 ; rappelons que χ est supposé une fois pour toutes <u>réel</u> et <u>primitif</u>.]

Faisons maintenant la synthèse de (2.2) et (2.3) :

(2.4) <u>Généralisation de la formule de Poisson</u> (14) : <u>formule de Poisson</u> "<u>tordue par une fonction arithmétique</u> k-<u>périodique</u>".

Soient f une fonction <u>continue et à variations bornées</u> sur un intervalle compact $[a,b]$ (comme en (2.2)) et λ une suite k-<u>périodi-</u>

que (comme en (2.3)). Notons $S = S(f,\lambda\ ;\ a,b)$ la somme définie par

(20) $$S = \sum_{a \le n \le b}{}' \lambda(n) f(n)\ .$$

Problème : évaluer S .

Intermède. - Dans le cas particulier où $a = 0$, $b = k$, $\lambda = \chi$ (voir § 1) , un procédé classique d'évaluation de S est le suivant (voir en particulier [7] , pp. 230-231) :

- on développe en série de Fourier la fonction f_1 définie presque partout par les deux conditions ci-après : (i) être k-périodique ; (ii) être égale à f sur $]0,k[$;

- pour tout entier n tel que $0 < n < k$, on obtient donc (par (2.1))

(21) $$f(n) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-2\pi i h n/k} \int_0^k f(x) e^{2\pi i h x/k} dx\ ;$$

- on porte cette expression de $f(n)$ dans la définition de S (égale ici à $\sum_{1 \le n \le k-1} \chi(n) f(n)$) ; intervertissant l'ordre des sommations, on arrive à

(22) $$S = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \Big(\frac{1}{k} \sum_{n=1}^{k-1} \chi(n) e^{-2\pi i h n/k}\Big) \int_0^k f(x) e^{2\pi i h x/k} dx\ ;$$

- on note enfin que le premier facteur du terme d'indice h est égal à $\frac{1}{k}\tau(\chi,-h)$, ou encore (voir le calcul précédant la formule (19)) à $\frac{\chi(-1)\tau(\chi)}{k}\chi(h)$; d'où finalement (en remplaçant h par n)

(23) $$\sum_{0 \le n \le k}{}' \chi(n) f(n) = \frac{\chi(-1)\tau(\chi)}{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(n) \int_0^k f(x) e^{2\pi i n x/k} dx\ ,$$

ce qui est l'évaluation cherchée. ■

Solution du problème posé (évaluer $S(f,\lambda\ ;\ a,b)$). - Dans le calcul ci-dessus, le fait de travailler avec un caractère module k sur un intervalle de longueur k , la présence de sommes de Gauss, et surtout (dans chaque situation <u>particulière</u>) l'intervention d'une fonction f <u>particulière</u> (dont on s'empresse de calculer les coefficients de Fourier), tout ceci masque la généralité de la formule (22) (qu'on ne voit d'ailleurs pratiquement jamais écrite telle quelle) ainsi que sa ressemblance avec la formule de Poisson. En fait

THEOREME 2 (formule de Poisson généralisée). - <u>Avec les hypothèses et notations indiquées plus haut</u>, <u>on a</u>

$$\sum_{a\le n\le b}{}' \lambda(n)f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(n) \int_a^b f(x)e^{2\pi inx/k}dx \,, \tag{24}$$

μ <u>étant la suite</u> (k-périodique) <u>des coefficients de Fourier de</u> λ , <u>donnée explicitement en</u> (18) . (Bien entendu, si f admet des discontinuités, la formule (24) reste valable, à condition de remplacer "comme d'habitude" $f(n)$ par $\frac{1}{2}[f(n^+) + f(n^-)]$).

<u>Démonstration</u> : Il y a trois façons naturelles de procéder :

I. <u>Utilisation de l'additivité des deux membres par rapport à</u> $[a,b]$. Si $0 < a < b < k$, la méthode esquissée ci-dessus (en intermède) s'applique ; il suffit de remplacer respectivement $\chi(n)$ par $\lambda(n)$, le premier facteur du h-ième terme (dans (22)) par $\mu(h)$, et enfin f_1 par f_2 définie par les deux conditions ci-après : (i) être k-périodique (condition inchangée) ; (ii) prendre sur $[0,k]$ les valeurs données par

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \le x < a \;; \\ \frac{1}{2}f(a) & \text{pour } x = a \;; \\ f(x) & \text{pour } a < x < b \;; \\ \frac{1}{2}f(b) & \text{pour } x = b \;; \\ 0 & \text{pour } b < x \le k \;. \end{cases} \tag{25}$$

La formule (24) est donc vérifiée dans ce cas, ou plus généralement (par translation) pour <u>$b - a < k$</u> . Le cas général s'en déduit immédiatement par <u>additivité</u>, en effectuant un partage $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{m-1} < a_m = b$ vérifiant $a_i - a_{i-1} < k$

pour $i = 1,2,\ldots,m$; en appliquant la formule (24) à chaque intervalle $[a_{i-1}, a_i]$; et enfin en additionnant membre à membre. ∎

II. <u>Utilisation de la linéarité des deux membres par rapport à</u> λ . Le premier membre de (24) dépend linéairement de λ (noter que les suites k-périodiques forment un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension k et de base $(\lambda_h)_{1\le h\le k}$, avec par définition $\lambda_h(n) = 1$ si $n \equiv h (\mathrm{mod}\ k)$, et $\lambda_h(n) = 0$ sinon), ainsi que le second (voir la définition (18) de μ) . Il suffit donc de prouver (24) pour chacune des k suites λ_h $(1 \le h \le k)$, ce qui se fait instantanément en appliquant la formule de Poisson ordinaire (14) à la fonction g_h définie par $g_h(x) = f(h+kx)$. ∎

III. <u>Développement en série de Fourier d'une fonction périodique auxiliaire</u> (ou "le retour aux sources"). L'idée est de procéder comme pour la démonstration classique de (15), qui consiste (voir par exemple [12] , pp. 70-75) à développer en série de Fourier la fonction 1-périodique $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$. Dans la situation du théorème 2, posons

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda(n)\, \bar{f}(x+n) , \tag{26}$$

$\bar{f}$ étant préalablement définie (pour tout x) par

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < a ; \\ \frac{1}{2} f(a) & \text{pour } x = a ; \\ f(x) & \text{pour } a < x < b ; \\ \frac{1}{2} f(b) & \text{pour } x = b ; \\ 0 & \text{pour } x > b . \end{cases} \tag{27}$$

On vérifie sans peine que f est k-périodique et à variations bornées. D'après (2.1), elle est donc développable en série de Fourier, et il suffit de calculer les coefficients de ladite série et de faire $x = 0$ (avec précaution !) pour obtenir la formule (24) (le détail des calculs est laissé au lecteur). ∎

(2.5) Forme particulière de (24) pour $\lambda = \chi$, caractère de Dirichlet.

Revenons au cas particulier où $\lambda = \chi$ (voir §1). Dans le second membre de (24), on a alors (voir le calcul précédant (19))

$$\mu(n) = \frac{\chi(-1)\tau(\chi)}{k}\,\chi(n)\ ; \tag{28}$$

mais $\tau(\chi) = k^{1/2}$ si $\chi(-1) = 1$, $\tau(\chi) = ik^{1/2}$ si $\chi(-1) = -1$ (voir [2] , chap.5), $\chi(0) = 0$, $\chi(-n) = \chi(-1)\chi(n) = \pm\chi(n)$. En utilisant ces deux derniers points pour éliminer le terme de rang 0 et pour regrouper les termes de rangs n et $-n$ $(n \geq 1)$ dans (24), on obtient deux formules bien pratiques :

pour χ pair,

$$\sum_{a\leq n\leq b}{}' \chi(n)f(n) = \frac{2}{k^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi nx}{k}\, dx\ ; \tag{29}$$

pour χ impair,

$$\sum_{a\leq n\leq b}{}' \chi(n)f(n) = \frac{2}{k^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi nx}{k}\, dx\ . \tag{30}$$

(Rappel : χ est supposé primitif réel ; l'hypothèse $k > 1$ est superflue ; pour $k = 1$, la formule (29) coïncide avec la formule de Poisson ordinaire telle qu'elle est écrite dans [6] , p. 16).

§3 - PHENOMENE DE DAVENPORT : DEMONSTRATION DU THEOREME 1.

Supposons d'abord $\chi(-1) = 1$. Il s'agit de prouver $L_\nu > 0$ pour tout $\nu \geq 0$. Pour $\nu \geq 1$, nous allons en fait prouver mieux :

THEOREME 1 bis. - *Posons*

$$L_\nu(s) = L_\nu(s,\chi) = \sum_{\nu k+1}^{(\nu+1)k} \chi(n)n^{-s}\ .$$

Alors, pour χ pair, $0 < s \leq 1$ et $\nu \geq 1$, on a $L_\nu(s) > 0$.

<u>Démonstration</u> : La formule (29) (avec $a = \nu k$, $b = (\nu+1)k$, $f(x) = x^{-s}$) et le changement de variable $\xi = 2\pi n x/k$ donnent immédiatement

(31) $$L_\nu(s) = 2k^{-1/2}\left(\frac{k}{2\pi}\right)^{1-s} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{s-1} C(s\,;n,\nu) \ ,$$

avec

(32) $$C(s\,;n,\nu) = C(s) = \int_{2\pi\nu n}^{2\pi(\nu+1)n} \xi^{-s} \cos\xi \, d\xi \ .$$

Soit $S(s)$ l'intégrale déduite de $C(s)$ en remplaçant $\cos\xi$ par $\sin\xi$, et posons

(33) $$Q_\nu(s) = \nu^{-s} - (\nu+1)^{-s} \ ;$$

on vérifie sans peine les relations suivantes :

(34) $$S(s) > 0 \quad ; \quad C(s) > 0 \ ;$$
$$C(s) = sS(s+1) \ ;$$
$$S(s) = (2\pi n)^{-s} Q_\nu(s) - sC(s+1) \ .$$

De là pour $C(s)$ le développement asymptotique

(35) $$C(s) = (2\pi n)^{-s-1} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{s(s+1)\ldots(s+2j)}{(2\pi n)^{2j}} Q_\nu(s+2j+1)$$

(où la série au second membre est une série alternée <u>divergente</u>), puis, pour $L_\nu(s)$, en portant (35) dans (31) , le développement asymptotique

(36) $$L_\nu(s) = \frac{k^{\frac{1}{2}-s}}{2\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j L(2j+2,\chi) \frac{s(s+1)\ldots(s+2j)}{(2\pi)^{2j}} Q_\nu(s+2j+1) \ .$$

Comme $L(2,\chi) > \dfrac{1}{\zeta(2)} = \dfrac{6}{\pi^2}$, $L(4,\chi) < \zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$, il résulte de (35)-(36), en ne conservant que deux termes dans les développements asymptotiques, que

(37) $$L_\nu(s) \geq \frac{k^{\frac{1}{2}-s}}{2\pi^2}\left(\frac{6}{\pi^2} s\, Q_\nu(s+1) - \frac{\pi^4}{90} \frac{s(s+1)(s+2)}{4\pi^2} Q_\nu(s+3)\right) \ ,$$

et il suffit donc, pour prouver le théorème 1 bis, de montrer que pour $\nu \geq 1$ et $0 < s \leq 1$, on a

(38) $$\frac{\pi^4}{2160}(s+1)(s+2)\frac{Q_\nu(s+3)}{Q_\nu(s+1)} < 1 \ .$$

Mais la formule des accroissements finis, appliquée au numérateur de

$Q_\nu(s) = \dfrac{(\nu+1)^s-\nu^s}{\nu^s(\nu+1)^s}$, donne facilement (pour $0 < s \leq 1$)

$$\frac{s}{\nu^s(\nu+1)} \leq Q_\nu(s) \leq \frac{s}{\nu(\nu+1)^s} \ ,$$

d'où immédiatement (toujours pour $0 < s \leq 1$) $Q_\nu(s+3)/Q_\nu(s+1) < \frac{3}{4}$, ce qui implique (38) (puisque $\pi^4 < 100$) et donc le théorème 1 bis. ■

Il reste à prouver (toujours pour $\chi(-1) = 1$) que $L_o > 0$. Pour $\nu \geq 1$, les développements asymptotiques (35)-(36) donnent, en faisant $s = 1$, en ne conservant que deux termes et en utilisant les majorations $L(2,\chi) < \pi^2/6$, $L(4,\chi) < \pi^4/90$,

(39) $$k^{1/2}L_\nu \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{(\nu+1)^2}\right)+\frac{1}{120}\left(\frac{1}{\nu^4}-\frac{1}{(\nu+1)^4}\right) ;$$

l'addition membre à membre des inégalités (39) pour $\nu = 1,2,...$ donne (puisque $L(1,\chi) = L_o+L_1+L_2+...$)

$$k^{1/2}(L(1,\chi)-L_o) \leq \frac{11}{120} \ ,$$

d'où effectivement

$$L_o \geq L(1,\chi) - \frac{11}{120k^{1/2}} > 0 \ ,$$

en utilisant la minoration (6) du §1. ■

Supposons maintenant $\underline{\chi(-1) = -1}$. Pour $\underline{\nu \geq 1}$, la formule (30) (avec $a = \nu k$, $b = (\nu+1)k$, $f(x) = x^{-1}$) et le changement de variable $\xi = 2\pi nx/k$ donnent immédiatement

(40) $$L_\nu = 2k^{-1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)S(1;n,\nu) \ ,$$

avec les mêmes notations qu'en (31)-(34) . Comme en (35) , on déduit de (34) le développement asymptotique

(41) $$S(1) = (2\pi n)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2j)!}{(2\pi n)^{2j}} Q_\nu(2j+1) \ ,$$

d'où, pour L_ν , le développement asymptotique

(42) $$L_\nu = \frac{k^{-1/2}}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j L(2j+1,\chi) \frac{(2j)!}{(2\pi)^{2j}} Q_\nu(2j+1) \ .$$

De là (comme pour χ pair) les deux inégalités

(43) $$L_\nu \geq \frac{k^{-1/2}}{\pi} \{L(1,\chi)(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}) - \frac{1}{2\pi^2} \zeta(3) (\frac{1}{\nu^3} - \frac{1}{(\nu+1)^3})\} \ ,$$

(44) $$L_\nu \leq \frac{k^{-1/2}}{\pi} L(1,\chi) (\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}) \ ,$$

inégalités qui montrent immédiatement (comme (37) et (39) respectivement pour χ pair) que $L_\nu > 0$ <u>pour</u> ν <u>assez grand</u>, et que $L_0 > 0$.

Il reste à mettre en évidence le phénomène de Davenport, donc, compte tenu de (40), à montrer que si on pose

(45) $$M_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) S(1; n,\nu) \ ,$$

on peut, quel que soit $r \geq 1$, réaliser les inégalités $M_1 < 0$, $M_2 < 0$, ... , $M_r < 0$. Mais l'intégration par parties qui a permis d'écrire les deux dernières formules (34) donne ici

$$S(1; n,\nu) = (2\pi n)^{-1} Q_\nu(1) - 2 \int_{2\pi\nu n}^{2\pi(\nu+1)n} \xi^{-3} \sin \xi \, d\xi \ ,$$

d'où facilement (pour un réel θ_n , $0 < \theta_n < 1$)

$$S(1; n,\nu) = (2\pi n)^{-1} Q_\nu(1) - 2(2\pi n)^{-3} Q_\nu(3)\theta_n \ ,$$

puis, en portant dans (45) et en explicitant un peu,

(46) $$M_\nu = \frac{1}{2\pi} (\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}) L(1,\chi) - \frac{1}{4\pi^3} (\frac{1}{\nu^3} - \frac{1}{(\nu+1)^3}) J \ ,$$

avec par définition

(47) $$J = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \chi(n) n^{-3} \ .$$

Un calcul élémentaire (voir [7] , p. 232, ll.10-24) montre que $\theta_1 > 0{,}74$; comme d'autre part

$$|J-\theta_1| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \chi(n)n^{-3} = L(3,\chi) - 1 \quad ,$$

et que

$$L(3,\chi) - 1 \leq \zeta(3) - 1 \leq 0{,}21 \quad ,$$

il est clair que $J \geq 0{,}74 - 0{,}21 = 0{,}53$, et donc, en portant ce résultat dans (46), que

$$(48) \qquad M_\nu \leq \frac{1}{2\pi\nu(\nu+1)} \{ L(1,\chi) - \frac{0{,}53}{2\pi^2}(\frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{\nu(\nu+1)} + \frac{1}{(\nu+1)^2}) \} \quad .$$

Il suffit alors de réaliser

$$(49) \qquad L(1,\chi) < \frac{0{,}53}{2\pi^2}(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{(r+1)^2})$$

(voir le résultat de Chowla cité au §1) pour obtenir le résultat annoncé.∎

Remarque : Pour $r = 1$, le second membre de (49) est de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{25}$. On sait d'autre part que sous l'hypothèse de Riemann pour $L(1,\chi)$ (voir [11] , et [13] pour une vérification "expérimentale"), on a approximativement (avec γ = la constante d'Euler)

$$L(1,\chi) > \frac{\pi^2}{12\, e^\gamma} (\log \log k)^{-1} \quad .$$

La réalisation de (49) avec $r = 1$ suppose donc en gros $k \geq e^{e^{10}}$, ce qui (bien qu'à vrai dire (49) ne soit pas une condition nécessaire) semble exclure qu'on puisse jamais faire apparaître le phénomène de Davenport "à la main". ∎

§4 - AUTRES APPLICATIONS DE LA FORMULE DE POISSON.

(4.1) Signe de la somme de Gauss $\tau(\chi)$.

On sait (voir [6] , chap.2) que $\tau(\chi)^2 = \chi(-1)k$, d'où

$\tau(\chi) = \pm k^{1/2}$ si χ est pair, et $\tau(\chi) = \pm i k^{1/2}$ si χ est impair. En fait, le signe à prendre est toujours le signe + (résultat dû à Gauss, et utilisé ci-dessus à l'alinéa (2.5)). Nous rappelons ici en quelques lignes comment (d'après Dirichlet) ce résultat peut se déduire de la formule de Poisson ordinaire (pour les détails, voir [6], chap.2, ou [2], chap.5) :

(i) On décompose $d = \chi(-1)k$ en $\pm \alpha p_1 p_2 \ldots p_t$ avec $\alpha = 1$, 4 ou 8, les p_i premiers impairs deux à deux distincts, et on se ramène par le théorème chinois au cas où $d = -4$, ± 8, ou $\pm p \equiv 1 \pmod 4$ (voir [2], chap.5).

(ii) Pour $d = -4$ ou ± 8, on calcule explicitement $\tau(\chi)$ et on vérifie directement le résultat annoncé.

(iii) Reste le cas où $k = p$, premier impair. On a alors $\chi(n) = (\frac{n}{p})$ (symbole de Legendre), et un raisonnement facile montre que

$$\tau(\chi) = \sum_{0 \leq n \leq p}{}' e^{2\pi i n^2/p} .$$

La formule de Poisson, avec $f(x) = e^{2\pi i x^2/p}$, donne alors

$$\tau(\chi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^p e^{2\pi i x^2/p + 2\pi i n x} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n . \tag{50}$$

Le changement de variable $x = p(y - \frac{n}{2})$ donne par ailleurs

$$I_n = p e^{-\frac{1}{2}\pi i p n^2} \int_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}+1} e^{2\pi i p y^2} dy . \tag{51}$$

Comme $e^{-\frac{1}{2}\pi i p n^2} = 1$ pour n pair et i^{-p} pour n impair, on déduit sans peine de (50) et (51) que

$$\tau(\chi) = p(1+i^{-p}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i p y^2} dy ,$$

soit, après calcul de l'intégrale (voir [6], p.17),

$$\tau(\chi) = \frac{1+i^{-p}}{1+i^{-1}} p^{1/2} .$$

Pour $k = p \equiv 1 \pmod 4$, on a donc bien $\tau(\chi) = p^{1/2} = k^{1/2}$; et pour

$k = p \equiv 3 \pmod 4$, on a bien $\tau(\chi) = ip^{1/2} = ik^{1/2}$, ces deux cas correspondant respectivement à $\chi(-1) = 1$ et $\chi(-1) = -1$. ▫

(4.2) Equation fonctionnelle de $L(s,\chi)$.

Limitons-nous au cas où χ est pair : $\chi(-1) = 1$, et supposons $0 < \mathrm{Re}\ s < 1$. Appliquons formellement (29) avec $a = 0$, $b = \infty$, $f(x) = x^{s-1}$ (laissant au lecteur le soin de justifier a posteriori le passage à la limite $b \to \infty$). Il vient

(52) $$L(1-s,\chi) = \frac{2}{k^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \int_0^{\infty} x^{s-1} \cos \frac{2\pi n x}{k}\, dx .$$

Dans l'intégrale figurant au second membre (soit J_n) , faisons le changement de variable $\xi = \frac{2\pi n x}{k}$. Il vient

(53) $$J_n = \left(\frac{k}{2\pi n}\right)^s \int_0^{\infty} \xi^{s-1} \cos \xi\, d\xi ,$$

et on voit sans peine (cf. [12] , pp. 82-83) que l'intégrale apparaissant dans (53) est égale à $\Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}$. Le rapprochement de (52) et (53) donne alors (pour -rappelons-le- χ réel primitif)

$$L(1-s,\chi) = \frac{2}{k^{1/2}} \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{-s} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} L(s,\chi) . \ \blacksquare$$

Variante (qui évite certaines difficultés dans le passage à la limite $b \to \infty$) : utiliser (29) pour établir l'équation fonctionnelle de

$$\theta(x,\chi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(n) e^{-\pi n^2 x/k} ,$$

et raisonner par ailleurs "à la Riemann" (cf. [6] , chap.9).

(4.3) Majoration de $M(\chi)$.

Nous nous proposons plus généralement de majorer

$$S = \sum_{a \le n \le b}{}' \chi(n)$$

en fonction de k seul, et sans hypothèse sur la parité de χ (en fait, nous supposerons seulement χ primitif non principal). La formule (24), avec $f(x) = 1$, $\lambda = \chi$, et μ calculé grâce à (18)-(19), donne facilement (en utilisant $|\tau(\chi)| = k^{1/2}$)

(54) $$|S| \le \frac{k^{1/2}}{2\pi} (|T_a| + |T_b|) ,$$

avec (pour tout x réel) la notation

(55) $$T_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\chi(n) e^{2\pi i n x/k}}{n} .$$

Les séries T_x sont du type $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{n}$, avec les trois propriétés suivantes :

(i) la suite α est k-périodique ;

(ii) $\|\alpha\| = \sup_n |\alpha(n)| \le 1$;

(iii) $\alpha(0) = 0$.

Cela étant :

LEMME 1. - $T_0 = 0$ <u>si</u> χ <u>est pair</u> ; $T_0 = 2L(1,\chi)$ <u>si</u> χ <u>est impair</u>.

LEMME 2. - <u>Si</u> α <u>est une suite possédant les propriétés</u> (i)-(iii) <u>ci-dessus</u>, <u>on a</u>

(56) $$\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{n} \right| < 2 \log k .$$

Le lemme 1 est évident. Prouvons le lemme 2 ; pour $0 < h < k$, posons

$$U_h = \sum_{\substack{-\infty \\ n \equiv h (k)}}^{\infty} \frac{1}{n} ;$$

si $0 < h < \frac{k}{2}$, on a (voir convention de sommation à l'alinéa (2.1))

$$U_h = \frac{1}{h} - \frac{1}{k-h} + \frac{1}{k+h} - \frac{1}{2k-h} + \dots ,$$

d'où $0 < U_h < \frac{1}{h}$; si $\frac{k}{2} < h < k$, on a de même $|U_h| < \frac{1}{k-h}$; enfin, si k est pair et si $h = \frac{k}{2}$, on a $U_h = 0$. Mais (propriétés (i) et (iii)) ,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{n} = \sum_{h=1}^{k-1} \alpha(h) U_h ,$$

donc (propriété (ii))

$$\Big| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{n} \Big| \le 2 \sum_{1 \le h < \frac{k}{2}} \frac{1}{h} < 2 \log k . \blacksquare$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner la majoration annoncée (du type "lemme de Polya-Vinogradov") :

THEOREME 3. - <u>Soit</u> χ <u>un caractère de Dirichlet primitif non principal modulo</u> $k > 1$. <u>Alors</u> :

(i) <u>quels que soient</u> a <u>et</u> b , <u>on a</u>

$$\Big| \sum_{a \le n \le b}{}' \chi(n) \Big| < \frac{2}{\pi} k^{1/2} \log k ;$$

(ii) <u>quel que soit</u> $x \ge 1$, <u>on a</u>

$$\Big| \sum_{1 \le n \le x}{}' \chi(n) \Big| < \left(\frac{1}{\pi} + O(1)\right) k^{1/2} \log k ;$$

(iii) <u>si</u> χ <u>est pair</u>, <u>on a même</u>, <u>plus précisément</u>,

$$\Big| \sum_{1 \le n \le x}{}' \chi(n) \Big| < \frac{1}{\pi} k^{1/2} \log k .$$

<u>Démonstration</u> : (i) et (iii) résultent immédiatement de (54) , (55) et des deux lemmes. Prouvons (ii) ; on a évidemment

$$\Big| \sum_{1 \le n \le x}{}' \chi(n) \Big| < \frac{1}{\pi} k^{1/2} \log k + \frac{1}{\pi} k^{1/2} L(1,\chi)$$

(lemme 1) ; mais $L(1,\chi) = o(\log k)$ pour $k \to \infty$ (théorème de Siegel : voir [2], chap.5) ; d'où (ii). ∎

Remarque : L'inégalité (ii) est essentiellement le résultat de Polya (voir par exemple [9], p.14). Les inégalités (i) et (ii) améliorent légèrement les résultats en $k^{1/2} \log k$ ou $(\frac{2}{\pi} + 0(1))k^{1/2} \log k$ donnés respectivement dans [2] et [1] .

BIBLIOGRAPHIE

[1] APOSTOL T.M. - Introduction to Analytic Number Theory, Springer Verlag, New York (1976).

[2] AYOUB R. - An Introduction to the Analytic Theory of Numbers. A.M.S. Math. Surveys, n°10, Providence (1963).

[3] BATEMAN P.T., CHOWLA A., ERDÖS P. - "Remarks on the size of $L(1,\chi)$". Publ. Math. Debrecen, 1 (1949/50), pp.165-181.

[4] BOREVICH Z., SHAFAREVICH I.R. - Number Theory, Academic Press, New York (1966).

[5] CHOWLA S. - "On the Class Number of the Corpus $P(\sqrt{-k})$". Proc. Nat. Acad. Sci. India, 13 (1947), pp.197-200.

[6] DAVENPORT H. - Multiplicative Number Theory. Markham Publishing Co., Chicago (1967).

[7] DAVENPORT H. - "On the series for L(1)". J. London Math. Soc., 24 (1949), pp. 229-233.

[8] ELLIOTT P.D.T.A. - "On the size of $L(1,\chi)$". J. reine angew. Math. 227 (1967), pp. 26-36.

[9] HUXLEY N.M. - The distribution of Prime Numbers, Clarendon Press, Oxford (1972).

[10] JOSHI P.T. - "The size of $L(1,\chi)$...", J. Number Theory, 2 (1970), pp. 58-73.

[11] LITTLEWOOD J.E. - "On the Class Number of the Corpus $P(\sqrt{-k})$", Proc. London Math. Soc., 28 (1927), pp.358-372.

[12] RADEMACHER H. - Topics in Analytic Number Theory. Springer Verlag, New York (1966).

[13] SHANKS D. - "Littlewood Bounds", Proc. Symp. Pure Math. A.M.S. (Analytic Number Theory), vol. XXIV (1973).

[14] VALIRON G. - Théorie des Fonctions, Masson, Paris (1966).

Laboratoire de Mathématiques Pures - Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES (France)