JEAN-RENÉ JOLY

Variantes et extensions de la formule de Poisson périodique, applications arithmétiques

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 6 (1977-1978), exp. nº 2, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=STNG_1977-1978__6__A2_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
1977-1978
Grenoble

VARIANTES ET EXTENSIONS DE LA FORMULE DE POISSON PERIODIQUE, APPLICATIONS ARITHMETIQUES

par

Jean-René JOLY

[Cette rédaction fait suite à un précédent travail [10] "Formules sommatoires, distributions périodiques et applications arithmétiques" et regroupe plusieurs exposés faits au Séminaire de Théorie des Nombres (Grenoble, 12 janvier 1978) et au Groupe de Travail de Théorie Multiplicative des Nombres (Grenoble, Mai, Octobre et Décembre 1977, Janvier 1978). La numérotation des paragraphes, formules et théorèmes prolonge celle de "Formules sommatoires...".]

8.1. - Les formules de Poisson classique (9) et périodique (27) des §§ 3-4 ont été énoncées et démontrées sous les deux hypothèses suivantes :

(i) la fonction f est <u>à variations bornées</u> ;

(ii) les limites de sommation a et b sont <u>finies</u>.

Dans beaucoup de cas, ces hypothèses sont trop restrictives : ainsi, au § 7.3, on a appliqué <u>formellement</u> (27) à la somme $L(1-s,\chi) = \sum_0^{\infty}{}' \chi(n)n^{s-1}$, avec par conséquent $a = 0$ et $b = \infty$ (hypothèse (ii) non vérifiée) et $f(x) = x^{s-1}$, $0<\sigma<1$, d'où $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ (hypothèse (i) non vérifiée) : quoique exact, le résultat obtenu (69) n'est donc pas <u>démontré</u>. Le but des §§ 8.2-8.3 ci-dessous est de donner des versions de (9) et de

(27) libérées partiellement des hypothèses (i) et (ii) et ainsi -par exemple- de faire du calcul formel du § 7.3 une démonstration de (69).

Dans un autre ordre d'idées, les formules (9) et (27) sont soumises à l'hypothèse implicite

(iii) f est fonction d'une seule variable réelle.

Bien entendu, il est souvent commode de disposer d'une version pluridimensionnelle de la formule (27), par exemple, pour établir l'équation fonctionnelle de certaines fonctions thêta à coefficients pluripériodiques. Une telle version "pluridimensionnelle-pluripériodique" de (27) est donnée au § 8.6. Les §§ 8.4 et 8.6 indiquent quelques spécimens d'applications des résultats établis aux §§ 8.2, 8.3 et 8.5.

8.2. - Formule de Poisson (ordinaire ou périodique) sur un intervalle infini (le contenu de ce § est en partie inspiré de Titchmarsh, [8], chap. 2, § 2.8).

THEOREME 8.2.1. - Soient a un nombre réel > 0 et $f : [a,\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction globalement à variations bornées et possédant les deux propriétés suivantes :

(P_1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$;

(P_2) $\int_0^\infty f(x)\,dx$ converge en tant qu'intégrale impropre.

On a alors la formule de Poisson (ordinaire)

$$\sum_a^{\infty}{}' f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_a^\infty f(x)\, e^{2\pi i\nu x}\,dx \,. \tag{70}$$

Enoncé analogue pour un intervalle $]-\infty,b]$ ou $]-\infty,\infty[$. (Ecrire une formule telle que (70) implique évidemment que tout ce qui y intervient a un sens, et notamment que les intégrales convergent en tant qu'intégrales impropres, et que la série de droite converge "en valeur principale" : tout ceci sera établi au cours de la démonstration.)

Démonstration : par additivité et utilisation de la formule (9) , on voit qu'on peut se ramener au cas où a est entier, puis, par translation, au cas où $a = 0$. De même, par une propriété bien connue des fonctions à variations bornées, on peut se ramener au cas où f est réelle positive décroissante. On va donc, sans diminuer la généralité, se contenter de démontrer le théorème 8.2.1 avec $a = 0$ et avec les deux hypothèses suivantes :

(P'_1) f est réelle, positive, décroissante, et $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$;

(P'_2) l'intégrale $\int_0^\infty f(x)\,dx$ est absolument convergente.

Pour tout entier $N \geq 0$, posons comme au § 5.6

$$D_N(x) = \sum_{-N}^{N} e^{2\pi i \nu x} = \frac{\sin(2N+1)\pi x}{\sin \pi x} ,$$

puis, pour $n \geq 0$ et $n \geq 1$ respectivement,

$$u_n(x) = \int_n^{n+\frac{1}{2}} [f(x) - f(n^+)] \, D_N(x)\,dx , \tag{71}$$

$$v_n(x) = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n} [f(x) - f(n^-)] \, D_N(x)\,dx . \tag{72}$$

Alors :

LEMME 8.2.2. - (i) $\int_n^{n+\frac{1}{2}} D_N(x)\,dx = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n} D_N(x)\,dx = \frac{1}{2}$;

(ii) <u>Pour tout</u> n <u>fixé</u>, $\lim_{N\to\infty} u_n(N) = \lim_{N\to\infty} v_n(N) = 0$;

(iii) <u>Il existe deux séries réelles positives convergentes</u> $\sum_{n\geq 0} a_n$, $\sum_{n\geq 1} b_n$ <u>telles que</u>, <u>pour tout</u> n <u>et tout</u> N , <u>on ait les majorations</u>

$$|u_n(N)| \leq a_n \quad , \quad |v_n(N)| \leq b_n .$$

Démonstration du lemme : (i) Evident sur la définition de $D_N(x)$ comme somme d'exponentielles.

(ii) Posons $g(y) = [f(n+y) - f(n^+)] \dfrac{y}{\sin \pi y}$, et $\lambda = (2N+1)\pi$. On peut alors écrire

$$u_n(N) = I(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{2}} g(y)\,\frac{\sin \lambda y}{y}\,dy\ ,$$

et g est à variations bornées sur $[0,\frac{1}{2}]$, telle que $g(0^+) = 0$. D'après une propriété classique en théorie des intégrales de Fourier, on a donc bien

$$\lim_{N\to\infty} u_n(N) = \lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = \frac{\pi}{2}\,g(0^+) = 0\ .$$

Raisonnement analogue pour $v_n(N)$.

(iii) Conservons les notations de l'alinéa précédent. Comme les deux facteurs de $g(y)$ sont respectivement négatif et décroissant, et positif et croissant, $g(y)$ est elle-même négative et décroissante. Comme de plus $g(0^+) = 0$, le 2ème théorème de la moyenne, appliqué à $-g(y)$, donne, pour un ξ tel que $0 < \xi < \frac{1}{2}$,

$$|u_n(N)| = |g((\tfrac{1}{2})^-)|\,\Big|\int_\xi^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \lambda y}{y}\,dy\Big|\ . \tag{73}$$

Dans (73), le second facteur du second membre peut s'écrire $\Big|\int_{\lambda\xi}^{\lambda/2} \frac{\sin u}{u}\,du\Big|$ et est donc borné (disons, par A) du fait que l'intégrale impropre $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$ est convergente. Comme par ailleurs $|g((\frac{1}{2})^-)| \le |f((n+\frac{1}{2})^-) - f(n^+)|$ et que f est décroissante, on aboutit bien à $|u_n(N)| \le a_n$, avec

$$a_n = A[f(n^+) - f((n+\tfrac{1}{2})^-)]\ , \tag{74}$$

terme général d'une série convergente (voir (P_1')). Raisonnement analogue pour $v_n(N)$. ■

Démontrons maintenant le théorème 8.2.1, et posons

$$S_N = \sum_{-N}^{N} \int_0^\infty f(x)\,e^{2\pi i\nu x}\,dx\ . \tag{75}$$

Il s'agit de prouver que $\lim_{N\to\infty} S_N$ existe et est égale à $\sum_0^{\infty}{}' f(n)$ (la convergence de cette série résulte facilement de (P_1') et (P_2')). On a, pour N fixé,

$$S_N = \int_0^\infty f(x)\,D_N(x)\,dx = \lim_{\substack{Q\to\infty \\ Q \text{ entier}}} I_N(Q) \ , \tag{76}$$

avec par définition

$$I_N(Q) = \int_0^Q f(x)\,D_N(x) = \sum_{n=0}^{Q-1} \int_n^{n+1} f(x)\,D_N(x)\,dx \ ,$$

ou encore, en utilisant les notations et le point (i) du lemme 8.2.2,

$$I_N(Q) = \sum_{n=0}^{Q-1} \left[\tfrac{1}{2} f(n^+) + \tfrac{1}{2} f((n+1)^-) + u_n(N) + v_n(N)\right] \ ,$$

ou enfin, après regroupement,

$$I_N(Q) = {\sum_{n=0}^{Q}}' f(n) + \sum_{n=0}^{Q-1} u_n(N) + \sum_{n=1}^{Q} v_n(N) \ . \tag{77}$$

Mais chacune des trois séries $\sum' f(n)$, $\sum u_n(N)$ et $\sum v_n(N)$ est convergente : la première, en vertu de (P_1') et (P_2') (remarque déjà faite), les deux autres, en vertu du point (iii) du lemme 8.2.2. Par passage à la limite sur Q , (76) et (77) donnent donc

$$S_N = {\sum_{n=0}^{\infty}}' f(n) + \sum_{n=0}^{\infty} u_n(N) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(N) \ . \tag{78}$$

D'autre part, la combinaison des points (ii) et (iii) du lemme 8.2.1 montre que $\lim\limits_{N\to\infty} \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(N)\right) = \lim\limits_{N\to\infty} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(N)\right) = 0$: (78) implique donc l'égalité $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = {\sum\limits_{n=0}^{\infty}}' f(n)$, et le théorème 8.2.1 est démontré. ∎

THEOREME 8.2.3. (cas "absolument convergent") - <u>Mêmes données et hypothèses qu'au théorème 8.2.1</u>. <u>Soient</u>, <u>en outre</u>, k <u>un entier</u> ≥ 1 <u>et</u> $\lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ <u>une suite</u> k-<u>périodique</u>. <u>On a alors la formule de Poisson périodique</u>

$$\sum_{a}^{\infty}{}' \lambda(n)\,f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\lambda}(\nu) \int_a^\infty f(x)\,e^{2\pi i\nu x/k}\,dx \ . \tag{79}$$

<u>Enoncé analogue pour un intervalle</u> $]-\infty,b]$, <u>ou</u> $]-\infty,\infty[$.

<u>Démonstration</u> : raisonner par linéarité comme au § 4, mais en se ramenant maintenant au théorème 8.2.1. ∎

Le passage par linéarité de (70) à (79) est trivial. Malheureusement, l'hypothèse (P_2) est trop restrictive (dans les calculs du § 7.3 relatifs à $L(1-s,\chi)$, elle n'est pas vérifiée). D'où l'intérêt du résultat suivant :

THEOREME 8.2.4. (cas "semi-convergent") - Soient a un nombre réel > 0 et $f : [a,\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction globalement à variations bornées et possédant la propriété suivante :

(P_1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Soient d'autre part k un entier ≥ 1 et $\lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une suite k-périodique possédant la propriété suivante :

(P_2^*) $\hat{\lambda}(n) = 0$ pour tout $n \equiv 0 \pmod k$; autrement dit, $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda(j) = 0$. (Cette propriété est notamment vérifiée si $\lambda = \chi$, caractère de Dirichlet non principal modulo k).

On a alors la formule de Poisson périodique :

$$\sum_{a}^{\infty}{}' \lambda(n) f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\lambda}(\nu) \int_a^\infty f(x)\, e^{2\pi i \nu x/k} dx \ . \tag{79*}$$

Enoncé analogue pour un intervalle $]-\infty,b]$ ou $]-\infty,\infty[$.

Démonstration : on peut, sans diminuer la généralité, faire $a=0$, supposer f nulle entre 0 et $k+\frac{1}{2}$, et remplacer l'hypothèse (P_1) par celle-ci :

(P_1') $f(x)$ est réelle, positive, décroissante, et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Une sommation d'Abel montre alors que le premier nombre de (79*) est une série semi-convergente (noter que par périodicité et d'après (P_2^*), la fonction sommatoire de la suite λ est bornée).

De même, le critère de Cauchy, combiné avec le deuxième théorème de la moyenne, montre que chacune des intégrales, au second membre de (29*) , est semi-convergente (sauf peut-être celle de rang $\nu = 0$: mais en fait celle-ci n'intervient pas, puisque par hypothèse $\hat{\lambda}(0) = 0$). Introduisons la fonction auxiliaire

$$f_\lambda(y) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(j)\, f(j+ky) \tag{80*}$$

(laquelle est "sous-jacente" dans le § 4.2). Alors :

LEMME 8.2.5. - <u>On a l'égalité</u>

$$\sum_0^\infty{}' f_\lambda(m) = \sum_0^\infty{}' \lambda(n) f(n) \ . \tag{81*}$$

<u>Démonstration</u> : sommer la série (convergente) du second membre par paquets de longueur k , puis utiliser la périodicité de λ et le fait que $f(x)$ tend vers 0 à l'infini. ∎

LEMME 8.2.6. - <u>L'intégrale</u> $\int_0^\infty f_\lambda(y)\,dy$ <u>est absolument convergente</u>.

<u>Démonstration</u> : par linéarité : les suites k-périodiques λ vérifiant (P_2^*) forment dans Λ un hyperplan de base $(\delta_0-\delta_j)_{1\le j\le k-1}$ (voir § 4.1). Il suffit donc de vérifier le lemme pour $\lambda = \delta_0-\delta_j$, et $f_\lambda(y) = f(ky) - f(j+ky)$. Plus généralement, il suffit (pour tout $c > 0$) de démontrer la convergence absolue de $\int_0^\infty [f(x)-f(x+c)]\,dx$ ou même (puisque d'après (P_1') la fonction entre crochets est ≥ 0) sa semi-convergence (en tant qu'intégrale impropre). Mais

$$\int_0^\xi [f(x)-f(x+c)]\,dx = \int_0^c f(x)\,dx - \int_\xi^{c+\xi} f(x)\,dx \ ,$$

et le dernier terme est majoré par $cf(\xi)$ et tend donc vers 0 quand ξ tend vers l'infini : d'où le résultat annoncé. ∎

Démontrons alors la formule (79*). L'application à $f_\lambda(x)$ de (81*) , et du théorème 8.2.1 (possible, d'après (P_1) , qui implique $\lim_{x\to\infty} f_\lambda(x) = 0$, et d'après le lemme 8.2.6) donne évidemment

$$\sum_0^\infty{}' \lambda(n) f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty f_\lambda(x)\, e^{2\pi i\nu x}\,dx \ . \tag{82*}$$

Le terme de rang ν , au second membre, peut s'écrire, d'après (80*),

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda(j) \int_0^\infty f(j+kx)\, e^{2\pi i\nu x}\,dx \ ,$$

ou encore (périodicité de λ et changement de variable $y = j+kx$ dans chaque intégrale : voir § 4.2)

$$\hat{\lambda}(\nu) \int_0^\infty f(y)\, e^{2\pi i \nu y/k}\, dy \ .$$

Il suffit de reporter ceci dans (82*) pour obtenir la formule (79*) annoncée.∎

8.3. - Formule de Poisson périodique pour une fonction non bornée à l'origine.

THEOREME 8.3.1. (intervalle fini) - Soient b un nombre réel > 0 et $f :]0,b] \to \mathbb{C}$ une fonction ayant les propriétés suivantes :

(P_1) $x f(x)$ est globalement à variations bornées sur $]0,b]$;

(P_2) $f(x)$ est absolument intégrable au voisinage de 0, et $\lim_{x\to 0} x f(x) = 0$.

Soient d'autre part k un entier ≥ 1 et $\lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une suite k-périodique ayant la propriété suivante :

(P_3) $\lambda(n) = 0$ pour tout $n \equiv 0 \pmod{k}$. (Cette propriété est notamment vérifiée si $\lambda = \chi$, caractère de Dirichlet non principal modulo k .)

On a alors la formule de Poisson périodique

$$\sum_0^{b}{}' \lambda(n) f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\lambda}(\nu) \int_0^b f(x)\, e^{2\pi i \nu x/k}\, dx \ . \tag{80}$$

Remarque : (P_1) implique évidemment que quel que soit δ réel avec $0 < \delta < b$, $f(x)$ est à variations bornées sur $[\delta, b]$.

Démonstration : d'après la formule (27) avec $a = \delta$ $(0 < \delta < 1$, et δ suffisamment petit : voir la fin de cette démonstration), la formule (80) est vraie si on y remplace 0 (borne inférieure) par δ . Par additivité, on est donc ramené à prouver cette formule avec les bornes 0 et δ , soit, puisque $\lambda(0) = 0$ et que $\delta < 1$, à démontrer l'égalité

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\lambda}(\nu) \int_0^\delta f(x)\, e^{2\pi i \nu x/k}\, dx = 0 \ .$$

Comme la suite $\hat{\lambda}$ est périodique, donc bornée, et que f est absolument intégrable sur $[0,\delta]$, le terme général de cette série tend vers 0 quand $|\nu|$ tend vers l'infini (utiliser le lemme de Riemann-Lebesgue) et on peut en fait se contenter de démontrer l'égalité $\lim_{N\to\infty} T_N = 0$, avec la notation

$$T_N = \sum_{-kN+1}^{kN+k} \hat{\lambda}(\nu) \int_0^\delta f(x)\, e^{2\pi i \nu x/k}\, dx \ . \tag{81}$$

Introduisons la fonction

$$\lambda(x) = \sum_{j=1}^{k} \hat{\lambda}(j)\, e^{2\pi i j x/k} \ . \tag{82}$$

Comme les $\hat{\lambda}(j)$ sont les coefficients de Fourier de la suite périodique λ, la fonction λ coïncide sur les entiers avec la suite λ, ce qui justifie cette notation (une fonction d'interpolation de ce genre apparaît dans [1] et [6], qui contiennent des cas particuliers des théorèmes démontrés ici). Notons toujours $D_N(x)$ le noyau de Dirichlet. Par interversion des opérations $\sum$ et $\int$, puis changement d'indice $\nu = j+km$, (81) se réécrit

$$T_N = \int_0^\delta f(x)\, \lambda(x) D_N(x)\, dx \ . \tag{83}$$

Maintenant, $\lambda(x)$, combinaison linéaire d'exponentielles, est une fonction analytique de valeur à l'origine $\lambda(0) = 0$. On peut donc écrire

$$f(x)\,\lambda(x) = [x\, f(x)]\ \mu(x) \ , \tag{84}$$

où $\mu(x)$ est elle-même analytique au voisinage de 0, et en particulier (en choisissant δ suffisamment petit) sur l'intervalle réel $[0,\delta]$. Mais la partie réelle et la partie imaginaire d'une telle fonction sont évidemment monotones par morceaux : comme $x f(x)$ est supposée à variations bornées sur $[0,\delta]$, (84) montre alors que $f(x)\lambda(x)$ est elle même à variations bornées sur $[0,\delta]$. Enfin, on a évidemment $\lim_{x\to 0} f(x)\lambda(x) = 0$ (utiliser (P_2)). Le raisonnement fait pour démontrer le point (ii) du lemme 8.2.2 est donc applicable et prouve que le membre de droite de

(81) tend vers 0 quand $N \to \infty$: on a ainsi $\lim\limits_{N\to\infty} T_N = 0$, et le théorème 8.3.1 est démontré. ∎

THEOREME 8.3.2 (intervalle infini). - Soit $f :]0,\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction ayant les propriétés suivantes :

(P_1') $f(x)$ est localement à variations bornées ;

(P_2') $f(x)$ est à variations bornées au voisinage de l'infini, et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$;

(P_3') $x f(x)$ est à variations bornées au voisinage de 0 , et $\lim\limits_{x\to 0} x f(x) = 0$;

(P_4') $f(x)$ est absolument intégrable au voisinage de 0 .

Soient d'autre part k un entier ≥ 1 et $\lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une suite k-périodique ayant la propriété suivante :

(P_5') $\lambda(n) = \hat{\lambda}(n) = 0$ pour tout $n \equiv 0 \pmod k$.

On a alors la formule de Poisson périodique

$$\sum_{0}^{\infty}{}' \lambda(n) f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\lambda}(\nu) \int_0^{\infty} f(x) e^{2\pi i \nu x/k} dx . \qquad (85)$$

Démonstration : par additivité, il suffit de démontrer la formule (85) sur $]0,1]$ et sur $[1,\infty[$, ce qui se fait respectivement à l'aide du théorème 8.3.1 (et des hypothèses (P_1') , (P_3') , (P_4') , (P_5')) et du théorème 8.2.4 (et des hypothèses (P_1') , (P_2') , (P_5')). ∎

Remarque : il existe une symétrie évidente entre les théorèmes 8.2.4 (au voisinage de l'infini) et 8.3.1 (au voisinage de 0) ; elle est mise en évidence sur le tableau suivant :

<table>
<tr><td>

THEOREME 8.2.4.

Hypothèses :

$f(x)$ tend vers 0 à l'infini

$f(x)$ est à variations bornées au voisinage de l'infini

$\hat{\lambda}(n) = 0$ pour $n \equiv 0 \pmod k$

Fonction auxiliaire :

$\sum_{j=1}^{k} \lambda(j)\, f(j+kx)$

</td><td>

THEOREME 8.3.1.

$x f(x)$ tend vers 0 à l'origine

$x f(x)$ est à variations bornées au voisinage de l'origine

$\lambda(n) = 0$ pour $n \equiv 0 \pmod k$

$\sum_{j=1}^{k} \hat{\lambda}(j)\, e^{-2\pi i j x/k}\, f(x)$.

</td></tr>
</table>

Cette symétrie existe dans la formule de Poisson périodique elle-même, comme on le voit en l'écrivant $\sum \lambda(n) f(n) = \sum \hat{\lambda}(n) \hat{f}(n)$, et en se rappelant que les propriétés de $\hat{f}$ à l'infini reflètent celles de f à l'origine, et réciproquement. (Dans l'écriture ci-dessus, on a supposé pour simplifier $a = -\infty$, $b = \infty$; $f \to \hat{f}$ est la transformation de Fourier "de base k" , c'est-à-dire de noyau $e^{\pm 2\pi i x y/k}$, prise d'ailleurs "au sens large" : f non nécessairement L^1 , et donc $\hat{f}$ non nécessairement définie à l'origine).

8.4. - Exemples d'applications des théorèmes 8.2.1 à 8.3.2.

On complète ici les §§ 7.3 et 7.9-7.10 de [10] , et on esquisse quelques applications à des questions classiques.

8.4.1. - Equation fonctionnelle de $L(s,\chi)$ (suite du § 7.3) : il s'agit de justifier l'application de la formule (27) , donc, en fait, de la formule (85) du théorème 8.3.2, à $\lambda = \chi$ et $f(x) = x^{s-1}$ $(0 < s < 1)$. Or, $f(x)$ est monotone, décroissante, nulle à l'infini, localement intégrable au voisinage de 0 , et $x f(x)$ est monotone et nulle à l'origine ; d'autre part, $\chi(0) = \sum_{j=1}^{k} \chi(j) = 0$; les propriétés (P_1') à (P_5') sont donc trivialement vérifiée, et ceci donne la justification annoncée.

8.4.2. - <u>Sommation de séries du type Kronecker-Epstein</u> (suite du §7.9) : rappelons que si $a \neq 0$, on a pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi ixy}dx}{(a^2+x^2)^s} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} a^{1-2s}, & \text{si } y = 0 ; \\ 2\dfrac{\pi^s}{\Gamma(s)} \left|\dfrac{y}{a}\right|^{s-\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|ay|), & \text{si } y \neq 0 . \end{cases} \tag{86}$$

(K_s désigne ici une fonction de Bessel de 2ème espèce ; voir [4], pp. 272-273.) Par application du théorème 8.2.1, on trouve donc (pour $a > 0$, $s > \frac{1}{2}$)

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2+n^2)^s} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} a^{1-2s} + 4\frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n}{a}\right)^{s-\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi an). \tag{87}$$

Pour $a = s = 1$, (87) redonne le résultat bien connu

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \pi + \frac{2\pi}{e^{2\pi}-1},$$

à rapprocher des formules pour $\zeta(2m)$ et $\zeta(2m+1)$.

Par sommation sur a, (87) donne aussi

$$\begin{aligned} \sum\sum{}^{*} \frac{1}{(m^2+n^2)^s} = {} & 2\zeta(2s) + 2\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\zeta(2s-1) \\ & + 4\frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \sum\sum_{m,n\geq 1} \left(\frac{n}{m}\right)^{s-\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi mn), \end{aligned} \tag{88}$$

d'où, d'un seul coup, le prolongement analytique et l'équation fonctionnelle (plus un excellent procédé de calcul numérique) pour la fonction zêta du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$. Plus généralement, par utilisation des règles de commutation d'une transformation linéaire, ou de la multiplication par une exponentielle imaginaire, avec la transformation de Fourier, (70) et (86) donnent facilement des résultats analogues pour des séries du type $\sum\sum^{*} (Q(m,n))^{-s}$, $\sum\sum^{*} e^{2\pi i(mn+n\nu)}|m+n\tau|^{-2s}$, et pour les fonctions zêta des corps quadratiques imaginaires. Voir par exemple [4], pp. 273-278, et deux articles classiques de Bateman-Grosswald et Chowla-Selberg (Acta arithm. (1964) et Crelle (1967)).

8.4.3. - <u>Développement de</u> $L(s,\chi)\,L(s,\chi\psi)$ <u>en série de fonctions de Bessel</u> (suite du § 7.10) : si on pose $\lambda_a(n) = \chi(a^2+n^2)$, et si on suppose s réel $> \frac{1}{2}$, le théorème "périodique" 8.2.3 donne (pour $a > 0$)

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(a^2+n^2)}{(a^2+n^2)^s} = \hat{\lambda}_a(0)\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\,a^{1-2s} + 4\frac{\pi^s}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\hat{\lambda}_a(n)\left(\frac{n}{ak}\right)^{s-\frac{1}{2}}K_{s-\frac{1}{2}}\left(2\pi\frac{an}{k}\right).$$

Par sommation sur a , ceci donne une formule (analogue à (88)) pour la série de Dirichlet du § 7.10,

$$L(s,\chi)\,L(s,\chi\psi) = \frac{1}{4}\sum\sum \frac{\chi(m^2+n^2)}{(m^2+n^2)^s} = \frac{1}{4}\sum \frac{r(n)\chi(n)}{n^s} \quad ;$$

les $\hat{\lambda}_m(n)$ intervenant ici sont essentiellement des sommes de Kloosterman et sont donc susceptibles de majorations précises. Des séries de Dirichlet analogues mais plus générales apparaissent notamment dans les papiers de Baker et Stark relatifs à $h = 1$.

8.4.4. - Parmi les autres applications classiques de la formule de Poisson ordinaire sur un intervalle infini, signalons la formule de Lipschitz, le développement de Fourier des séries d'Eisenstein, la manipulation (directe, ou par fonctions thêta interposées) des fonctions zêta de Hurwitz, de Lerch, etc... (voir par exemple [7]). Les théorèmes 8.2.4 et 8.3.1 - 8.3.2 permettent un travail analogue pour les mêmes séries tordues par un caractère de Dirichlet, ou par la fonction caractéristique d'une progression arithmétique : à ce sujet, voir notamment le papier de Berndt-Schœnfeld [1] .

8.4.5. - <u>Remarque</u> : l'application d'une formule de Poisson fait apparaître au second membre des intégrales définies qu'il faut savoir calculer. Il y a pour cela diverses méthodes : consultation d'une table ; application du théorème des résidus ; utilisation d'intégrales de Hankel ; utilisation d'une représentation intégrale de fonction de Bessel (telle que (86)) ; utilisation de la formule d'inversion de Fourier-Mellin-Bromwick pour la transformation de Laplace (ou de Mellin), etc... . Au sujet de l'intervention des fonctions de Bessel et de l'utilisation de la transformation de Laplace en théorie des nombres, voir [11] .

8.5. - Formule de Poisson (ordinaire ou périodique dans $\mathbb{R}^m$. Ce paragraphe donne des versions ordinaire et périodique de la formule de Poisson dans $\mathbb{R}^m$. Les notations sont standard : on écrit x pour $(x_1,\dots,x_m)$, $|x|$ pour $(x_1^2+\dots+x_m^2)^{\frac{1}{2}}$, xy pour $x_1y_1+\dots+x_my_m$. De plus, $\sum$ et $\int$ désignant respectivement une sommation m-uple sur $\mathbb{Z}^m$ tout entier et une intégration m-uple sur $\mathbb{R}^m$ tout entier.

THEOREME 8.5.1. - Soient f et $\hat{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues, intégrables et images l'une de l'autre par la transformation de Fourier. Supposons en outre qu'il existe $\alpha > 0$ tel que f et $\hat{f}$ vérifient à l'infini la même condition de décroissance

$$f(x)\ ,\ \hat{f}(x) = O(|x|^{-m-\alpha})\ .$$

On a alors la formule de Poisson

$$\sum f(n) = \sum \hat{f}(\nu)\ . \tag{89}$$

Démonstration : classique et sans malice ; posons

$$F(x) = \sum f(x+n)\quad ,\quad G(x) = \sum \hat{f}(\nu)\, e^{2\pi i \nu x}\ . \tag{90}$$

Les hypothèses montrent que ces deux séries sont normalement convergentes sur tout compact, et que $F(x)$ et $G(x)$ sont continues, et bien entendu $\mathbb{Z}^m$-périodiques. Un calcul classique ([3], [4]) montre en outre que le ν-ième coefficient de Fourier de F est égal à $\hat{f}(\nu)$, donc au ν-ième coefficient de Fourier de G . Or

LEMME 8.5.2. - Soient $H : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\mathbb{Z}^m$-périodique. Alors, si tous les coefficients de Fourier de H sont nuls, la fonction H est elle-même identiquement nulle.

Démonstration du lemme (rappel) : soient K le cube-unité dans $\mathbb{R}^m$, $P(K)$ (resp. $C(K)$) l'algèbre des restrictions à K des polynômes trigonométriques (resp. des fonctions continues $\mathbb{Z}^m$-périodiques) et $A : C(K) \to \mathbb{C}$ la forme linéaire définie par $A(\varphi) = \int_K \varphi(x)\, H(x)\, dx$. Le théorème de Stone-Weierstrass montre que $P(K)$ est dense dans $C(K)$; l'hypothèse sur H montre que A est nulle sur $P(K)$: A est donc nulle sur $C(K)$, et ceci implique bien $H = 0$. ∎

Le lemme, appliqué à $H = F - G$, montre alors que $F(x) = G(x)$ pour tout x, et en particulier que $F(0) = G(0)$, d'où la formule (89). ∎

Soient maintenant $k_1,\ldots,k_m$ m entiers ≥ 1, et λ une "m-suite $(k_1,\ldots,k_m)$-périodique", c'est-à-dire une application $\mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$ qui soit k_j-périodique par rapport à sa j-ième variable, ceci, pour $j = 1,\ldots,m$. Posons $k = (k_1,\ldots,k_m)$, et introduisons (comme au § 4.1) la m-suite $\hat{\lambda}$ définie par

$$\hat{\lambda}(n) = (k_1 k_2 \ldots k_m)^{-1} \sum_h \lambda(h)\, e^{-2\pi i n h/k} ,$$

la sommation étant étendue aux $h = (h_1,\ldots,h_m)$ tels que $1 \leq h_j \leq k_j$ (ceci, pour $j = 1,\ldots,m$), et l'écriture nh/k signifiant évidemment $\sum_{j=1}^{m} n_j h_j/k_j$. Alors

THEOREME 8.5.3. - <u>Avec les données et notations du théorème 8.5.1 et de l'alinéa ci-dessus, on a la formule de Poisson périodique</u>

$$\sum \lambda(n) f(n) = \sum \hat{\lambda}(\nu) \int f(x) e^{2\pi i \nu x/k}\, dx \tag{92}$$

($\nu x/k$ <u>signifiant ici encore</u> $\sum_{j=1}^{m} \nu_j x_j/k_j$).

<u>Démonstration</u> : la formule (89) du théorème 8.5.1 peut s'écrire $\sum f(n) = \sum \int f(x) e^{2\pi i \nu x} dx$ (changer ν en $-\nu$ dans la sommation de droite). La formule (92) s'en déduit aussitôt par <u>linéarité</u>, exactement comme au § 4.2. Bien entendu, on peut aussi procéder comme aux §§ 8.2-8.3, en introduisant une fonction auxiliaire du type $\sum \lambda(j) f(j+kx)$ ou $\sum \hat{\lambda}(j) e^{-2\pi i j x/k} f(x)$. ∎

Les formules (89) et (92) ne concernent que le cas où le domaine de sommation est $\mathbb{Z}^m$ tout entier. Dans bien des cas, on a cependant besoin de calculer une somme du type $\sum_{n \in D} f(n)$ ou $\sum_{n \in D} \lambda(n) f(n)$,

D étant un domaine compact à bord ∂D suffisamment régulier (disons, de classe C^1) et f étant une fonction continue sur un voisinage de D. Voici comment on peut appliquer (86) ou (89) dans une telle situation :

1) On prolonge f (hors de D) en une fonction continue à support compact définie sur $\mathbb{R}^m$ tout entier, et par conséquent <u>bornée</u>. On note encore f cette fonction , et on pose $A = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |f(x)|$.

2) On pose $f_D(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ si } x \in D \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$, puis $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2}$, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-m}\varphi(x/\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$, et enfin $f_{D,\varepsilon} = f_D * \varphi_\varepsilon$ (convolution dans $\mathbb{R}^m$). On a alors $\hat{f}_{D,\varepsilon} = \hat{f}_D \hat{\varphi}_\varepsilon$, et bien entendu, φ étant sa propre transformée de Fourier, $\hat{\varphi}_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$.

3) Le théorème 8.5.1 (ou 8.5.3) est évidemment applicable à $f_{D,\varepsilon}$ et $\hat{f}_{D,\varepsilon}$: on peut donc écrire par exemple, en utilisant (86),

$$\sum f_{D,\varepsilon}(n) = \sum \hat{f}_D(n)\varphi(\varepsilon n) \ . \tag{93}$$

Le problème est alors de voir ce que donnent les deux membres de cette formule quand ε tend vers 0 .

LEMME 8.5.3. - <u>La série</u> $\sum f_{D,\varepsilon}(n)$ <u>est normalement convergente</u>.

<u>Démonstration</u> : on a en effet

$$f_{D,\varepsilon}(n) = \int f_D(x)\,\varepsilon^{-m}\,\varphi\left(\frac{n-x}{\varepsilon}\right)dx = \int f_D(n+\varepsilon x)\,\varphi(x)\,dx \ ,$$

donc

$$|f_{D,\varepsilon}(n)| \leq A\int_{\varepsilon^{-1}(D-n)} \varphi(x)\,dx \leq A\int_{|x|\geq \varepsilon^{-1}r_n} \varphi(x)dx \ ,$$

r_n désignant la distance du point n au compact D . Supposons maintenant $\varepsilon \leq 1$, et laissons de côté les termes de la série (en nombre fini seulement) tels que $r_n \leq |n|/2$. Pour les autres, on a

$$|f_{D,\varepsilon}(n)| \leq A\left[2\int_{|n|/2m^{\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-\pi t^2}dt\right]^m$$

d'où facilement (par exemple en majorant $e^{-\pi t^2}$ par $2\pi t e^{-\pi t^2}$ et en intégrant explicitement) une inégalité de la forme

$$|f_{D,\varepsilon}(n)| \leq Ce^{-\pi|n|^2/4} ,$$

qui implique évidemment le lemme. ∎

LEMME 8.5.4. - <u>On a</u>

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_{D,\varepsilon}(n) = \begin{cases} f(n) & , \ \underline{si} \quad n \in D\backslash\partial D \ ; \\ \frac{1}{2} f(n) & , \ \underline{si} \quad n \in \partial D \ ; \\ 0 & , \ \underline{si} \quad n \notin D \ . \end{cases}$$

<u>Démonstration</u> : par translation, on peut toujours supposer $n = 0$. On a alors

$$f_{D,\varepsilon}(0) = \int f_D(x)\, \varepsilon^{-m} \varphi(-x/\varepsilon)dx = \int_{\varepsilon^{-1}D} f(\varepsilon x)\, \varphi(x)\, dx$$

$$= f(0) \int_{\varepsilon^{-1}D} \varphi(x)\, dx + \int_{\varepsilon^{-1}D} [f(\varepsilon x) - f(0)]\, \varphi(x)\, dx \ .$$

La dernière intégrale est majorée en module par $\int |f(\varepsilon x) - f(0)|\varphi(x)\, dx$, qui tend vers 0 avec ε par le théorème de la convergence majorée. Quant à l'intégrale $\int_{\varepsilon^{-1}D} \varphi(x)\, dx$, elle tend évidemment vers $\int \varphi(x)dx = 1$ si 0 est intérieur à D , vers $\int_\phi \varphi(x)\, dx = 0$ si 0 est extérieur à D , et -si $0 \in \partial D$- vers $\int_E \varphi(x)\, dx = \frac{1}{2}$, E désignant le demi-espace limité dans $\mathbb{R}^m$ par l'hyperplan H tangent en 0 à ∂D , et situé localement du même côté de H que D . De là le lemme. ∎

Ces deux lemmes montrent que quand ε tend vers 0 , le premier membre de (93) tend vers $\sum'_{n\in D} f(n)$, l'accent indiquant (comme en dimension 1) que si n est sur le bord du domaine de sommation, le terme $f(n)$ correspondant doit être affecté du coefficient $\frac{1}{2}$. Quant au second membre, il est égal à la série $\sum \hat{f}_D(n)$ tempérée par le "facteur de Gauss-Weierstrass" $\varphi(\varepsilon_n) = e^{-\pi\varepsilon^2|n|^2}$ et dire que cette série admet une limite quand ε tend vers 0 équivaut (par définition) à dire qu'elle est <u>sommable au sens de Gauss-Weierstrass</u>.

4) Ces divers résultats et remarques (éventuellement étendus au cas d'une somme $\sum_{n\in D} \lambda(n)f(n)$ mènent donc à la conclusion suivante :

THEOREME 8.5.5. - <u>Avec les hypothèses sur</u> f <u>et</u> D <u>faites ci-dessus</u>, <u>les formules de Poisson</u>

$$\sum_{n\in D}{}' f(n) = \sum \int_D f(x)\, e^{2\pi i \nu x}\, dx \ , \tag{94}$$

$$\sum_{n\in D}{}' \lambda(n) f(n) = \sum \hat{\lambda}(\nu) \int_D f(x)\, e^{2\pi i \nu x/k}\, dx \ , \tag{95}$$

<u>sont valables à condition que les séries de droite soient sommées au sens de Gauss-Weierstrass</u>. <u>En particulier</u>, <u>ces formules sont valables si les séries de droite sont convergentes au sens habituel</u> (<u>absolument</u>, <u>ou commutativement</u>) <u>ou encore</u> "<u>radialement convergentes</u>".

8.6. - <u>Exemples d'applications des théorèmes</u> 8.5.1 <u>à</u> 8.5.5.

8.6.1. - La principale application de la formule de Poisson ordinaire dans $\mathbb{R}^m$ (avec f dans l'espace de Bruhat-Schwartz) est la fabrication de l'équation fonctionnelle de <u>fonctions thêta</u> pluridimensionnelles. Voir les œuvres de Hecke, ou [4], chap. XIII. Voici un exercice sur le cas périodique :

soit $k = p$ premier $\equiv 1 \pmod 4$; soit $\chi(n) = (\frac{n}{p})$ le caractère de Legendre (pair) modulo p, et posons

$\Theta(t) = \sum\sum \chi(m^2+n^2)\, e^{-\pi(m^2+n^2)t}$;

(i) montrer que si on écrit $\lambda(m,n) = \chi(m^2+n^2)$, on a $\hat{\lambda}(m,n) = p^{-1}\chi(m^2+n^2)$;

(ii) appliquer Poisson-périodique à la série double définissant $\Theta(t)$, et en déduire l'équation fonctionnelle $\Theta(t) = t^{-1}\Theta(t^{-1})$;

(iii) en déduire que si $\Phi(s) = (\pi/p)^{-s}\Gamma(s)\varphi(s)$, avec $\varphi(s) = \sum\sum \chi(m^2+n^2)(m^2+n^2)^{-s}$, on a l'équation fonctionnelle $\Phi(s) = \Phi(1-s)$.

[Comme $\varphi(s) = 4L(s,\chi)\,L(s,\chi\psi)$, ceci résulte également de 8.4.1, et aussi de 8.4.3, puisque $K_{-s} = K_s$.]

8.6.2. - Formule de Hardy-Landau pour les sommes de deux carrés : pour tout n entier ≥ 0 et tout x réel > 0, posons $r(n)$ = nombre de décompositions de n en somme de deux carrés, $A(x) = \sum'_{n\leq x} r(n)$, et (sur $\mathbb{R}^2$, lieu de $y = (y_1, y_2)$; x est ici un réel fixé) notons $f(y)$ la fonction caractéristique du disque $D = \{y \mid y_1^2 + y_2^2 \leq x\}$. On a

$$A(x) = \sum_{n\in D}' f(n) \quad , \quad n = (n_1, n_2) \; ;$$

le théorème 8.5.5 s'applique ; les transformées de Fourier, au second membre de (95), se calculent facilement (f est radiale ; au sujet de ce genre de calcul, voir [6], et aussi [11]) ; après un regroupement "radial" évident, on arrive à

$$A(x) = \pi x + \sum_{n=1}^{\infty} r(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{2}} J_1(2\pi(nx)^{\frac{1}{2}}) \; , \tag{96}$$

J_1 étant la fonction de Bessel de 1ère espèce d'indice $\nu = 1$. Maintenant, le comportement asymptotique des fonctions de Bessel montre que dans (96), la série de droite est convergente : le théorème 8.5.5 permet donc de conclure que cette formule est vraie. [A ce sujet, voir Landau, Zahlentheorie, Kap. VIII.]

8.6.3. - Développement de Bessel d'une série de Dirichlet-Hurwitz pour les sommes de deux carrés : la formule (86) de l'alinéa 8.4.2 reste valable mutatis mutandis dans $\mathbb{R}^m$ (remplacer au 1er membre x^2 par $|x|^2$, et au 2ème membre $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}$ par $\pi^{m/2}$; a^{1-2s} par a^{m-2s} ; et les trois occurrences de $s - \frac{1}{2}$ par $s - \frac{m}{2}$). Un calcul analogue à celui de 8.4.2 (avec un regroupement "radial" comme dans 8.6.2) donne alors

$$\sum\sum \frac{1}{(a^2+m^2+n^2)^s} = \frac{\pi\Gamma(s-1)}{\Gamma(s)} a^{2-2s} + 2\frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{N=1}^{\infty} r(N)\left(\frac{N}{a^2}\right)^{\frac{s-1}{2}} K_{s-1}(2\pi a N^{\frac{1}{2}}).$$

Posant $x = a^2 > 0$, et regroupant "radialement" les termes du 1er membre, on arrive ainsi à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r(n)}{(n+x)^s} = \frac{\pi x^{1-s}}{s-1} + 2\frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} r(n) \left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{s-1}{2}} K_{s-1}(2\pi(nx)^{\frac{1}{2}}) \; .$$

Cette formule (très analogue à (96) : voir [11]) donne un développement de Bessel pour la fonction "zêta-de-Hurwitz" de $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNDT B.C. + SCHOENFELD L. - Periodic Analogues of the Euler-Maclaurin and Poisson Summation Formulas with applications to Number Theory. Acta arithm. 28 (1975), 23-68.

[2] BOCHNER S. + CHANDRASEKHARAN K. - Fourier Transforms. Annals of Mathematical Studies, n° 19 (1965).

[3] LANG S. - Algebraic Number Theory. Addison-Wesley (1970).

[4] LANG S. - Elliptic Functions. Addison-Wesley (1973).

[5] MORDELL L.J. - Some applications of Fourier series in the Analytic Theory of Numbers. Proc. Cambridge Philos. Soc. 24 (1928), 585-596.

[6] MORDELL L. J. - Poisson Summation Formula in several variables and some applications to the Theory of Numbers. Proc. Cambridge Philos. Soc. 25 (1929), 412-420.

[7] RADEMACHER H. - Topics in Analytic Number Theory. Springer (1966).

[8] RAMANUJAN S. - Some definite integrals connected with Gauss sums. Mess. Math. 44 (1915), 75-85.

[9] TITCHMARSH E.C. - Theory of Fourier Integrals. Clarendon Press (1037).

[10] JOLY J.R. - Formules sommatoires, distributions périodiques et applications arithmétiques. Sém. Th. Nombres, Grenoble (1976-1977).

[11] JOLY J.R. - Formules sommatoires, transformation de Laplace et applications arithmétiques. Sém. Th. Nombres, Grenoble (1977-1978), en préparation (titre provisoire ; coïncide avec la référence [20] donnée dans [10]).

Note : [5] et [8] semblent être les premiers exemples de formules de Poisson "avec caractère". [2] est une bonne référence générale pour les intégrales de Fourier dans $\mathbb{R}^m$.

Laboratoire de Mathématiques Pures - Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES (France)