Roland Gillard

Unités cyclotomiques

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 6 (1977-1978), exp. nº 3, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=STNG_1977-1978__6__A3_0>

UNITES CYCLOTOMIQUES

par

Roland GILLARD

Le but de cet exposé est d'améliorer et de comparer des résultats de H. HASSE ([3]) et de H. LEOPOLDT ([5]) sur les unités cyclotomiques d'un corps de nombres abélien réel K .

§1. - NOTATIONS

1.1. Soit μ le groupe des racines de 1 dans une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$. On choisit un isomorphisme de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dans μ et on note ζ_n l'image de $1/n$. On désigne par J la conjugaison complexe dans $\mathbb{Q}(\mu)$.

Soit K un corps de nombres abélien réel et G le groupe de Galois, E le groupe des unités et h le nombre de classes de K . Désignons par ξ_o le caractère unité de G . Pour tout caractère ξ de G , défini et irréductible sur $\mathbb{Q}$, introduisons $\ker \xi = \{\sigma\in G \mid \xi(\sigma) = \xi(1)\}$, K_ξ le sous-corps de K fixé par $\ker \xi$ et G_ξ le quotient de G par $\ker \xi$. Le groupe G_ξ est cyclique : notons g_ξ son ordre, d_ξ le discriminant du polynôme cyclotomique P_{g_ξ} d'indice g_ξ et choisissons un générateur $\sigma(\xi)$ de G_ξ parmi les $\varphi(g_\xi)$ possibles. Soit f_ξ le conducteur (resp. E_ξ le groupe des unités) du corps K_ξ . Pour $\xi \neq \xi_o$, choissons pour tout automorphisme sur K_ξ , σ , du sous-corps réel maximum de $\mathbb{Q}(\zeta_{f_\xi})$, un prolongement $\bar\sigma$ à $\mathbb{Q}(\zeta_{2f_\xi})$ et définissons un entier de $\mathbb{Q}(\zeta_{2f_\xi})$ (cf. [5] §8) par :

$$\theta_\xi = \prod_\sigma \bar{\sigma}(\zeta_{2f_\xi} - \zeta_{2f_\xi}^{-1}) \, . \tag{1}$$

Notons d'une part que J opère sur $(\zeta_{2f_\xi} - \zeta_{2f_\xi}^{-1})$ en changeant son signe. D'autre part, on déduit de l'écriture de ce nombre sous la forme $\zeta_{2f_\xi}(1-\zeta_{f_\xi}^{-1})$ la relation :

$$(\zeta_{2f_\xi} - \zeta_{2f_\xi}^{-1})^{1+J} = (1-\zeta_{f_\xi})^{1+J} \, .$$

Des remarques précédentes on tire les égalités

$$\theta_\xi^J = (-1)^{s(\xi)}\theta_\xi \quad , \quad \theta_\xi^2 = (-1)^{s(\xi)} N_{\mathbb{Q}(\zeta_{f_\xi})/K_\xi}(1-\zeta_{f_\xi}) \tag{2}$$

avec $s(\xi) = \varphi(f_\xi)/2g_\xi$. Ceci montre que θ_ξ^2 est dans K_ξ . Pour α dans G_ξ (resp. dans G) désignons par θ_ξ^α une racine carrée de $\alpha(\theta_\xi^2)$. On prolonge par multiplicativité cette définition à $\mathbb{Z}[G_\xi]$ (resp. $\mathbb{Z}[G]$) ; pour α dans G_ξ (resp. dans G), $\theta_\xi^{\alpha-1}$ est dans K_ξ. Si $\mathfrak{A}_\xi$ est un idéal de $\mathbb{Z}[G_\xi]$, notons $\theta_\xi^{\mathfrak{A}_\xi}$ l'image de $\mathfrak{A}_\xi$ par l'application $\alpha \to \theta_\xi^\alpha$.

1.2. Pour tout groupe fini X , désignons par $[X]$ son ordre. Pour chaque ξ , introduisons l'idempotent correspondant de $\mathbb{Q}[G]$

$$e_\xi = \frac{1}{[G]} \sum_{\sigma\in G} \xi(\sigma^{-1})\sigma \quad , \tag{3}$$

et $u_\xi = [G].e_\xi$. Désignons par N_G l'indice de $\mathbb{Z}[G]$ dans la somme directe $\oplus\, e_\xi \mathbb{Z}[G]$ où ξ parcourt l'ensemble de tous les caractères de G définis et irréductibles sur $\mathbb{Q}$. Le discriminant de la $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathbb{Z}[G]$ est $[G]^{[G]}$; celui de $\oplus\, e_\xi \mathbb{Z}[G]$ est $\prod_\xi d_\xi$. On a donc (cf [5] , §1.3) :

$$N_G = \sqrt{\frac{[G]^{[G]}}{\prod_\xi d_\xi}} \, . \tag{4}$$

On introduit aussi l'entier C_G (cf [3] §14 et §15) :

$$C_G = \sqrt{\prod_\xi d_\xi \left(\frac{[G]}{g_\xi^2}\right)^{\varphi(g_\xi)}} = \prod p^{\frac{1}{2}\cdot \sum_{p^\mu | [G]} \left[q \frac{[G]}{p^\mu} - \frac{[G]}{p^\mu}\right]} \tag{5}$$

où q est la fonction qui à un entier m associe le nombre d'éléments de G d'ordre divisant m ; dans le produit p parcourt l'ensemble des diviseurs premiers de $[G]$. En effectuant le produit et la division de N_G par C_G et en tenant compte de la valeur de d_ξ et de la relation $[G] = \sum \varphi(g_\xi)$, on obtient :

$$N_G \cdot C_G = \prod_\xi \left(\frac{[G]}{g_\xi}\right)^{\varphi(g_\xi)}$$

et $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ (6)

$$N_G / C_G = \prod_\xi \frac{g_\xi^{\varphi(g_\xi)}}{d_\xi} = \prod_\xi \prod_{p | g_\xi} p^{\varphi(g_\xi)/p-1} .$$

§ 2. - RESULTATS DE LEOPOLDT

2.1. Pour chaque ξ, $\xi \neq \xi_o$, considérons l'élément γ_ξ de $\mathbb{Z}[G_\xi]$:

$$\gamma_\xi = \prod_{p | g_\xi} (1 - \sigma(\xi)^{g_\xi / p}) .$$

L'élément $\theta_\xi^{\gamma_\xi}$ est dans K_ξ et on vérifie qu'on a :

$$\theta_\xi^{[G] \cdot \gamma_\xi} = \pm \Theta^{u_\xi} \quad \text{avec} \quad \Theta = \prod_{\xi \neq \xi_o} \theta_\xi^{\gamma_\xi} . \tag{7}$$

Désignons par $\pm \Theta^{I(G)}$ le sous-groupe de E des éléments de la forme $\pm \Theta^\alpha$ où α appartient à l'idéal d'augmentation $I(G)$ de $\mathbb{Z}[G]$. Son indice est le quotient du régulateur du groupe $\Theta^{I(G)}$ par le régulateur R de E. D'après le résultat classique sur les déterminants de groupes (cf [3] §11(3)) on a donc :

$$[E : \pm \Theta^{I(G)}] = \pm \frac{1}{R} \prod S(\chi) ,$$

où dans le produit χ parcourt l'ensemble des caractères de G définis et irréductibles sur $\mathbb{C}$, avec

$$S(\chi) = \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma^{-1}) \log |\Theta^\sigma| .$$

Pour évaluer $S(\chi)$ prolongeons χ par linéarité à $\mathbb{Z}[G]$ et utilisons le lemme :

LEMME 1. - <u>Soit</u> L <u>une application</u> $\mathbb{Z}$-<u>linéaire de</u> $\mathbb{Z}[G]$ <u>dans</u> $\mathbb{R}$; <u>alors pour tout</u> u <u>dans</u> $\mathbb{Z}[G]$, <u>on a</u> :

$$\sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma^{-1})L(u\sigma) = \chi(u) \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma^{-1})L(\sigma) .$$

<u>Démonstration</u> : ceci se voit par un changement de sommation si u est dans G . Le lemme se déduit alors par $\mathbb{Z}$-linéarité.

Si χ intervient dans la décomposition de ξ sur $\mathbb{C}$, on a $\chi(u_\xi) = [G]$, si bien qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned} S(\chi) &= \frac{1}{2[G]} \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma^{-1}) \log |\Theta^{2\sigma u_\xi}| \\ &= \frac{1}{2[G]} \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma^{-1}) \log |\theta_\xi^{2[G]\,\gamma_\xi\sigma}| \\ &= \frac{\chi(\gamma_\xi)}{2} \frac{[G]}{g_\xi} \sum_{\sigma\in G_\xi} \chi(\sigma^{-1}) \log |\theta_\xi^{2\sigma}| \\ &= \frac{\chi(\gamma_\xi)}{2} \frac{[G]}{g_\xi} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,f_\chi)=1}}^{f_\chi} \underline{\chi}^{-1}(a) \log |1-\zeta_{f_\chi}^{a}| . \end{aligned}$$

Dans ces égalités, on a considéré χ comme un caractère de G_ξ , ce qui permet de définir $\chi(\gamma_\xi)$ par linéarité ; puis on a remplacé le caractère χ par le caractère de Dirichlet $\underline{\chi}$ (de conducteur $f_\chi = f_\xi$) qu'il définit et utilisé (2) . D'après [3] 5 (1.a), on a la formule analytique du nombre de classes :

$$\prod_{\chi\neq 1} \left(\tfrac{1}{2} \cdot \sum_{\substack{a=1 \\ (a,f_\chi)=1}}^{f_\chi} \underline{\chi}(a)^{-1} \log |1-\zeta_{f_\chi}^{a}| \right) = \pm\ h.R .$$

Pour chaque caractère ξ , $\xi \neq \xi_o$, le produit des éléments $\chi(\gamma_\xi)$, pris sur l'ensemble des caractères χ figurant dans la décomposition de ξ sur $\mathbb{C}$, est la norme entre $\mathbb{Q}(\zeta_{g_\xi})$ et $\mathbb{Q}$ de $\prod_p (1-\zeta_p)$. Comme

$\mathbb{Q}(\zeta_{g_\xi})$ est de degré $\varphi(g_\xi)/p-1$ sur $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ et que la norme de $1-\zeta_p$ entre $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ et $\mathbb{Q}$ est p , on obtient :

$$[E : \pm\Theta^{I(G)}] = h.\prod_{\xi\neq\xi_o}\left(\frac{[G]}{g_\xi}\right)^{\varphi(g_\xi)}\prod_{\xi} p^{\varphi(g_\xi)/p-1}$$

c'est-à-dire d'après (6) :

$$[E : \pm\,\Theta^{I(G)}] = \frac{h}{[G]}\,(N_G)^2\ . \tag{8}$$

Considérons l'application de $I(G)$ dans E : $\alpha \to \Theta^{2.\alpha}$; c'est un homomorphisme dont l'image est d'indice fini donc est encore $\mathbb{Z}$-isomorphe à $\mathbb{Z}^{[G]-1}$. Son noyau est donc nul.

2.2. Désignons pour tout ξ , $\xi\neq\xi_o$, par $\mathfrak{A}^o_\xi$ l'idéal de $\mathbb{Z}[G_\xi]$ engendré par γ_ξ et posons

$$F^o_\xi = \pm\,\theta_\xi^{\mathfrak{A}^o_\xi}\ ,\quad F^o_{\xi_o} = \pm 1\ ,\ F^o = \prod F^o_\xi\ .$$

D'après [5] on a :

THEOREME 1. - $[E:F^o] = h\cdot\dfrac{N_G}{[G]}$.

Démonstration : il résulte de 2.1 que l'application $I(G)\to\Theta^{I(G)}$ définie par $\alpha\to\Theta^{2\alpha}$ est injective. On a donc d'après (7), en élevant au carré pour se débarasser de ± 1 :

$$\begin{aligned}[F^o:\pm\Theta^{I(G)}] &= [\prod_{\xi\neq\xi_o}\theta_\xi^{2[G](\gamma_\xi)} : \Theta^{[G].2I(G)}] \\ &= [\bigoplus_{\xi\neq\xi_o} u_\xi\,\mathbb{Z}[G] : [G].I(G)] \\ &= [\oplus\, e_\xi\mathbb{Z}[G] : I(G)\oplus e_{\xi_o}\mathbb{Z}[G]]\ .\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a des isomorphismes :

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[G]+e_{\xi_o}\mathbb{Z}[G]/I(G)\oplus e_{\xi_o}\mathbb{Z}[G] &\simeq (1-e_{\xi_o})\mathbb{Z}[G]/I(G) \\ &\simeq (1-e_{\xi_o})\mathbb{Z}/I(G)\cap(1-e_{\xi_o})\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/[G]\,\mathbb{Z}\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{Z}[G] + e_{\xi_o}\mathbb{Z}[G]/\mathbb{Z}[G] \simeq e_{\xi_o}\mathbb{Z}/e_{\xi_o}\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}[G] \simeq \mathbb{Z}/[G]\mathbb{Z} .$$

D'où l'égalité qui avec (8) prouve le théorème :

$$[F^o : \pm \Theta^{I(G)}] = [\oplus e_\xi \mathbb{Z}[G] : \mathbb{Z}[G]] = N_G .$$

§3. - RESULTATS PREPARATOIRES

Si M est un $\mathbb{Z}$-module de type fini, on appelle rang essentiel de M, la dimension sur $\mathbb{Q}$ de $M \otimes \mathbb{Q}$.

3.1. Définissons une relation d'ordre partiel sur les caractères de G, définis et irréductibles sur $\mathbb{Q}$ par l'équivalence :

$$\xi' < \xi \Leftrightarrow K_{\xi'} \subsetneq K_\xi .$$

Pour ξ, ξ' vérifiant $\xi' < \xi$, soit $N_{\xi,\xi'}$ la somme dans $\mathbb{Z}[G_\xi]$ des éléments du noyau de la surjection $G_\xi \to G_{\xi'}$. Pour chaque ξ, désignons par $\mathfrak{n}_\xi$ l'idéal de $\mathbb{Z}[G_\xi]$ engendré par les éléments $N_{\xi,\xi'}$ avec $\xi' < \xi$. Le résultat suivant est dû à J. Martinet (cf [2], p.9-10) :

PROPOSITION 1. - <u>L'idéal</u> $\mathfrak{n}_\xi$ <u>est engendré par</u> $P_{g_\xi}(\sigma(\xi))$.

En envoyant $\sigma(\xi)$ sur ζ_{g_ξ}, on obtient alors un isomorphisme :

$$\mathbb{Z}[G_\xi]/\mathfrak{n}_\xi \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[\zeta_{g_\xi}] . \tag{9}$$

Ainsi par (9), $\theta_\xi^{2\mathfrak{A}_\xi^o}$ peut être muni d'une structure de $\mathbb{Z}[\zeta_{g_\xi}]$-module monogène ; son rang essentiel est donc inférieur ou égal à $\varphi(g_\xi)$. Comme $2\mathfrak{A}_\xi^o$ contient $2[G]\gamma_\xi$, il résulte de (7) et de la fin de 2.1 que le rang essentiel de $\theta_\xi^{2\mathfrak{A}_\xi^o}$ est $\varphi(g_\xi)$, c'est-à-dire que ce $\mathbb{Z}[\zeta_{g_\xi}]$-module est libre de rang 1.

3.2. Soit ξ un caractère de G défini et irréductible sur $\mathbb{Q}$ distinct de ξ_o . On peut énoncer

PROPOSITION 2. - Le $\mathbb{Z}$-module $E_\xi / \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'}$ est libre de rang $\varphi(g_\xi)$.

Démontrons d'abord quelques lemmes.

LEMME 2. - Pour tout ξ' , $\xi' < \xi$, $E_\xi / E_{\xi'}$ est un $\mathbb{Z}$-module sans torsion.

Démonstration : il suffit de démontrer le lemme 2' :

LEMME 2'. - Soient L une extension finie de $\mathbb{Q}$, ε une unité de L , $\sqrt[n]{\varepsilon}$ une racine $n^{\text{ième}}$ de ε . L'extension $L' = L(\sqrt[n]{\varepsilon})$ n'est pas une extension cyclique réelle de $\mathbb{Q}$.

Démonstration : supposons en effet que $L'/\mathbb{Q}$ est cyclique réelle : L' contient les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité et puisque L' est réelle, n est égal à 2 . Soient $d = [L:\mathbb{Q}]$ et σ un générateur de $\mathrm{Gal}(L'/\mathbb{Q})$; considérons $\alpha = (\sqrt[2]{\varepsilon})^{1+\sigma+\ldots+\sigma^{d-1}}$. Il est clair que α^2 est une unité de $\mathbb{Q}$ donc vaut ± 1 . Puisque L' est réelle, on a donc $\alpha = \pm 1$. Mais la relation $(\sqrt[2]{\varepsilon})^{\sigma^d} = -\sqrt{\varepsilon}$ implique que $\alpha^{\sigma^d} = -\alpha$.

Soit p un nombre premier et désignons par $\xi(p)$ le caractère de G défini et irréductible sur $\mathbb{Q}$ tel que $g_{\xi(p)} = g_\xi / p$ si p divise g_ξ . Si p ne divise pas g_ξ , posons $\xi(p) = \xi_o$.

LEMME 3. - Le groupe $(E_\xi / \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'}) \otimes \mathbb{Z}_p$ est isomorphe à un sous-groupe de $(E_\xi / E_{\xi(p)}) \otimes \mathbb{Z}_p$.

Démonstration : on peut décomposer G_ξ en un produit direct $\Gamma \times \Delta$ où Γ est un p-groupe et Δ un groupe d'ordre premier à p . Soit λ le caractère de Δ , défini et irréductible sur $\mathbb{Q}$ tel que $\{\sigma \in \Delta \mid \lambda(\sigma) = \lambda(1)\} = 1$ et e_λ l'idempotent de $\mathbb{Z}_p[\Delta]$ associé à λ par une formule analogue à (3) . Le produit tensoriel de $E_\xi / \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'}$

avec $\mathbb{Z}_p$ est égal -en notations additives- à $e_\lambda((E_\xi/E_{\xi(p)})\otimes\mathbb{Z}_p)$ qui est facteur direct dans $(E_\xi/E_{\xi(p)})\otimes\mathbb{Z}_p$.

LEMME 4. - <u>L'application canonique de</u> $\theta_\xi^{2\mathfrak{A}_\xi^o}$ <u>dans</u> $E_\xi/\prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}$ <u>est injective</u>.

<u>Démonstration</u> : soit θ_ξ^α un élément du noyau, avec $\alpha\in 2\mathfrak{A}_\xi^o$. On a alors

$$\theta_\xi^{u_\xi.\alpha} = 1 .$$

Mais d'après (7) , $\theta_\xi^{u_\xi.\alpha}$ est égal à $\theta_\xi^{[G].\alpha}$ et la nullité de α résulte alors de la fin de 3.1.

<u>Démonstration de la prop. 2</u> : les lemmes 2 et 3 montrent que $E_\xi/\prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}$ est sans torsion. L'application du lemme 4 est injective et son image est d'indice fini, d'après le théorème 1 appliqué à K_ξ ; le rang de $E_\xi/\prod_{\xi'<\xi} E_\xi$ est donc celui de $\theta_\xi^{2\mathfrak{A}_\xi^o}$, c'est-à-dire $\varphi(g_\xi)$ d'après la fin de 3.1.

§4. - CALCULS D'INDICES

4.1. Pour chaque $\xi\neq\xi_o$, considérons un idéal $\mathfrak{A}_\xi$ de $\mathbb{Z}[G_\xi]$ contenant $\mathfrak{A}_\xi^o$ et posons $F_\xi = \pm\,\theta_\xi^{\mathfrak{A}_\xi}$, $F_{\xi_o} = \pm 1$, $F = \prod F_\xi$. On suppose que F_ξ est inclus dans E_ξ et que la condition suivante est réalisée :

$$\text{(N)} \qquad \forall\xi\ ,\ \theta_\xi^{\mathfrak{A}_\xi\cap\mathcal{N}_\xi} \subset \prod_{\xi'<\xi} F_{\xi'} \ .$$

Remarquons que F_ξ ne dépend pas des choix faits en 1.1 lors de la définition de θ_ξ (choix de $\bar\sigma$ relevant σ) et de θ_ξ^α (choix d'une racine carrée de $\theta_\xi^{2\alpha}$). Désignons par $\mathfrak{B}_\xi$ l'image de $\mathfrak{A}_\xi$ dans $\mathbb{Z}[\zeta_{g_\xi}]$

par l'application déduite de (9) et $N(\mathfrak{B}_\xi)$ la norme de cet idéal. On peut alors énoncer :

THEOREME 2. - <u>L'indice de</u> F <u>dans</u> E <u>vérifie les égalités</u> :

$$[E:F] = \frac{C_G}{[G]}\Big(\prod_{\xi\neq\xi_0} N(\mathfrak{B}_\xi)\Big)h = [E:\prod_\xi E_\xi]\cdot\prod_\xi [E_\xi : F_\xi \prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}] \; .$$

Pour démontrer le théorème 2, nous considérerons le diagramme

$$\mathfrak{A}_\xi+\mathcal{N}_\xi/\mathcal{N}_\xi \simeq \mathfrak{A}_\xi/\mathfrak{A}_\xi\cap\mathcal{N}_\xi \xrightarrow{p_\xi} F_\xi/F_\xi\cap\prod_{\xi'<\xi} F_{\xi'} \xrightarrow{q_\xi} E_\xi/\prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}$$

qui permet de définir une application $\mathfrak{B}_\xi \to E_\xi/\prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}$. Le lemme 4 et la fin de 3.1 montrent que cette application est injective : il en résulte que p_ξ est un isomorphisme et que q_ξ est une injection.

4.2. Démontrons le lemme :

LEMME 5. - <u>On a</u> $[E:F] = [E:\prod E_\xi] \prod_\xi [E_\xi:F_\xi \prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}]$

<u>Démonstration</u> : nous allons construire des bases de $(\prod E_\xi)/\{\pm 1\}$ et $(\prod F_\xi)/\{\pm 1\}$. Pour cela numérotons les caractères ξ de façon à vérifier : $\xi_i < \xi_j \Rightarrow i<j$. Ceci est compatible avec la définition de ξ_0 (§ 1). Observons qu'on a

$$E_{\xi_k} \cap \prod_{i<k} E_{\xi_i} = \prod_{\xi'<\xi_k} E_{\xi'} \; .$$

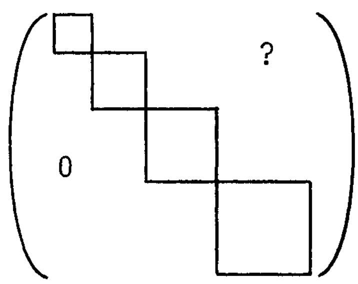
En effet, soit α un élément de E_{ξ_k} qui est dans $\prod_{i<k} E_{\xi_i}$. Sa norme de K à K_{ξ_k} est une puissance de α qui est dans $\prod_{\xi'<\xi_k} E_{\xi'}$. Donc d'après la prop.2, α est dans $\prod_{\xi'<\xi_k} E_{\xi'}$. L'égalité précédente résulte immédiatement de l'inclusion ainsi démontrée. Elle permet de construire par récurrence une base de $(\prod_{i=0}^{k} E_{\xi_i})/\{\pm 1\}$: ayant une base de $(\prod_{i=0}^{k-1} E_{\xi_i})/\{\pm 1\}$, on la complète en remontant une base du $\mathbb{Z}$-module libre (cf. prop.2) $E_{\xi_k}/\prod_{\xi'<\xi_k} E_{\xi'}$.

D'autre part, on a une suite d'inclusions :

$$F_{\xi_k} \cap \prod_{i<k} F_{\xi_i} \subseteq F_{\xi_k} \cap \prod_{i<k} E_{\xi_i} \subseteq F_{\xi_k} \cap \prod_{\xi'<\xi_k} E_{\xi'} \subseteq F_{\xi_k} \cap \prod_{\xi'<\xi_k} F_{\xi'} \subseteq F_{\xi_k} \cap \prod_{i<k} F_{\xi_i} .$$

Ces inclusions sont donc des égalités et on peut construire une base de $(\prod F_\xi)/\{\pm 1\}$ par la même méthode que pour $(\prod E_\xi)/\{\pm 1\}$. Remarquons que pour chaque k , les bases de $F_{\xi_k}/(\prod_{\xi'<\xi_k} F_{\xi'}) \cap F_{\xi_k}$ sont en correspondance avec celles de $\mathfrak{B}_{\xi_k}$.

L'indice $[\prod E_\xi : \prod F_\xi]$ est au signe près le déterminant de la matrice exprimant une base de $(\prod F_\xi)/\{\pm 1\}$ dans une base de $(\prod E_\xi)/\{\pm 1\}$. Avec les bases introduites plus haut cette matrice est triangulaire par blocs, i.e. de la forme :



;

son déterminant est égal au produit des déterminants des blocs ; or le $k^{\text{ième}}$ bloc, correspondant à ξ_k , est la matrice exprimant une base de $F_{\xi_k}/F_{\xi_k} \cap \prod_{\xi'<\xi_k} F_{\xi'}$ dans une base de $E_{\xi_k}/\prod_{\xi'<\xi_k} E_{\xi'}$: c'est au signe près $[E_{\xi_k} : F_{\xi_k} \prod_{\xi'<\xi_k} E_{\xi'}]$. D'où le lemme.

4.3. On suppose $\xi \neq \xi_o$.

LEMME 6. - <u>On a</u> : $[E_\xi : F_\xi \prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}] = [E_\xi : F^o_\xi \prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}] \dfrac{N(\mathfrak{B}_\xi)}{\prod_{p|g_\xi} p^{\varphi(g_\xi)/p-1}}$.

<u>Démonstration</u> : grâce à l'injectivité de $q_\xi \circ p_\xi$, on voit que l'indice $[F_\xi \prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'} : F^o_\xi \prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}]$ est égal à $[\mathfrak{U}_\xi + \eta_\xi : \mathfrak{U}^o_\xi + \eta_\xi]$ i.e.

à $[\mathfrak{B}_\xi:\mathfrak{B}_\xi^o] = \dfrac{N(\mathfrak{B}_\xi^o)}{N(\mathfrak{B}_\xi)}$. L'idéal $\mathfrak{B}_\xi^o$ est engendré par $\prod_{p|g_\xi} (1-\zeta_{g_\xi}^{g_\xi/p}) = \prod_{p|g_\xi} (1-\zeta_p)$. Sa norme est donc (cf. 2.1) $\prod_{p|g_\xi} p^{\varphi(g_\xi)/p-1}$, d'où le lemme.

4.4. Le théorème 2 résulte alors du théorème 1, des deux lemmes précédents et de (6).

§5. - APPLICATION A DIFFERENTS GROUPES

5.1. Pour chaque ξ , $\xi \neq \xi_o$, soit $\mathfrak{A}_\xi^1$ l'idéal d'augmentation de G_ξ . Rappelons d'abord que d'après [5] , §8, on a :

$$\forall \xi' \ , \ \xi' < \xi \ , \quad \theta_\xi^{2N_{\xi,\xi'}} = (-1)^\varepsilon \theta_{\xi'}^{2u} \qquad (10)$$

avec $\varepsilon = s(\xi') + s(\xi)g_\xi/g_{\xi'}$ et $u = 1$ si f_ξ et $f_{\xi'}$ ont mêmes facteurs premiers et avec $\varepsilon = s(\xi)g_\xi/g_{\xi'}$ et $u \in \mathfrak{A}_{\xi'}^1$ sinon. Dans la suite, nous disons qu'un nombre entier est composé s'il possède au moins deux facteurs premiers distincts.

5.2. Définissons F_ξ^1 , F^1 , $\mathfrak{B}_\xi^1$ comme dans 4.1. D'après (10), on a

$$\forall \xi' \ , \ \theta_\xi^{\mathfrak{A}_\xi^1 . N_{\xi,\xi'}} \subseteq \pm\, \theta_{\xi'}^{\mathfrak{A}_{\xi'}^1}$$

ce qui, compte tenu de l'égalité $\mathfrak{A}_\xi^1 . \mathcal{N}_\xi = \mathfrak{A}_\xi^1 \cap \mathcal{N}_\xi$ prouve (N) . Le théorème 2 s'applique et donne (puisque $\mathfrak{B}_\xi^1 = (1-\zeta_{g_\xi}).\mathbb{Z}[G_\xi]$) :

COROLLAIRE 1. - <u>On a</u> $[E:F^1] = h \dfrac{C_G}{[G]} \prod_{\xi \neq \xi_o} N(\mathfrak{B}_\xi^1)$, <u>où</u> $N(\mathfrak{B}_\xi^1)$ <u>est égal à</u> 1 <u>si</u> g_ξ <u>est composé et à</u> ℓ <u>si</u> g_ξ <u>est puissance d'un nombre premier</u> ℓ .

<u>Exemple</u> : si $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on a : $[E:F^o] = 27648\,h$ et $[E:F^1] = 16h$. Remarquons que si G est cyclique $\prod_{\xi \neq \xi_o} N(\mathfrak{B}_\xi^1)$ vaut

[G] et on retrouve les résultats de [3] §17 : Hasse y définit F^1 comme groupe engendré par un système explicite : pour retrouver ce système, il suffit de choisir pour chaque ξ $(\xi \neq \xi_o)$ une base de $\mathbb{Z}[\zeta_{g_\xi}]$ d'où par multiplication par $1-\zeta_{g_\xi}$ une base de $\mathfrak{B}^1_\xi$ et donc une base de $F^1_\xi / F^1_\xi \cap (\prod_{\xi'<\xi} F^1_{\xi'})$. En procédant comme en 4.2, on obtient un système qui avec ± 1 engendre F^1. Ainsi nous avons rendu canonique la construction de [3] : elle ne dépend pas du choix de la base de $\mathbb{Z}[\zeta_{g_\xi}]$ effectué pour chaque ξ.

5.3. Pour $\xi \neq \xi_o$ soit $\mathfrak{A}^2_\xi$ l'idéal $\{\alpha \in \mathbb{Z}[G_\xi] \mid \pm\theta_\xi^\alpha \in E\}$ et définissons comme dans 4.1, F^2_ξ, F^2, $\mathfrak{B}^2_\xi$. Posons $\ell_\xi = N(\mathfrak{B}^1_\xi)/N(\mathfrak{B}^2_\xi)$ et donnons sa valeur (comparer à [2] p. 85) :

a) si f_ξ est puissance d'un nombre premier, on a $\mathfrak{A}^2_\xi = \mathfrak{A}^1_\xi$, $\mathfrak{B}^2_\xi = \mathfrak{B}^1_\xi$, $\ell_\xi = 1$.

b) si f_ξ est composé, θ_ξ est une unité. On sait alors que $\theta_\xi^{\mathfrak{A}^1_\xi + 2\mathbb{Z}[G_\xi]}$ est inclus dans E. Comme l'indice de $\mathfrak{A}^1_\xi + 2\mathbb{Z}[G_\xi]$ dans $\mathbb{Z}[G_\xi]$ vaut 2, deux cas peuvent se produire :

i) $\theta_\xi \notin K$, d'où $\mathfrak{A}^2_\xi = \mathfrak{A}^1_\xi + 2\mathbb{Z}[G_\xi]$. Si g_ξ est composé $\mathfrak{B}^2_\xi = \mathfrak{B}^1_\xi$ et $\ell_\xi = 1$; même résultat si g_ξ est puissance de 2. Si g_ξ est puissance d'un nombre premier impair, $\mathfrak{B}^2_\xi = \mathbb{Z}[\zeta_{g_\xi}]$ d'où $\ell_\xi = \ell$

ii) $\theta_\xi \in K$, d'où $\mathfrak{A}^2_\xi = \mathbb{Z}[G_\xi]$. Si g_ξ est composé ℓ_ξ vaut 1 ; si g_ξ est puissance d'un nombre premier ℓ, $\ell_\xi = \ell$.

LEMME 7. - <u>Si</u> f_ξ <u>est composé et</u> g_ξ <u>est une puissance de</u> 2, <u>on a</u>

$$\theta_\xi^{\mathfrak{A}^2_\xi \cap \mathcal{N}_\xi} \subset \pm\theta_{\xi'}^{\mathfrak{A}^2_{\xi'}}$$

<u>où</u> ξ' <u>est tel que</u> $[K_\xi : K_{\xi'}] = 2$.

<u>Démonstration</u> : si f_ξ et $f_{\xi'}$ n'ont pas les mêmes facteurs premiers, la formule (10) donne :

$$\theta_\xi^{N_{\xi,\xi'}} \subseteq \pm\theta_{\xi'}^{\mathbb{Z}[G_{\xi'}]} . \tag{11}$$

Supposons maintenant que f_ξ et $f_{\xi'}$ ont les mêmes facteurs premiers : (11) est encore vérifié si $s(\xi')$ est pair. Si $s(\xi')$ est impair, notons $\mathbb{Q}(\zeta_{f_\xi})^+$ (resp. $\mathbb{Q}(\zeta_{f_{\xi'}})^+$) le sous-corps réel maximum de $\mathbb{Q}(\zeta_{f_\xi})$ (resp. de $\mathbb{Q}(\zeta_{f_{\xi'}})$) . Le diagramme des corps

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
K_\xi \arrow[r] \arrow[d, "2"'] & \mathbb{Q}(\zeta_{f_\xi})^+ \arrow[d] \\
K_{\xi'} \arrow[r, "s(\xi')"'] & \mathbb{Q}(\zeta_{f_{\xi'}})^+
\end{tikzcd}$$

prouve que $f_\xi = 2f_{\xi'}$ et que $K_\xi/K_{\xi'}$ est non ramifiée en dehors de 2 . Il en est alors de même pour $K_\xi/\mathbb{Q}$, contrairement aux hypothèses du lemme. Avec ces hypothèses (11) est donc toujours vérifié. Puisque η_ξ est engendré par $N_{\xi,\xi'}$, on déduit de (11)

$$\theta_\xi^{\eta_\xi \mathbb{Z}[G_\xi]} \cap K \subseteq (\pm\theta_{\xi'}^{\mathbb{Z}[G_{\xi'}]}) \cap K ,$$

ce qui prouve le lemme 7 d'après la définition même des idéaux $\mathfrak{a}_\xi^2$ et $\mathfrak{a}_{\xi'}^2$.

LEMME 8. - <u>On a</u> $\mathfrak{a}_\xi^2 \cap \eta_\xi = \mathfrak{a}_\xi^2 . \eta_\xi$, <u>sauf peut-être dans le cas où</u> f_ξ <u>est composé et</u> g_ξ <u>est puissance de</u> 2 .

<u>Démonstration</u> : l'assertion du lemme se voit facilement dans les cas a et b ii) définis plus haut. Dans le cas b i), $\mathfrak{a}_\xi^2$ est le noyau de l'application de $\mathbb{Z}[G_\xi]$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ envoyant $\sum n_\tau . \tau$ (τ parcourant G_ξ) sur la classe modulo 2 de $\sum n_\tau$, si bien qu'on peut écrire un diagramme commutatif où les lignes sont des suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{a}_\xi^2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}[G_\xi] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{a}_\xi^2 \arrow[r] & \mathbb{Z}[G_\xi] \arrow[r] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et où les colonnes sont définies par multiplication par $P_{g_\xi}(\sigma(\xi))$

-cf. prop.1- ou $P_{g_\xi}(1)$. Le lemme du serpent permet d'écrire une suite exacte

$$\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}+P_{g_\xi}(1)\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathfrak{A}_\xi^2/\mathfrak{A}_\xi^2.\eta_\xi \longrightarrow \mathbb{Z}[G_\xi]/\eta_\xi \ .$$

Comme $P_{g_\xi}(1)$ est la norme de $(1-\zeta_{g_\xi})$, il n'est divisible par 2 que si g_ξ est une puissance de 2 . Si ce n'est pas le cas, le groupe de gauche dans la suite exacte précédente est nul, d'où le lemme 8.

LEMME 9. - <u>La condition</u> (N) <u>est vérifiée pour la famille d'idéaux</u> $\mathfrak{A}_\xi = 2\mathfrak{A}_\xi^2$.

<u>Démonstration</u> : d'après les lemmes 7 et 8, il suffit de démontrer

$$\theta_\xi^{\mathfrak{A}_\xi^2.N_{\xi,\xi'}} \subset \pm\, \theta_{\xi'}^{\mathfrak{A}_{\xi'}^2} \qquad (12)$$

pour tout couple de caractères ξ et ξ' tels que $K_{\xi'}$ soit inclus dans K_ξ avec $[K_\xi:K_{\xi'}]$ premier, ce que nous supposerons désormais. Il résulte de (10) que (12) est vérifié dans les cas a) et b i). Dans le cas b ii) on a $\mathfrak{A}_\xi^2 = \mathbb{Z}[G_\xi]$ et on sait que θ_ξ est réel, donc que $s(\xi)$ est pair (cf(2)). Si f_ξ et $f_{\xi'}$ n'ont pas les mêmes facteurs premiers, $\theta_\xi^{N_{\xi,\xi'}}$ et $\theta_{\xi'}^u$ sont dans K -u comme dans (10)- et l'on déduit de (10) et du fait que K est réel

$$\theta_\xi^{N_{\xi,\xi'}} = \pm\, \theta_{\xi'}^u \in \theta_{\xi'}^{\mathfrak{A}_{\xi'}^2} \ .$$

Si f_ξ et $f_{\xi'}$ ont les mêmes facteurs premiers, on a

$$s(\xi')/s(\xi) = (f_\xi/f_{\xi'})^{-1}(g_\xi/g_{\xi'})$$

et $s(\xi')$ est pair comme $s(\xi)$: c'est clair si $f_\xi/f_{\xi'}$ est impair ; si $f_\xi/f_{\xi'}$ est pair, puisque $[K_\xi:K_{\xi'}]$ est premier, on a forcément $[K_\xi:K_{\xi'}] = 2 = f_\xi/f_{\xi'}$ d'où $s(\xi) = s(\xi')$. De la parité de $s(\xi')$ on tire alors de (10) :

$$\theta_\xi^{N_{\xi,\xi'}} = \pm\,\theta_{\xi'} \in (\pm\, \theta_{\xi'}^{\mathbb{Z}[G_{\xi'}]}) \cap K = \pm\, \theta_{\xi'}^{\mathfrak{A}_{\xi'}^2} \ .$$

Le lemme 9 permet d'appliquer le théorème 2 à la famille $F_\xi = \pm\theta_\xi^{2\mathfrak{A}_\xi^2}$ $(\xi \neq \xi_o)$, $F_{\xi_o} = \pm 1$ de sous-groupes des groupes E_ξ . En extrayant alors les racines carrées on obtient :

COROLLAIRE 2. - On a $[E:F^2] = \dfrac{C_G}{[G]}\cdot h \cdot \prod_{\xi \neq \xi_o} \dfrac{N(\mathfrak{B}_\xi^1)}{\ell_\xi}$.

Remarquons que si G est cyclique on peut écrire les résultats sous la forme :

$$[E:F^2] = \prod_\xi [E_\xi : F_\xi^2 \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'}] = \frac{h}{\prod_{\xi \neq \xi_o} \ell_\xi} \quad .$$

On obtient ainsi la divisibilité de h par $\prod_{\xi \neq \xi_o} \ell_\xi$: ce résultat est une conséquence de la théorie des genres.

5.4. Dans [2] G. Gras considère l'idéal $\mathfrak{A}_\xi^3 = \{\alpha \in \mathbb{Z}[G_\xi] \mid \pm\theta_\xi^\alpha \in E_\xi\}$, et suppose G cyclique. Le théorème 2 s'applique sans cette restriction : les résultats sont alors similaires à ceux de 5.3 en remplaçant la condition $\theta_\xi \in K$ (resp. $\theta_\xi \notin K$) par $\theta_\xi \in K_\xi$ (resp. $\theta_\xi \notin K_\xi$) . En plus par rapport à [2] nous avons une formule pour l'indice de F^3 (défini comme dans 4.1) dans E , tout à fait analogue au corollaire 2. On peut remarquer que lorsque G est cyclique, il résulte du lemme 2' que pour tout ξ les idéaux $\mathfrak{A}_\xi^2$ et $\mathfrak{A}_\xi^3$ sont égaux.

5.5. Si on pose $h_\xi^i = [E_\xi : F_\xi^i \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'}]$ pour $i = 0,1,3$, alors on peut écrire une formule comparable à [5] , §9 satz 21, c'est-à-dire de la forme

$$h = \frac{Q'_K}{Q_G^i} \prod_\xi h_\xi^i$$

avec $Q'_K = [E : \prod E_\xi]$ (c'est un diviseur de l'indice Q_K^+ de [5] ; $Q'_K = 1$ si G est cyclique) et Q_G^i coefficient ne dépendant pour $i = 0,1,3$ que de la structure du groupe G . De plus h_ξ^i (i fixé) est une fonction du couple (K,ξ) qui ne dépend que de K_ξ si $i = 0,1$ ou 3 .

§ 6. - LOCALISATION

Soit ℓ un nombre premier et décomposons G en un produit d'un ℓ-groupe Γ par un groupe Δ d'ordre premier à ℓ. Choisissons une valeur absolue dans une clôture algébrique Ω_ℓ de $\mathbb{Q}_\ell$ telle qu'on ait $|\ell| = 1/\ell$. Soit Φ un caractère de Δ défini et irréductible sur $\mathbb{Q}_\ell$, Φ non trivial, d la dimension de Φ et

$$e_\Phi = \frac{1}{[\Delta]} \sum_{\sigma\in\Delta} \Phi(\sigma^{-1})\sigma$$

l'idempotent de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ correspondant. Désignons par Φ^* le caractère de G induit par Φ.

Pour chaque idéal premier $\mathfrak{L}$ de K au-dessus de ℓ, désignons par $U_\mathfrak{L}$ le groupe des unités du complété correspondant $K_\mathfrak{L}$ de K, qui sont congrues à 1 modulo le complété de $\mathfrak{L}$. Soit U le produit des groupes $U_\mathfrak{L}$. Considérons (pour $i = 0,1,2,3$) l'intersection de U et de l'image de F^i par l'application diagonale $K \to \prod_{\mathfrak{L}|\ell} K_\mathfrak{L}$.
Désignons par $\overline{C}_i$ sa fermeture dans U muni de la topologie produit. On sait que $U/\overline{C}_i$ est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module. Si χ est un caractère de G intervenant dans la décomposition de Φ^* en caractères absolument irréductibles sur Ω_ℓ (on écrit $\chi|\Phi^*$), notons $L_\ell(s,\underline{\chi})$ la fonction L ℓ-adique associée au caractère de Dirichlet primitif $\underline{\chi}$ défini par χ (cf. [4]). D'après [1], le groupe $e_\Phi(U/\overline{C}_0)$ est fini d'ordre

$$[e_\Phi(U/\overline{C}_0)] = (N_\Gamma)^d \left| \prod_{\chi|\Phi^*} \frac{L_\ell(1,\chi)}{2} \right|^{-1} .$$

THEOREME 3. - <u>Pour</u> $i = 1,2,3$, <u>on a</u> :

$$[e_\Phi(U/\overline{C}_i)] = (C_\Gamma)^d \left| \prod_{\chi|\Phi^*} \frac{L_\ell(1,\chi)}{2} \right|^{-1} .$$

<u>Si</u> Γ <u>est cyclique</u> C_Γ <u>vaut</u> 1 <u>et on retrouve le résultat de</u> [1], § 5.

Démonstration : soit ξ un caractère de G défini et irréductible sur $\mathbb{Q}$. Observons d'abord que si Φ ne figure pas dans la décomposition sur $\mathbb{Q}_\ell$ de la restriction de ξ à Δ on a (Δ opérant sur $\mathbb{Z}[G_\xi]/\eta_\xi$ via $\mathbb{Z}[\Delta] \hookrightarrow \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G_\xi] \to \mathbb{Z}[G_\xi]/\eta_\xi$) :

$$e_\Phi((\mathbb{Z}[G_\xi]/\eta_\xi) \otimes \mathbb{Z}_\ell) = 0 \, . \tag{13}$$

Supposons maintenant que Φ intervienne dans la décomposition sur $\mathbb{Q}_\ell$ de la restriction de ξ à Δ. Soit g'_ξ le plus grand diviseur de g_ξ premier à ℓ. On voit alors que la restriction de ξ à Γ est égale à $\varphi(g'_\xi)$ fois un caractère λ de Γ défini et irréductible sur $\mathbb{Q}$. Notons g_λ l'indice de $\ker\lambda = \{\sigma\in\Gamma \mid \lambda(\sigma) = \lambda(1)\}$ dans Γ ; g_λ est la plus grande puissance de ℓ divisant g_ξ. De plus ξ est caractérisé par λ. Soit χ un facteur de la décomposition de ξ sur Ω_ℓ ; χ permet de définir un isomorphisme

$$e_\Phi((\mathbb{Z}[G_\xi]/\eta_\xi)\otimes\mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell[\zeta_{g_\xi}] \ ; \tag{14}$$

à un élément $e_\Phi(\bar{\alpha}\otimes 1)$ avec $\bar{\alpha}$ appartenant à $\mathbb{Z}[G_\xi]/\eta_\xi$, on associe $\chi(\alpha)$ où α est un élément d'image $\bar{\alpha}$ par la surjection composée

$$\mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}[G_\xi] \longrightarrow \mathbb{Z}[G_\xi]/\eta_\xi \, .$$

Nous pouvons maintenant aborder la démonstration du théorème 3, en notant que l'on peut supposer Γ non trivial (sinon $N_\Gamma = C_\Gamma = 1$). Il suffit de montrer que $e_\Phi((F_i/F_o)\otimes\mathbb{Z}_\ell)$ est d'ordre $(N_\Gamma/C_\Gamma)^d$. Or en raisonnant comme en 4.2 et 4.3, on voit qu'on a :

$$[e_\Phi((F_i/F_o)\otimes\mathbb{Z}_\ell)] = \prod_\xi [e_\Phi([(\mathfrak{A}^i_\xi+\eta_\xi)/(\mathfrak{A}^o_\xi+\eta_\xi)] \otimes \mathbb{Z}_\ell] \, .$$

D'après (13), on peut se restreindre aux caractères ξ tels que Φ intervienne dans la décomposition sur $\mathbb{Q}_\ell$ de leur restriction à Δ. On utilise alors l'isomorphisme (14) : $e_\Phi((\mathfrak{A}^1_\xi+\eta_\xi)\otimes\mathbb{Z}_\ell)$ est envoyé sur l'idéal de $\mathbb{Z}_\ell[\zeta_{g_\xi}]$ engendré par $1-\zeta_{g_\xi}$; mais Φ étant non trivial cet idéal est $\mathbb{Z}_\ell[\zeta_{g_\xi}]$ lui-même. Pour $e_\Phi((\mathfrak{A}^i_\xi+\eta_\xi)\otimes\mathbb{Z}_\ell)$ avec $i = 2$ ou 3, le résultat est similaire. Par l'isomorphisme (14) , $e_\Phi((\mathfrak{A}_\xi^o+\eta_\xi)\otimes\mathbb{Z}_\ell)$ est envoyé sur l'idéal de $\mathbb{Z}_\ell[\zeta_{g_\xi}]$ engendré par $\prod_{p|g_\xi}(1-\zeta_p)$ donc aussi par $1-\zeta_\ell$ (par 1 si λ est trivial). Comme le degré de $\mathbb{Q}_\ell[\zeta_{g_\xi}]$ sur $\mathbb{Q}_\ell$ est $d.\varphi(g_\lambda)$, la norme de $1-\zeta_\ell$ (si λ est non trivial) est égale à la puissance $d\varphi(g_\lambda)/(\ell-1)$ de ℓ . On a donc :

$$[e_\Phi(F_i/F_o)\otimes\mathbb{Z}_\ell] = \left(\prod_\lambda \ell^{\varphi(g_\lambda)/\ell-1}\right)^d$$

où dans le produit, λ parcourt l'ensemble des caractères non triviaux de Γ définis et irréductibles sur $\mathbb{Q}$. Ceci achève la démonstration du théorème en vertu de (6) .

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. GILLARD - Unités cyclotomiques et unités semi-locales. Séminaire de théorie des Nombres de Grenoble, 28 avril 1977.

[2] G. GRAS - Application de la notion de φ-objet à l'étude du groupe des classes d'idéaux des extensions abéliennes. Fac. Sc. de Besançon théorie des nombres. Fasc. 2 (75-76).

[3] H. HASSE - Uber die Klassenzahl abelscher Zahlkörper. Akademie Verlag Berlin 1952.

[4] K. IWASAWA - Lectures on p-adic L functions. Ann. Math. Studies 74, Princeton Univ. Press.

[5] H. LEOPOLDT - Uber Einheitgruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper. Abh. Deutschen Akad. Wiss. Berlin 2 (1954).

Laboratoire de Mathématiques Pures - Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES (France)