SÉMINAIRE DE THÉORIE DES NOMBRES DE GRENOBLE

MARIE-JOSÉE FERTON

Décomposition du Galois-module des entiers d'une extension diédrale de degré $2p$ d'un corps local d'un corps de nombres

Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, tome 9 (1980-1981), exp. n° 6, p. 1-35

<http://www.numdam.org/item?id=STNG_1980-1981__9__A6_0>

Séminaire de Théorie des Nombres
23 avril 1981
Grenoble

DECOMPOSITION DU GALOIS-MODULE DES ENTIERS D'UNE EXTENSION DIEDRALE DE DEGRE 2p D'UN CORPS LOCAL OU D'UN CORPS DE NOMBRES

par Marie-Josée FERTON

Soit A un anneau de Dedekind de corps des quotients K et soit L une extension galoisienne de K de groupe de Galois G. La clôture intégrale B de A dans L est un $A[G]$-module de rang 1. On cherche à décomposer B en une somme directe de sous $A[G]$-modules indécomposables, et on se propose ici de traiter les cas où K est un corps local ou un corps de nombres et où G est un groupe diédral d'ordre $2p$ (p nombre premier distinct de 2).

Lorsque le groupe G est un groupe abélien cette décomposition est unique. Elle a été déterminée dans certains cas par :

- H.W. Leopoldt [6] (lorsque K est le corps des rationnels) ;
- F. Bertrandias [2] et [2 bis] (lorsque G est une Γ-extension de degré p^n d'un corps local) ;
- Z.I. Borevich et S.V. Vostokov [3] (G cyclique de degré p, K corps local) ;

Dans d'autres cas, on sait seulement reconnaître si B est un $A[G]$-module décomposable ou non

- Y. Miyata [7] ;
- S.V. Vostokov [10] (G groupe abélien).

Dans la suite G sera toujours un groupe diédral, d'ordre $2p$. On notera σ et τ , deux générateurs de G tels que $\sigma^p = \tau^2 = 1$ et que $\sigma\tau = \tau\sigma^{-1}$; on notera H le sous-groupe cyclique de G d'ordre p engendré par σ .

Dans le §I , nous verrons des généralités sur la décomposition d'un $A[G]$-module M , de rang 1 .

Dans le §II , nous étudierons la décomposition du $A[G]$-module B dans le cas où le corps K est un corps local de caractéristique résiduelle p , et nous donnerons cette décomposition.

Dans le §III enfin, nous nous intéresserons à l'existence de cette décomposition dans le cas où K est un corps de nombres.

Ce travail s'inspire de la méthode employée par F. Bertrandias dans [2] .

§ I

I.1. DECOMPOSITIONS D'UN A(G)-MODULE DE RANG 1

Dans ce §I , A désigne un anneau de Dedekind de corps des quotients K ; nous ferons plus tard une hypothèse sur K . M est un $A[G]$-module à gauche de rang 1 tel que $A[G] \subset M \subset K[G]$. Notons $\mathrm{End}_{A[G]} M$ l'anneau des $A[G]$-endomorphismes de M . On sait, (cf. [2]) que trouver une décomposition de M en somme directe de sous-$A[G]$-modules indécomposables revient à trouver un système complet orthogonal d'idempotents primitifs de $\mathrm{End}_{A[G]} M$. Etudions donc $\mathrm{End}_{A[G]} M$.

PROPOSITION 1. - Si M est un $A[G]$-module à gauche de rang 1, le commutant de M, $\mathrm{End}_{A[G]} M$, est isomorphe à l'ordre à droite de M dans $K[G]$ noté $\mathcal{O}_d(M, K[G])$ et défini par :

$$\mathcal{O}_d(M, K[G]) = \{\lambda \in K[G] \ , \ M\lambda \subset M\} .$$

Il suffit pour établir cette proposition de démontrer que l'application, qui à un λ de $\mathcal{O}_d(M, K[G])$ fait correspondre dans $\mathrm{End}_{A[G]} M$, la multiplication à droite par λ dans M, est un isomorphisme.

Trouver une décomposition de M en sous-$A[G]$-modules indécomposables c'est donc trouver un système complet orthogonal d'idempotents primitifs de $\mathcal{O}_d(M, K[G])$. Mais nous chercherons tout d'abord à décomposer M en somme directe de sous-modules "caractéristiques indécomposables".

DEFINITION 1. - Un sous-$A[G]$-module M' de M sera dit "caractéristique" si et seulement si pour tout f de $\mathrm{End}_{A[G]} M$, $f(M') \subset M'$.

DEFINITION 2. - Un sous-$A[G]$-module M' de M sera dit "caractéristique indécomposable" si il est caractéristique et si il ne peut se décomposer en somme directe de deux sous-modules caractéristiques non triviaux.

PROPOSITION 2. - Une décomposition de M en somme directe de sous-modules caractéristiques indécomposables correspond à un système complet orthogonal d'idempotents centraux primitifs de $\mathrm{End}_{A[G]} M$ ou de $\mathcal{O}_d(M, K[G])$. Nous appellerons une telle décomposition : "décomposition centrale".

PROPOSITION 3. - M étant un $A[G]$-module de rang 1, il existe une et une seule décomposition centrale de M.

Ce qui s'énonce aussi plus précisément par :

PROPOSITION 3 bis. - Il existe un seul système complet orthogonal d'idempotents centraux primitifs dans $\mathcal{O}_d(M, K[G])$. Ce système est l'ensemble de tous les idempotents centraux primitifs de $\mathcal{O}_d(M, K[G])$ non triviaux.

Démonstration. Soit $(E_i)_{1\leq i\leq k}$ un système complet d'idempotents centraux primitifs de $\mathcal{O}_d(M, K[G])$ et e un idempotent central primitif quelconque de cet ordre. On peut écrire $e = \sum_{1\leq i\leq k} eE_i = \sum_{1\leq i\leq k} E_i e$. Donc il existe un indice i, $1 \leq i \leq k$ tel que $e = eE_i = E_i e$ et $E_j e = 0$ pour tout $j \neq i$.

Ecrivons alors $E_i = e + (E_i - e)$; e et $E_i - e$ sont deux idempotents centraux orthogonaux, ce qui entraîne $E_i = e$.

L'ordre à droite de M dans $K[G]$ étant un sous-anneau de $K[G]$, les idempotents centraux de $\mathcal{O}_d(M, K[G])$ seront des idempotents centraux de $K[G]$. Le paragraphe suivant sera donc consacré au rappel de l'étude des idempotents centraux d'une algèbre $K[G]$ pour un groupe G diédral.

I.2. IDEMPOTENTS CENTRAUX DE L'ALGEBRE K(G)

Notations. Pour tout corps F et tout groupe g nous noterons $\mathrm{Irr}_F(g)$ l'ensemble des caractères irréductibles de g sur F, et $\mathrm{Irr}^*_F(g)$ l'ensemble des caractères irréductibles de g sur F distincts du caractère de la représentation unité.

Dans ce paragraphe, K est un corps local de caractéristique 0 et de caractéristique résiduelle p ou bien un corps de nombres. Nous noterons, k le corps $\mathbb{Q}_p$ ou bien le corps $\mathbb{Q}$ suivant que K est un corps local ou un corps de nombres. Si ζ est une racine primitive p-ième de

l'unité nous noterons k'_0 , K'_0 et E les corps suivants :

$$k'_0 = k(\zeta+\zeta^{-1}) ,$$
$$K'_0 = K(\zeta+\zeta^{-1}) ,$$
$$E = k'_0 \cap K .$$

En sachant que l'indice de Schur de tout caractère irréductible d'un groupe diédral G vaut 1 , on démontre que la décomposition de l'algèbre $K[G]$ (cf. [9 bis], chapitres [5] et [12].2) est :

$$K[G] = \underbrace{K \times K \times \mathbb{M}_2(K'_0) \times \ldots \times \mathbb{M}_2(K'_0)}_{\frac{p-1}{2\,\mathrm{Card}[K'_0:K]} \text{ fois}}$$

où $\mathbb{M}_2(K'_0)$ est l'anneau des matrices d'ordre 2 à coefficients dans K'_0 . Les caractères irréductibles de G sur K étant de plus à valeurs dans k'_0 , leur ensemble est celui des caractères irréductibles de G sur E . En particulier, les idempotents centraux primitifs de $K[G]$ sont ceux de l'algèbre $E[G]$.

PROPOSITION 1. - Soit $\mathcal{C}(K[G])$ l'ensemble des idempotents centraux primitifs de $K[G]$, on a :

$$\mathcal{C}(K[G]) = \{e_\chi , \chi \in \mathrm{Irr}_E(G)\}$$
$$= \{e_{\chi_0}, e_{\chi'_0} ; e_{\chi'} = \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p} \chi'(\sigma^{-i}) , \chi' \in \mathrm{Irr}^*_E(H)\}$$

où on note $T = \sum_{i=0}^{p-1} \sigma^i$, $e_{\chi_0} = \frac{T(1+\tau)}{2p}$, $e_{\chi'_0} = \frac{T(1-\tau)}{2p}$.

Remarque 1. Les $\frac{p-1}{2[K'_0:K]}$ idempotents correspondants aux représentations de degré supérieur à 1 sont les idempotents centraux primitifs de $E[H]$ distincts de $\frac{T}{p}$.

PROPOSITION 2. - Tout idempotent central de $K[G]$ est une somme d'idempotents centraux primitifs de $E[G]$.

Remarque 2. - Tout idempotent de $E[H]$ est un idempotent central de $E[G]$.

Remarque 3. - Si F et F' sont deux corps tels que $k \subset F \subset F' \subset E$, tout idempotent central primitif de $F[G]$, différent de $\frac{T(1+\tau)}{2p}$ et de $\frac{T(1-\tau)}{2p}$, est somme de $[F':F]$ idempotents centraux primitifs de $F'[G]$ permutés transitivement entre eux par $Gal(F'/F)$ (cf. définition du paragraphe I.3).

Remarque 4. - Tout idempotent central primitif de $K[G]$ est la somme de deux idempotents primitifs orthogonaux de $K[G]$, cette décomposition n'étant pas unique. En particulier, si e est un idempotent central primitif de $K[G]$, on peut écrire : $e = e\frac{1+\tau}{2} + e\frac{1-\tau}{2}$ où $e\frac{1+\tau}{2}$ et $e\frac{1-\tau}{2}$ sont des idempotents primitifs de $K[G]$ orthogonaux entre eux.

I.3. DECOMPOSITION CENTRALE D'UN A(G) MODULE DE RANG 1

PROPOSITION. - Soit $\mathcal{S}$ le système complet d'idempotents centraux primitifs de $\mathcal{O}_d(M, K[G])$; il existe une partition de $Irr_E(G)$, $Irr_E(G) = \bigcup_{1 \le i \le s} J_i$, telle que :

$\mathcal{S} = \{E_i , 1 \le i \le s\}$ avec $E_i = \sum_{\chi \in J_i} e_\chi$.

Cette proposition découle des remarques faites dans les paragraphes 1 et 2 .

DEFINITION. - Si φ est un élément du groupe de Galois de E/k et si $\lambda \in E(G)$, $\lambda = \sum_{g \in G} a_g g$, on définit l'action de φ sur $E[G]$ par :

$\varphi(\lambda) = \sum_{g \in G} \varphi(a_g) g$.

HYPOTHESE H_l. - Nous dirons que M vérifie l'hypothèse H_l, si pour tout élément φ du groupe de Galois de E/k et pour tout idempotent central e de $\mathcal{O}_d(M, K[G]) \cap E[G]$, $\varphi(e)$ est encore un élément de $\mathcal{O}_d(M, K[G])$.

Remarque 1. - L'idempotent e étant central, on peut remplacer dans cette hypothèse $\mathcal{O}_d(M, K[G])$ par l'ordre associé à gauche à M dans $K[G]$, $\mathcal{O}(M, K[G])$ défini par : $\mathcal{O}(M, K[G]) = \{\lambda \in K[G] , \lambda M \subset M\}$.

THEOREME. - Si M est un $A[G]$-module de rang 1 vérifiant l'hypothèse H_l et si M a une décomposition centrale non triviale, nous appellerons F le plus petit sous-corps de E tel que le système $\mathcal{S}$ de $\mathcal{O}_d(M, K[G])$ soit contenu dans $F[G]$. On a alors deux groupes de possibilités :

1) Soit $F \supsetneq k$ et $\mathcal{S} = \left\{\frac{T(1+\tau)}{2p}, \frac{T(1-\tau)}{2p}; \{e_{\chi'}\}, \chi' \in \mathrm{Irr}_F^*(H)\right\} = \left\{e_\chi, \chi \in \mathrm{Irr}_F(G)\right\}$
ou $\mathcal{S} = \left\{e_{\chi'}, \chi' \in \mathrm{Irr}_F(H)\right\}$ (*)

2) Soit $F = k$ et $\mathcal{S} = \{\frac{T(1+\tau)}{2p}, \frac{T(1-\tau)}{2p}, 1-\frac{T}{p}\}$
ou $\mathcal{S} = \{\frac{T(1+\tau)}{2p}, 1-\frac{T(1+\tau)}{2p}\}$
ou $\mathcal{S} = \{\frac{T(1-\tau)}{2p}, 1-\frac{T(1-\tau)}{2p}\}$
ou $\mathcal{S} = \{\frac{T}{p}, 1-\frac{T}{p}\}$ (*) .

Remarque 2. - Les cas (*) ne peuvent se produire que si $\frac{1+\tau}{2} \notin \mathcal{O}_d(M, K[G])$ (cf. §I.4).

COROLLAIRE. - Soit M un $A[G]$-module de rang 1 vérifiant l'hypothèse H_l, M a une décomposition centrale non triviale si et seulement si un des idempotents $\frac{T(1+\tau)}{2p}$, $\frac{T(1-\tau)}{2p}$, $\frac{T}{p}$ au moins se trouve dans $\mathcal{O}_d(M, K[G])$ ou, ce qui revient au même dans $\mathcal{O}(M, K[G])$.

Démonstration du théorème. Supposons $\mathcal{S} \neq 1$.

• Si $F \supsetneq k$, soit f un générateur du groupe de Galois de F/k,

ce groupe $Gal(F/k)$ étant cyclique appelons r_F son ordre. D'après la définition de F, il existe $e \in \mathcal{S}$, $e \neq 1$, tel que les $f^i(e)$, $1 \leq i \leq r_F$ soient tous distincts. D'après l'hypothèse H_1, les $f^i(e)$ sont des idempotents centraux de $\mathcal{O}_d(M, K[G])$, ils sont primitifs et orthogonaux entre eux, ils coïncident donc d'après la proposition précédente et les remarques du §2, avec l'ensemble $\{e_{\chi'}, \chi' \in Irr_F^*(H)\}$. L'élément

$$\frac{T}{p} = 1 - \sum_{i=1}^{r_F} f^i(e) = 1 - \sum_{\chi' \in Irr_F^*(H)} e_{\chi'}$$

est un idempotent central dans $\mathcal{O}_d(M, K[G])$ et sa décomposition dans $F[G]$ est unique et égale à $\frac{T}{p} = \frac{T(1+\tau)}{2p} + \frac{T(1-\tau)}{2p}$, d'où les deux possibilités du théorème dans ce cas.

• Si $F = k$ comme $\mathcal{S} \neq 1$, $\mathcal{S}$ a deux ou trois éléments. Les idempotents centraux primitifs de $K[G]$ étant : $\frac{T(1+\tau)}{2p}$, $\frac{T(1-\tau)}{2p}$ et $1 - \frac{T}{p}$, la fin du théorème s'en déduit facilement.

Remarque 3. Si $F \not\supset k$, pour tout sous corps F' de E, tel que : $\{e_\chi, \chi \in Irr_H^*(F')\} \subset \mathcal{O}_d(M, K[G])$, on a : $F' \subset F$. Ceci résulte de l'unicité du système $\mathcal{S}$ de $\mathcal{O}_d(M, K[G])$.

Remarquons aussi que si L et L' sont deux sous-corps de $k(\zeta)$ tels que $L \subsetneq L' \subset k(\zeta)$, les idempotents centraux primitifs de $L'[G]$ autres que $\frac{T(1+\tau)}{2p}$ et $\frac{T(1-\tau)}{2p}$ n'appartiennent pas à $L[G]$.

I.4 DECOMPOSITION D'UN A[G] MODULE M DE RANG 1, EN SOUS-MODULES INDECOMPOSABLES

HYPOTHESE H_2. - Nous supposerons dans ce § que l'idempotent $\frac{1+\tau}{2}$ est un élément de $\mathcal{O}_d(M, K[G])$.

Nous dirons donc que M vérifie l'hypothèse H_2 si $M\frac{1+\tau}{2} \subset M$, ce qui implique $M\frac{1-\tau}{2} \subset M$.

L'hypothèse H_2 permet de décomposer tout idempotent central e de $\mathcal{O}_d(M, K[G])$, en une somme de deux idempotents orthogonaux dans $\mathcal{O}_d(M, K[G])$ de la manière suivante :

$$e = e\frac{1+\tau}{2} + e\frac{1-\tau}{2} .$$

Les deux modules $M\frac{1+\tau}{2}$ et $M\frac{1-\tau}{2}$ sont des $A[H]$-modules de rang 1, nous pourrons donc dans la suite leur appliquer les résultats de [2].

PROPOSITION 1. - Soit M un $A[G]$-module de rang 1 vérifiant H_2 et soit e un idempotent central de $\mathcal{O}_d(M, K[G])$; la décomposition de $e(\frac{1+\tau}{2})$ [respectivement $e(\frac{1-\tau}{2})$] en somme d'idempotents primitifs de $\mathcal{O}_d(M, K[G])$, deux à deux orthogonaux, se fait de manière unique sous la forme : $e(\frac{1+\tau}{2}) = \sum_{i\in I} \epsilon_i \frac{1+\tau}{2}$ (respectivement $e(\frac{1-\tau}{2}) = \sum_{j\in J} \delta_j \frac{1-\tau}{2}$), où I et J sont des ensembles finis et où pour tout $i \in I$ et tout $j \in J$ ϵ_i et δ_j sont des idempotents de $E[H]$.

Pour démontrer cette proposition et en particulier l'unicité de la décomposition, on utilise le lemme suivant très important dans la suite :

LEMME. - Soit ϵ un idempotent de $E[H]$, il est central dans $E[G]$. L'idempotent $\epsilon\frac{1+\tau}{2}$ est idempotent primitif dans $\mathcal{O}_d(M, K[G])$ si et seulement si ϵ est idempotent primitif dans $\mathcal{O}(M\frac{1+\tau}{2}, K[H])$ ordre associé à gauche dans $E[H]$ au $A[H]$-module $M\frac{1+\tau}{2}$.

HYPOTHESE H. - Nous dirons que M vérifie l'hypothèse H, si M vérifie H_2 et si pour tout idempotent e de $\mathcal{O}(M\frac{1+\tau}{2}, K[H]) \cap E[H]$ et pour tout élément φ de $Gal(E/k)$, $\varphi(e)$ est encore un élément de $\mathcal{O}(M\frac{1+\tau}{2}, K[H]) \cap E[H]$ (de même pour $\mathcal{O}(M\frac{1-\tau}{2}, K[H]) \cap E[H]$).

PROPOSITION 2. - Si M vérifie l'hypothèse H, M vérifie l'ensemble des deux hypothèses H_1 et H_2.

Cette proposition se démontre en utilisant le lemme précédent.

Dans la suite nous décomposerons l'idempotent 1 de $\mathcal{O}_d(M, K[G])$ en $1 = \frac{1+\tau}{2} + \frac{1-\tau}{2}$. Les décompositions de $\frac{1+\tau}{2}$ et $\frac{1-\tau}{2}$ se font de manière unique sous les formes :

$$\frac{1+\tau}{2} = \sum_{i\in I} \epsilon_i \frac{1+\tau}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1-\tau}{2} = \sum_{j\in J} \delta_j \frac{1-\tau}{2} ,$$

et nous montrerons que les idempotents de $E[H]$, ϵ_i pour $i \in I$ et δ_j pour $j \in J$ sont en fait les idempotents primitifs d'algèbres $F'[H]$ et $F''[H]$ où F' et F'' sont des corps situés entre k et E. En faisant une démonstration analogue à celle du théorème du § 3, on démontre le théorème suivant :

THEOREME. - Soit M un $A[G]$-module vérifiant l'hypothèse H.

a) Si $M\frac{1+\tau}{2}$ et $M\frac{1-\tau}{2}$ sont deux modules décomposables, il existe deux corps F' et F'' situés entre k et E tels qu'un système complet d'idempotents orthogonaux primitifs de $\mathcal{O}_d(M, K[G])$ soit composé des idempotents $\{e_{\chi'} \frac{1+\tau}{2}, \chi' \in \mathrm{Irr}_{F'}(H)\}$ et des idempotents $\{e_{\chi''} \frac{1-\tau}{2}, \chi'' \in \mathrm{Irr}_{F''}(H)\}$.

b) Si un de ces deux modules est indécomposable (par exemple $M\frac{1-\tau}{2}$) $\{e_{\chi'} \frac{1+\tau}{2}, \chi' \in \mathrm{Irr}_{F'}(H)\} \cup \frac{1-\tau}{2}$ sera un système complet d'idempotents primitifs de $\mathcal{O}_d(M, K[G])$.

COROLLAIRE. - Le $A[H]$-module $M\frac{1+\tau}{2}$ (respectivement $M\frac{1-\tau}{2}$) est décomposable si et seulement si l'idempotent $\frac{T(1+\tau)}{2p}$ (respectivement $\frac{T(1-\tau)}{2p}$) est dans $\mathcal{O}_d(M, K[G])$.

Remarque sur la démonstration du théorème. Les corps F' et F'' sont définis en fait de la manière suivante : si $\frac{1+\tau}{2} = \sum_{i\in I} \epsilon_i \frac{1+\tau}{2}$, ϵ_i idempotent de $E[H]$ (cf. Proposition 1, § 4), F' est la plus petite extension de k dans E telle que tous les idempotents $\epsilon_i \frac{1+\tau}{2}$, $i \in I$, soient inclus dans l'algèbre $F'[G]$; de même pour le corps F''.

PROPOSITION 3. -

a) Dans les mêmes hypothèses que le a) du théorème précédent, le corps F relatif à la décomposition centrale de M (cf. théorème du paragraphe 3) est le corps : $F = F' \cap F''$.

b) Si seul un des modules, $M\frac{1+\tau}{2}$ par exemple, est décomposable le corps F est nécessairement le corps $\mathbb{Q}_p$ et le système $\mathcal{S}$ est le suivant : $\{\frac{T(1+\tau)}{2p}, 1-\frac{T(1+\tau)}{2p}\}$.

On utilise pour le démontrer la remarque 3 du § 3 et la proposition 1 du § 4 .

Dans le § II qui suit, l'hypothèse H énoncée ci-dessus sera satisfaite et nous déterminerons pour un corps local K les ordres, $\mathcal{O}(M\frac{1+\tau}{2}, K[H])$ et $\mathcal{O}(M\frac{1-\tau}{2}, K[H])$, pour trouver les corps F , F' et F'' .

§ II

DECOMPOSITION DU GALOIS MODULE DES ENTIERS D'UNE EXTENSION DIEDRALE (2p) D'UN CORPS LOCAL DE CARACTERISTIQUE RESIDUELLE p

Ce paragraphe utilise les résultats du chapitre II de [5] . Dans ce paragraphe K est un corps local de caractéristique 0 , de caractéristique résiduelle p , d'indice de ramification absolue e_K .

B est l'anneau des entiers d'une extension L de K galoisienne, de groupe de Galois G , où G est un groupe diédral d'ordre 2p . Si A désigne l'anneau des entiers de K , B est un $A[G]$-module de rang 1 .

Si θ est un élément de B engendrant une base normale de L/K , nous noterons $M = \{\lambda \in K[G] , \lambda\theta \in B\}$, B et M sont deux $A[G]$-modules à gauche isomorphes.

Nous étudierons la décomposition en sous-$A[G]$-modules indécomposables du module M qui vérifie comme dans le §I , $A[G] \subset M \subset K[G]$.

On notera a le reste modulo p du deuxième nombre de ramification inférieure t de l'extension, $t = a_0 p + a$ avec $0 \leq a < p$. Le théorème que nous allons démontrer dans le §II est le suivant :

II.1. THEOREME

Soit L/K une extension diédrale de corps locaux.

1°) Si p ne divise pas la différente de L/K : B est un $A[G]$-module centralement indécomposable et $M = M\frac{1+\tau}{2} \oplus M\frac{1-\tau}{2}$ est une décomposition de M en deux sous-modules indécomposables.

2°) Si p divise la différente de L/K :

a) Si L/K est une extension totalement ramifiée avec a impair (a reste modulo p du 2ème nombre de ramification) : la décomposition centrale de B est la suivante

$$B = \frac{T(1+\tau)}{2p} B \oplus (1 - \frac{T(1+\tau)}{2p})B$$

et

$$M = M\frac{1-\tau}{2} \oplus M\frac{T(1+\tau)}{2p} \oplus M(1-\frac{T}{p})(\frac{1+\tau}{2})$$

est une décomposition de M en sous-$A[G]$-modules indécomposables.

b) Sinon (c'est-à-dire ou L/K non totalement ramifiée, ou L/K totalement ramifiée et a pair) :

b.1) Si $a \neq 0$ et si a ne divise pas $p-1$

$$B = \frac{T(1+\tau)}{2p} B \oplus \frac{T(1-\tau)}{2p} B + (1-\frac{T}{p})B$$

est la décomposition centrale de B .

$$M = M\frac{T(1+\tau)}{2p} \oplus M\frac{T(1-\tau)}{2p} \oplus M(1-\frac{T}{p})(\frac{1+\tau}{2}) \oplus M(1-\frac{T}{p})(\frac{1-\tau}{2})$$

est une décomposition de M en sous-$A[G]$-modules indécomposables.

b.2) Si $a = 0$ où a divise $p-1$

$B = \oplus e_\chi B$, $\chi \in \mathrm{Irr}_E(G)$ est la décomposition centrale de B

$M = \oplus Me_\chi \frac{1+\tau}{2} \oplus Me_\chi \frac{1-\tau}{2}$, $\chi \in \mathrm{Irr}_E(H)$

est une décomposition centrale de M en sous-$A[G]$-modules indécomposables.

(On rappelle que $E = \mathbb{Q}_p(\zeta+\zeta^{-1}) \cap K$ où ζ est une racine p-ème de 1).

Pour la démonstration de ce théorème, nous devrons distinguer plusieurs cas suivant la ramification de l'extension L/K , et suivant la parité de a . Lorsque l'extension est sauvagement ramifiée, nous distinguons par **A** et **B** les deux cas suivants, cf. [5]

A , l'extension L/K est totalement ramifiée

B , l'extension L/K n'est pas totalement ramifiée.

L'élément θ de B est alors choisi suivant les cas comme dans [5] et nous connaissons des A-bases du $A[G]$-module M dans tous les cas. Nous noterons dans la suite $g = \sigma - \sigma^{-1}$, v_K la valuation d'un corps local K , $[x]$ et $\underset{\sim}{x}$ les parties entières et fractionnaires d'un réel x . D'après [5] , on a

$$M\frac{1-\tau}{2} = \left\{ \sum_{0\le i\le p-1} a_i \frac{g^i(1-\tau)}{2},\ a_i \in K \text{ et } v_K(a_i) \ge -\nu_i \right\}$$

$$M\frac{1+\tau}{2} = \left\{ \sum_{0\le i\le p-1} a_i \frac{g^i(1+\tau)}{2},\ a_i \in K \text{ et } v_K(a_i) \ge -\nu'_i \right\}$$

avec pour tout i , $0 \le i \le p-1$:

- dans le cas **A** , a impair $\nu_i = [\frac{it+a}{2p}]$, $\nu'_i = [\frac{it+a+p}{2p}]$;
- dans le cas **A** , a pair, $a \neq 0$ $\nu_i = [\frac{it+a+p}{2p}]$, $\nu'_i = [\frac{it+a}{2p}]$;
- dans le cas **A** , $a = 0$ $\nu_i = \nu'_i = [\frac{it}{2p}]$;
- dans le cas **B** , $\nu_i = \nu'_i = [\frac{it+a}{p}]$.

PROPOSITION 1. - p divise la différente $\mathcal{D}(L/K)$ si et seulement si l'extension L/K est sauvagement ramifiée et que la ramification est presque maximale dans cette extension ou encore si et seulement si l'idempotent $\frac{T}{p}$ appartient à l'ordre $\mathcal{O}(M\frac{1+\tau}{2}, K[H])$.

Cette proposition se déduit très facilement des formules données dans [5] : la ramification est presque maximale dans les extensions sauvagement ramifiées si :

- dans le cas **A** , $\frac{2pe_K}{p-1} - 2 \leq t \leq \frac{2pe_K}{p-1}$
- dans le cas **B** , $\frac{pe_K}{p-1} - 1 \leq t \leq \frac{pe_K}{p-1}$,

et de la valuation de la différente donnée dans [9]

- cas **A** , $v_L(\mathcal{D}(L/K)) = 2p - 1 + t(p-1)$
- cas **B** , $v_L(\mathcal{D}(L/K)) = (p-1)(t+1)$.

Remarque.

a) Dans le cas **A** , a impair, l'idempotent $\frac{T(1-\tau)}{2p} \notin \mathcal{O}(M, K[G])$, cf. [5], p. 66 et 67 , on peut donc dire que le module $M\frac{1-\tau}{2}$ est indécomposable.

b) Dans le cas **A** , si a impair on a toujours : $t < \frac{2pe_K}{p-1} - 1$

et donc la ramification est presque maximale si et seulement si

$$\frac{2pe_K}{p-1} - 2 \leq t < \frac{2pe_K}{p-1} - 1 .$$

c) Dans le cas **A** , a pair, la ramification est presque maximale si et seulement si $t \geq \frac{2pe_K}{p-1} - 1$.

d) Dans le cas **A** , a impair, p ne peut diviser la différente de l'extension L/K_H (K_H corps fixe par le groupe H) en effet $v_L(\mathcal{D}(L/K_H)) = (t+1)(p-1)$ et $(t+1)(p-1) < 2pe_K$ d'après b) .

e) Dans le cas **A** , a pair, p divise $\mathcal{D}(L/K)$ est équivalent à p divise $\mathcal{D}(L/K_H)$ d'après c) .

PROPOSITION 2. - L'hypothèse H du paragraphe I.4 est vérifiée dans tous les cas par le module M .

En effet, si $e \in \mathcal{O}(M^{\frac{1+\tau}{2}}, K[H]) \cap E[H]$ on vérifie que pour tout $\varphi \in Gal(E/k)$, $\varphi(e) \cdot M^{\frac{1+\tau}{2}} \subset M^{\frac{1+\tau}{2}}$, il suffit de vérifier que l'inclusion est vraie pour tout élément de la A-base de $M^{\frac{1+\tau}{2}}$ donnée ci-dessus.

PROPOSITION 3 (cf. [5]). - Pour tout corps F , $\mathbb{Q}_p \subset F \subset E \subset \mathbb{Q}'_{p_0}$ l'ordre maximal de l'algèbre F[H] noté $\mathcal{M}_F$, est donné par (cf. [5])

$$\mathcal{M}_F = \left\{ \sum_{0 \le i \le p-1} a_i g^i \ , \ a_i \in F \ , \ v_F(a_i) \ge -\left[\frac{ie_F}{p-1}\right] \right\} .$$

D'autre part, $\mathcal{M}_F$ est l'anneau engendré par $A_F[H]$ (A_F anneau des entiers de F) et par les idempotents $\frac{T}{p}$ et $\{e_\chi\}$, $\chi \in Irr_H^*(F)$.

Dans la suite, nous allons chercher (d'après I.4) le plus grand corps F' , $\mathbb{Q}_p \subset F' \subset E$ tel que $\mathcal{M}_{F'} \subset \mathcal{O}(M^{\frac{1+\tau}{2}}, K[H])$ (respectivement dans le cas **B** et le cas **A** a pair, le plus grand corps F'' , $\mathbb{Q}_p \subset F'' \subset E$ tel que $\mathcal{M}_{F''} \subset \mathcal{O}(M^{\frac{1-\tau}{2}}, K[H])$. Puis nous en déduirons le corps F et la décomposition centrale de B d'après la proposition 3 de I.4. Cette étude nécessite de séparer les cas **B** , **A** a pair et **A** a impair, c'est ce que nous ferons dans la suite.

II.2. ETUDE DU CAS B

Définissons l'ensemble $\mathcal{E}(\frac{t}{p})$, (cf. [2 et 5])

$$\mathcal{E}(\tfrac{t}{p}) = \{h \text{ entier}, \ 1 \le h \le p-1 \ / \text{ pour tout } h' \text{ entier}, \ 1 \le h' < h : \ h'\underset{\vee}{\tfrac{a}{p}} > h\underset{\vee}{\tfrac{a}{p}}\} .$$

D'après [5]

$$\mathcal{O}(M\tfrac{1+\tau}{2}, K[H]) = \mathcal{O}(M\tfrac{1-\tau}{2}, K[H]) =$$

$$= \left\{ \sum_{0\le i\le p-1} a_i g^i \ ,\ a_i \in K\ ,\ v_K(a_i) \ge -n_i \ \text{ où } \ n_i = [\tfrac{it}{p}] + \delta_i \right\}$$

$$\text{avec } \delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } p-i \in \mathcal{E}(\tfrac{t}{p}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Comme dans [2] on en déduit que si p divise la différente $\mathcal{D}(L/K)$ on a si $a=0$ ou si a divise $p-1$, $F = F' = F'' = E$, et sinon $F = F'' = F' = \mathbb{Q}_p$. D'où les décompositions données par le théorème dans ce cas-là.

II.3. ETUDE DU CAS A , a impair

Rappelons que dans ce cas $M\frac{1-\tau}{2}$ est un module indécomposable et que $M\frac{1+\tau}{2}$ est décomposable si et seulement si $\frac{2pe_K}{p-1} - 2 \le t < \frac{2pe_K}{p-1} - 1$. Introduisons l'ensemble

$$\mathcal{E}'(\tfrac{t}{2p}) = \left\{ h \text{ entier}, \ 1 \le h \le p-1 \,/\, \text{pour tout } h' \text{ entier}, \ 1 \le h' < h : \ \underset{\vee}{\tfrac{h'a+p}{2p}} > \underset{\vee}{\tfrac{ha+p}{2p}} \right\}$$

ce qui équivaut à

$$\mathcal{E}'(\tfrac{t}{2p}) = \left\{ h \text{ entier}, \ 1 \le h \le p-1 \,/\, \underset{\vee}{\tfrac{ha}{2p}} > \tfrac{1}{2} \ \text{ et } \ \forall h' \ , \ 1 \le h' < h \right.$$
$$\left. \text{ou bien } \underset{\vee}{\tfrac{h'a}{2p}} < \tfrac{1}{2} \ \text{ ou bien } \ \underset{\vee}{\tfrac{h'a}{2p}} > \underset{\vee}{\tfrac{ha}{2p}} \right\} .$$

PROPOSITION 1. - <u>Si la ramification est presque maximale c'est-à-dire si</u> $e_K = \frac{(p-1)a_0}{2} + \frac{a+1}{2}$ <u>on a</u>

$$\mathcal{O}(M\tfrac{1+\tau}{2}, K[H]) = \left\{ \sum_{0\le i\le p-1} a_i g^i \ ,\ a_i \in K\ ,\ v_K(a_i) \ge -n'_i \ \underline{\text{où}} \right.$$
$$\left. n'_i = [\tfrac{it}{2p}] + \delta'_i \ \underline{\text{avec}} \ \delta'_i = \begin{cases} 1 & \underline{\text{si}} \ p-i \in \mathcal{E}'(\tfrac{t}{2p}) \\ 0 & \underline{\text{sinon}} \end{cases} \right\} .$$

La démonstration de cette proposition est analogue à celle de la proposition de [5], page 19 .

PROPOSITION 2. - Si la ramification est presque maximale et si $a = 1$ on a $\mathfrak{m}_E \subset \mathcal{O}(M\frac{1+\tau}{2}, K[H]) \cap E[H]$.

Démonstration. Nous avons dans ce cas $e_K = \frac{(p-1)a_0}{2} + 1$, e_E divisant à la fois $p-1$ et e_K est nécessairement égal à 1 et donc $E = k = \mathbb{Q}_p$. Par suite $\mathcal{E}'(\frac{t}{2p}) = \{1\}$ et $n'_i = \frac{ia_0}{2}$ pour tout i , $0 \leq i < p-1$. L'inclusion est ensuite facile à vérifier.

PROPOSITION 3. - Si la ramification est presque maximale et si $a \neq 1$ pour tout sous-corps F de E , $\mathbb{Q}_p \subsetneq F \subseteq E$ on a

$\mathfrak{m}_F \not\subset \mathcal{O}(M\frac{1+\tau}{2}, K[H]) \cap F[H]$.

Démonstration. Si F est un sous-corps de E , $\mathbb{Q}_p \subsetneq F \subseteq E$, on peut dire que $2e_F$ divise $a+1$ en effet $2e_K = (p-1)a_0 + a + 1$ et $2e_F$ divise $2e_K$ et $a_0(p-1)$. Si

$$\mathfrak{m}_F \subset \mathcal{O}(M\tfrac{1+\tau}{2}, K[H]) \cap F[H] = \left\{ \sum_{0 \leq i \leq p-1} a_i g^i \ , \ a_i \in F \ , \ v_F(a_i) \geq -\frac{n'_i e_F}{e_K} \right\}$$

c'est qu'en particulier pour les indices $i_k = k\frac{p-1}{e_F}$, $1 \leq k \leq e_F - 1$, (ici $e_F > 1$) on a :

$$n'_{i_k} \geq [\frac{i_k e_F}{p-1}] \times \frac{e_K}{e_F} \quad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq e_F - 1$$

ce qui équivaut à $\delta'_{i_k} \geq 1$ pour $1 \leq k \leq e_F - 1$ ou à $p - i_k \in \mathcal{E}'(\frac{t}{2p})$ pour $1 \leq k \leq e_F - 1$ or ceci est impossible, en effet :

- si $a > \frac{a+p}{e_F}$ on a $p < \frac{(e_F - 1)(a+p)}{e_F} < 2p$ et les indices $h_k = p - i_k = p - \frac{k(p-1)}{e_F}$ pour $1 \leq k \leq e_F - 1$ vérifient $\frac{h_k a}{2p} = \frac{p + k(\frac{a+p}{e_F})}{2p}$ en particulier $\frac{h_{e_F - 1} a}{2p} < \frac{1}{2}$ donc $p - i_{e_F - 1} \notin \mathcal{E}'(\frac{t}{2p})$.

- si $a < \frac{a+p}{e_F}$ alors $h_1 = p - \frac{p-1}{e_F} \notin \mathcal{E}'(\frac{t}{2p})$ en effet, il existe h' tel que $(h'-1)a < p < h'a$ et cet h' vérifie $2 \leq h' < h$ avec $\frac{h'a}{2p} > \frac{1}{2}$ et

$\frac{h'a}{2p} = \frac{1+a}{2p} < \frac{h_1 a}{2p}$.

La partie du théorème de II.1 relative aux extensions de cas **A** , a impair, est donc démontrée car d'après les propositions 2 et 3 $F' = F = \mathbb{Q}_p$.

II.4. ETUDE DU CAS **A** , a pair

Rappelons dans ce cas que les modules $M\frac{1+\tau}{2}$ et $M\frac{1-\tau}{2}$ sont décomposables si et seulement si $t \geq \frac{2pe_K}{p-1} - 1$ c'est-à-dire si $e_K = \frac{(p-1)a_0}{2} + \frac{a}{2}$. Plaçons-nous dans cette hypothèse.

Notations.

$$\mathcal{E}_1(\tfrac{t}{2p}) = \left\{ h \text{ entier, } 0<h\leq p-1/\forall h' \text{ entier } 0<h'<h \text{ , } \frac{h'(a+p)}{2p} > \frac{h(a+p)+p}{2p} \right\}$$

et

$$\mathcal{E}'_1(\tfrac{t}{2p}) = \left\{ h \text{ entier, } 0<h\leq p-1/\forall h' \text{ entier } 0<h'<h \text{ , } \frac{h'(a+p)+p}{2p} > \frac{h(a+p)+p}{2p} \right\} .$$

Notons aussi pour tout i , $0 \leq i \leq p-1$, n_i (respectivement n'_i) le plus grand entier tel que pour $a_i \in K$, $a_i g^i \in \mathcal{O}(M\frac{1-\tau}{2}, K[H])$ (respectivement $a_i g^i \in \mathcal{O}(M\frac{1+\tau}{2}, K[H])$) si et seulement si $v_K(a_i) \geq -n_i$ (respectivement $v_K(a_i) \geq -n'_i$) .

PROPOSITION 1. - Pour tout i , $0 \leq i \leq p-1$ on a :

a) $n'_i = [\frac{it}{2p}] + \delta'_i = \frac{i(a_0-1)}{2} + [\frac{i(a+p)}{2p}] + \delta'_i$

avec $\delta'_i = \begin{cases} 1 & \text{si } p-i \in \mathcal{E}'_1(\frac{t}{2p}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

b) $n_i \leq [\frac{it}{2p}] + \delta_i$

avec $\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } p-i \in \mathcal{E}_1(\frac{t}{2p}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

De plus, pour les indices $i_k = k\frac{p-1}{e_E}$, $1 \le k \le e_E$ on a $n_{i_k} = [\frac{i_k t}{2p}] + \delta_{i_k}$.

PROPOSITION 2. - Si p divise la différente $\mathfrak{d}(L/K)$ et si a est non nul et ne divise pas p-1 , quel que soit le sous-corps F de E , $\mathbb{Q}_p \subsetneq F \subseteq E$, $\mathfrak{m}_F$ n'est inclus ni dans $\mathcal{O}(M\frac{1+\tau}{2}, K[H])$ ni dans $\mathcal{O}'(M\frac{1-\tau}{2}, K[H])$.

Démonstration. Soit F un sous-corps de E , distinct de $\mathbb{Q}_p$, on a comme dans II.2

$$\mathfrak{m}_F = \left\{ \sum_{i=0}^{p-1} a_i g^i \ , \ a_i \in F \ , \ v_F(a_i) \ge -[\frac{ie_F}{p-1}] \right\} .$$

Considérons l'indice $j = \frac{p-1}{e_F}$, ici $e_F > 1$; si $a_j \in F$ avec $v_F(a_j) = -[\frac{je_F}{p-1}] = -1$, $a_j g^j$ est un élément de $\mathfrak{m}_F$. Montrons que $a_j g^j \notin \mathcal{O}(M\frac{1-\tau}{2}, K[H])$ et $a_j g^j \notin \mathcal{O}(M\frac{1+\tau}{2}, K[H])$ c'est-à-dire que $v_K(a_j) = v_F(a_j)\frac{e_K}{e_F} < -n'_j$ et $v_K(a_j) < -n_j$.

Il est facile de voir que ces deux inégalités proviennent de ce que pour $j = \frac{p-1}{e_F}$, $\delta_j = \delta'_j = 0$. Pour démontrer que $\delta_j = \delta'_j = 0$ on trouve des indices h' , $h' < p-j$, à l'aide des dénominateurs des réduites successives du développement en fraction continue de $\frac{a}{p}$, qui d'après les définitions précédentes entraînent que $p-j \notin \mathcal{E}_1(\frac{t}{2p})$ et $p-j \notin \mathcal{E}'_1(\frac{t}{2p})$.

Cette proposition signifie que dans ce cas $F = F' = F'' = \mathbb{Q}_p$.

PROPOSITION 3. - Si p divise $\mathfrak{d}(L/K)$ et si $a = 0$ ou si a divise p-1 , alors $\mathfrak{m}_E \subset \mathcal{O}(M\frac{1+\tau}{2}, K[H])$ et $\mathfrak{m}_E \subset \mathcal{O}(M\frac{1-\tau}{2}, K[H])$.

Cette proposition signifie que si $a = 0$ ou a divise p-1 on a $F = F' = F'' = E$. Le cas $a = 0$ est immédiat d'après [5] car

$$\mathfrak{m}_E = \mathcal{O}(M\tfrac{1+\tau}{2}, K[H]) = \mathcal{O}(M\tfrac{1-\tau}{2}, K[H]) .$$

Le cas a/p-1 se déduit des deux lemmes suivants :

LEMME 1. - $\mathcal{M}_E \subset \mathcal{O}(M\frac{1+\tau}{2}, E[H])$ (respectivement $\mathcal{M}_E \subset \mathcal{O}(M\frac{1-\tau}{2}, E[H])$) si et seulement si la suite $p - k\frac{p-1}{e_E}$, $1 \le k \le e_E$ est dans $\mathcal{E}'_1(\frac{t}{2p})$ (respectivement $\mathcal{E}_1(\frac{t}{2p})$).

Démonstration. $\mathcal{M}_E \subset \mathcal{O}(M\frac{1+\tau}{2}, K[H])$ si et seulement si $e_K[\frac{ie_E}{p-1}] \le e_E n'_i$ pour tout i, $0 \le i \le p-1$. Pour les indices i vérifiant $k\frac{p-1}{e_E} < i < (k+1)\frac{p-1}{e_E}$, $0 \le k \le e_E - 1$, il est facile de voir que ces inégalités sont toujours vérifiées. Pour les indices $k\frac{p-1}{e_E}$, $0 \le k \le e_E$ elles ne le sont que si $\delta'_{k\frac{p-1}{e_E}} = 1$.

LEMME 2. - Si a divise $p-1$, la suite $p - k\frac{p-1}{e_E}$ est dans $\mathcal{E}'_1(\frac{t}{2p})$ (respectivement $\mathcal{E}_1(\frac{t}{2p})$).

Démonstration. Si a divise $p-1$ posons $d = \frac{p-1}{a}$. D'autre part, e_E qui divise e_K et $p-1$ divise aussi a d'après l'égalité $2e_K = (p-1)a_0 + a$. Par suite, si nous posons $a = re_E$, on obtient $2e_K = re_E(da_0 + 1)$, on montre facilement que d'après le choix du corps E, r est un entier pair.

Soit $1 \le k \le e_E$ l'entier $p - k\frac{p-1}{e_E}$ s'écrit alors

$$p - k\frac{p-1}{e_E} = p - krd = 1 + d(a - kr).$$

Par suite,

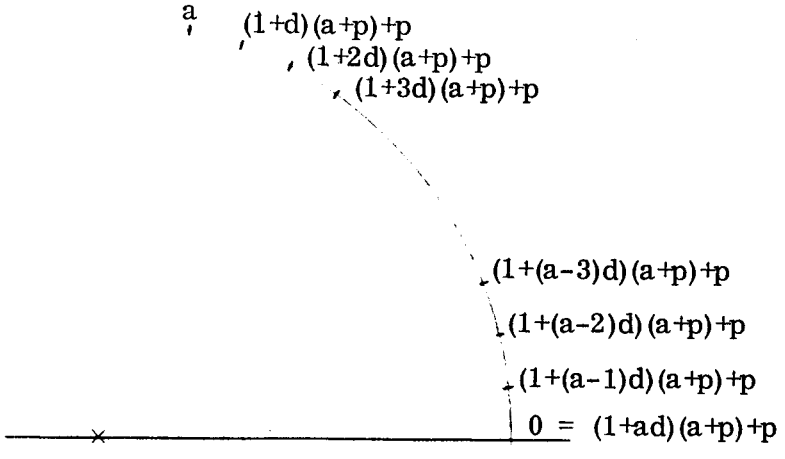
$$\frac{(p - k\frac{p-1}{e_E})a}{2p} = \frac{kr}{2p} \quad \text{et} \quad \frac{(p - k\frac{p-1}{e_E})(a+p) + p}{2p} = \frac{kr}{2p}.$$

D'autre part, suivant que d est pair ou impair on a :

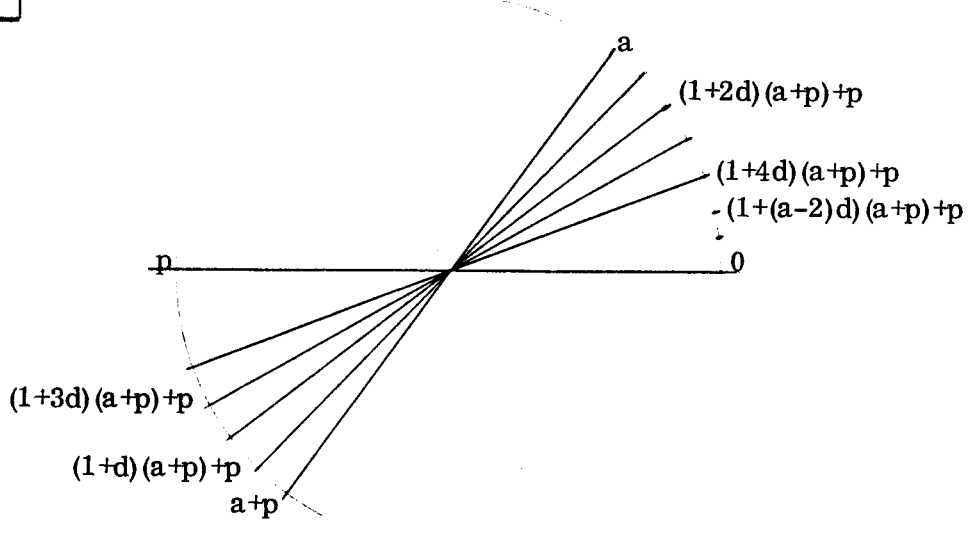
$$\frac{\{1 + (a-kr+1)d\}(a+p) + p}{2p} \quad \text{qui vaut} \quad \frac{kr - 1 + p}{2p} \quad \text{ou} \quad \frac{kr - 1}{2p}.$$

Comme $ja \equiv j'_a \pmod p$ est impossible si j et j' sont des entiers distincts compris entre 0 et $p-1$, il est clair d'après les représentations sur le cercle modulo $2p$ que la suite, $p - krd$, $1 \le k \le e_E$ se trouve à la fois dans $\mathcal{E}'_1(\frac{t}{2p})$ et $\mathcal{E}_1(\frac{t}{2p})$.

CAS d impair



CAS d pair



N.B. : le point noté x sur le cercle représente le reste modulo 2p de l'entier x.

Les propositions précédentes permettent de démontrer le théorème dans le cas d'une extension de type **A** avec a pair.

Il nous reste à regarder le cas où l'extension est modérément ramifiée. C'est le cas le plus simple, car nous pouvons alors choisir un élément θ de B tel que $B = A[G] \cdot \theta$, par suite $M = A[G]$ et $\mathcal{O}_d(M, K[G]) = A[G]$.

Donc dans ce cas aussi M vérifie l'hypothèse H et d'après le §I , B et M sont des modules centralement indécomposables. D'autre part, les sous-modules $M\frac{1+\tau}{2}$ et $M\frac{1-\tau}{2}$ de M sont indécomposables car les idempotents $\frac{T(1+\tau)}{2p}$ et $\frac{T(1-\tau)}{2p}$ ne sont pas dans $\mathcal{O}_d(M, K[G])$ (cf. corollaire du théorème I.4). Une décomposition de M en sous-$A[G]$-modules indécomposables est donc dans ce cas :

$$M = M\frac{1+\tau}{2} \oplus M\frac{1-\tau}{2} .$$

Rappelons que lorsque l'extension n'est pas sauvagement ramifiée p ne divise pas la différente de L/K . Ceci achève la démonstration du théorème cité au début du §II .

§ III

DECOMPOSITION DU GALOIS-MODULE DES ENTIERS D'UNE EXTENSION DIEDRALE D'UN CORPS DE NOMBRES

Dans ce paragraphe, K désigne un corps de nombres et L une extension galoisienne de K avec $Gal(L/K) = G$, groupe diédral d'ordre $2p$. B et A désignent respectivement les anneaux d'entiers de L et de K . Nous nous intéresserons tout d'abord à la décomposition centrale du $A[G]$-module de rang 1 , B , décomposition que l'on sait unique (cf. §I) .

III.1 DECOMPOSITION CENTRALE

Dans ce paragraphe, nous démontrerons le théorème suivant :

THEOREME. - Soit L/K une extension diédrale de corps de nombres, une condition nécessaire et suffisante pour que le $A[G]$-module B des entiers de L soit décomposable centralement est qu'il existe un sous-corps F de L , $K \subseteq F \subsetneq L$, galoisien sur K tel que $[L:F]$ divise la différente de L/F .

Pour la démonstration de ce théorème, nous allons tout d'abord voir comment l'ordre associé à B dans $K[G]$, $\mathcal{O}(B, K[G])$ se déduit des ordres associés des extensions locales.

III.1.1. Lien entre les divers ordres associés.

Soit $\mathfrak{P}$ l'ensemble des idéaux premiers de A . On note $K_{\mathfrak{p}}$ le complété de K pour un idéal $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$, $A_{\mathfrak{p}}$ l'anneau des entiers de $K_{\mathfrak{p}}$ et $B_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}[G] \underset{A[G]}{\otimes} B$. On a alors la propriété suivante : pour un λ de $K[G]$, λ est dans $\mathcal{O}(B, K[G])$ si et seulement si pour tout idéal $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{P}$, λ est dans $\mathcal{O}(B_{\mathfrak{p}}, K_{\mathfrak{p}}[G])$.

Choisissons ensuite un idéal $\mathfrak{P}$ premier de B au-dessus de $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$; notons D le groupe de décomposition de $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{R}$ un système de représentants de G/D . Le complété $L_{\mathfrak{P}}$ de L pour la valuation $\mathfrak{P}$-adique est une extension galoisienne de $K_{\mathfrak{p}}$ de groupe de Galois D , et si $B_{\mathfrak{P}}$ est l'anneau des entiers de $L_{\mathfrak{P}}$ on a :

$$B_{\mathfrak{p}} = \bigoplus_{s \in \mathfrak{R}} s\, B_{\mathfrak{P}}$$

et

$$(*) \qquad \mathcal{O}(B_{\mathfrak{p}}, K_{\mathfrak{p}}[G]) = \bigcap_{s \in \mathfrak{R}} s\,(\oplus t\,\mathcal{O}(B_{\mathfrak{P}}, K_{\mathfrak{p}}[D]))\, s^{-1} \qquad \text{(cf. [1], chapitre 4).}$$

On note $\mathfrak{S}$ l'unique système complet d'idempotents centraux primitifs orthogonaux de $\mathcal{O}(B, K[G])$. Pour tout $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$, $\mathfrak{S}$ est aussi contenu dans $\mathcal{O}(B_{\mathfrak{p}}, K_{\mathfrak{p}}[G])$.

III.1.2. Condition nécessaire pour une décomposition centrale.

Pour que $\mathfrak{S} \neq 1$, regardons d'abord les ordres $\mathcal{O}(B_{\mathfrak{p}}, K_{\mathfrak{p}}[G])$ pour des idéaux $\mathfrak{p}$ de A situés au-dessus du nombre premier p .

Si $\mathfrak{p}$ est au-dessus de p , les possibilités pour l'extension $L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}$

et pour l'ordre $\mathcal{O}(B_\mathfrak{p}, K_\mathfrak{p}[G])$ sont les suivantes :

a) $\mathfrak{p}$ est un idéal totalement décomposé dans $L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}$; c'est-à-dire $D = \{1\}$. Dans ce cas $\mathcal{O}(B_\mathfrak{p}, K_\mathfrak{p}[G]) = A_\mathfrak{p}[G]$;

b) $\mathfrak{p}$ est un idéal de A décomposé en p-idéaux dans $L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}$, D est alors un sous-groupe d'ordre 2 de G ; l'extension $L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}$ est modérément ramifiée et $\mathcal{O}(B_\mathfrak{p}, K_\mathfrak{p}[G]) = A_\mathfrak{p}[G]$.

Dans les cas a) et b) le seul système complet d'idempotents centraux est 1 .

c) $\mathfrak{p}$ est un idéal non décomposé, c'est-à-dire $D = G$, on a alors $\mathcal{O}(B_\mathfrak{p}, K_\mathfrak{p}[G]) = \mathcal{O}(B_\mathfrak{P}, K_\mathfrak{p}[G])$, l'extension locale étant soit totalement ramifiée, soit ramifiée dans la partie de degré p (cf. §II).

D'après le §II, $\mathcal{O}(B_\mathfrak{P}, K_\mathfrak{p}[G])$ possède dans ce cas un système d'idempotents centraux non trivial si et seulement si la ramification est presque maximale dans l'extension $L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}$.

d) $\mathfrak{p}$ se décompose en 2 idéaux, c'est-à-dire $D = H$ et l'extension $L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}$ est cyclique d'ordre p . On a $B_\mathfrak{p} = B_\mathfrak{P} \oplus \tau B_\mathfrak{P}$.

La formule (*) dans ce cas, montre que l'hypothèse H_1 du §I.3 est vérifiée pour le $A_\mathfrak{p}[G]$-module $B_\mathfrak{p}$. D'après le corollaire du théorème de I.3, on voit que $\mathcal{O}(B_\mathfrak{p}, K_\mathfrak{p}[G])$ a un système d'idempotents centraux non trivial seulement si il contient un des idempotents $\frac{T}{p}$, $\frac{T(1+\tau)}{2p}$, $\frac{T(1-\tau)}{2p}$. On montre que ceci n'est possible que si $\frac{T}{p} \in \mathcal{O}(B_\mathfrak{P}, K_\mathfrak{p}[D])$, c'est-à-dire que si l'extension $L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}$ est ramifiée avec une ramification presque maximale (cf. [5]).

En résumé, une condition nécessaire pour que $\mathcal{O}(B, K[G])$ possède un système $\mathcal{S}$, $\mathcal{S} \neq 1$, est que les idéaux $\mathfrak{p}$ de A au-dessus de p se comportent tous comme dans les cas c) et d) avec une ramification presque maximale. Cette condition s'exprime facilement à l'aide de la différente de l'extension L/K : $\mathcal{D}(L/K)$. Il suffit dans chaque cas de calculer les valuations $\mathfrak{P}$-adique de la différente sachant que $v_\mathfrak{P}(\mathcal{D}(L/K)) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Card}(G_i) - 1$ (cf. [9])

(les G_i étant les groupes de ramification successifs de l'extension $L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}$) .

LEMME. - Une condition nécessaire pour qu'il existe une décomposition centrale non triviale du $A[G]$-module B est que $\mathfrak{p}$ divise la différente $\mathfrak{d}(L/K)$ de l'extension L/K .

III. 1. 3. Condition suffisante.

Supposons que $\mathfrak{p}$ divise la différente $\mathfrak{d}(L/K)$; notons K_H le sous-corps de L fixe par H . Deux cas sont possibles :

i) $\mathfrak{p}$ divise aussi la différente de L/K_H , $\mathfrak{d}(L/K_H)$. Toutes les extensions locales de degré $2p$ ont alors un nombre de ramification $t_{\mathfrak{P}}$ supérieur ou égal à $\frac{2p\, e_{K_{\mathfrak{p}}}}{p-1} - 1$ et il n'y a pas d'extension locale totalement ramifiée avec a impair (cf. la remarque d) du paragraphe II.1). Par suite, d'après II, tous les ordres locaux contiennent l'idempotent $\frac{T}{p}$ et donc $\frac{T}{p} \in \mathcal{O}(B, K[G])$ et B a une décomposition centrale non triviale.

ii) $\mathfrak{p}$ divise la différente $\mathfrak{d}(L/K)$ mais ne divise pas $\mathfrak{d}(L/K_H)$. On démontre qu'il existe alors nécessairement une extension locale au-dessus de $\mathfrak{p}$, de degré $2p$, totalement ramifiée avec a impair (cf. remarque du §II.1) . Les seuls systèmes $s \neq 1$, possibles contiennent $\frac{T(1+\tau)}{2p}$ d'après le théorème de II , il faut donc regarder dans quelles conditions $\frac{T(1+\tau)}{2p}$ appartient aux ordres $\mathcal{O}(B_{\mathfrak{p}}, K_{\mathfrak{p}}[G])$ où $\mathfrak{p}$ décrit l'ensemble des idéaux $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}$ au-dessus de 2 .

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal au-dessus de 2 , les possibilités pour l'extension $L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}$ et pour l'ordre $\mathcal{O}(B_{\mathfrak{p}}, K_{\mathfrak{p}}[G])$ sont les suivantes :

a') $\mathfrak{p}$ est non décomposé, c'est-à-dire $D = G$ ou $\mathfrak{p}$ est décomposé en deux idéaux et $D = H$ ou $\mathfrak{p}$ est totalement décomposé et $D = 1$. Dans ces trois cas, $L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}$ est modérément ramifiée ou non ramifiée et

$\mathcal{O}(B_{\mathfrak{p}}, K_{\mathfrak{p}}[G]) = A_{\mathfrak{p}}[G]$.

b') $\mathfrak{p}$ est décomposé en p-idéaux, D est un sous-groupe d'ordre 2 et $L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}$ est une extension cyclique d'ordre 2 .

On choisit pour $\mathfrak{P}$ l'idéal au-dessus de $\mathfrak{p}$ qui correspond au groupe D engendré par 1 et τ , $D = (1, \tau)$. D'après le début du §III (*)

$$\mathcal{O}(B_{\mathfrak{p}}, K_{\mathfrak{p}}[G]) = \bigcap_{0 \le i \le p-1} \sigma^i \left[\oplus \sigma^j \mathcal{O}(B_{\mathfrak{P}}, k_{\mathfrak{p}}[D]) \right] \sigma^{-i} .$$

On voit que $\frac{T(1+\tau)}{2p} \in \mathcal{O}(B_{\mathfrak{p}}, K_{\mathfrak{p}}[G])$ si et seulement si $\frac{1+\tau}{2} \in \mathcal{O}(B_{\mathfrak{P}}, K_{\mathfrak{p}}[D])$ donc si et seulement si la ramification dans $L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}$ est presque maximale ou encore si et seulement si 2 divise la différente de L/K . Ceci termine la démonstration du théorème cité au début de ce paragraphe en effet dans le cas i) $\mathfrak{p}$ divise $\mathcal{D}(L/K_H)$ dans le cas ii) $2\mathfrak{p}$ divise $\mathcal{D}(L/K)$.

On remarquera que si l'on connait précisément tous les nombres de ramification des idéaux au-dessus de 2 et de $\mathfrak{p}$ d'une extension L/K , on peut donner exactement la décomposition centrale du $A[G]$-module B , par exemple :

PROPRIETE. - Si $2\mathfrak{p}$ divise la différente de L/K , $\mathcal{D}(L/K)$, et si $\mathfrak{p}$ ne divise pas la différente $\mathcal{D}(L/K_H)$ la décomposition centrale de B est la suivante :

$$B = \frac{T(1+\tau)}{2p} B \oplus (1 - \frac{T(1+\tau)}{2p}) B$$ (cf. remarque d) du §II.1 et théorème du II)

III.2 DECOMPOSITION EN SOUS-MODULES INDECOMPOSABLES

THEOREME. - Soit L/K une extension diédrale de corps de nombres, A et B étant les anneaux d'entiers des corps K et L et G le groupe de Galois $G(L/K)$, une condition nécessaire et suffisante pour

le $A[G]$-module B soit décomposable est que l'un des deux diviseurs de l'ordre de G, 2 ou p, divise la différente $\mathfrak{D}(L/K)$.

Soit θ un élément de B qui engendre une base normale de L/K on note $M = \{\lambda \in K[G] , \lambda \cdot \theta \in B\}$, c'est-à-dire le $A[G]$-module à gauche de rang 1 qui vérifie $B = M \cdot \theta$. Nous savons alors que B est un $A[G]$-module décomposable si et seulement si il existe un idempotent e, $e \neq 0$, $e \neq 1$, dans l'ordre à droite de M dans $K[G]$: $\mathcal{O}_d(M, K[G])$. Nous allons, pour démontrer le théorème cité ci-dessus nous intéresser tout d'abord au choix de cet élément θ.

III.2.1. LEMME. - Si K' est un corps local d'anneau des entiers A', si L' est une extension galoisienne de K' d'anneau des entiers B' et α un élément de B' engendrant une base normale de L'/K', notons $M_\alpha = \{\lambda \in K'[G] , \lambda\alpha \in B'\}$. Il existe un entier positif N tel que si β est un élément de B' vérifiant $v_{L'}(\alpha-\beta) > N$ alors le module $M_\beta = \{\lambda \in K'[G] , \lambda\beta \in B'\}$ est égal au module M_α ($v_{L'}$ désigne la valuation du corps L').

Démonstration. - Si e et f désignent respectivement l'indice de ramification et le degré résiduel de L'/K', on peut choisir une A' base de B' du type $\{E_i\pi^j , 1 \leq i \leq f , 0 \leq j \leq e-1\}$ où π est une uniformisante de K' et où $(E_i)_{1\leq i\leq f}$ est une famille d'unités de B' telle que $(\overline{E}_i)_{1\leq i\leq f}$ soit une $\overline{K}'$ base de $\overline{L}'$ (corps résiduel). Pour tout couple i,j il existe alors un élément λ_{ij} de M_α tel que $\lambda_{ij}\alpha = E_i\pi^j$. Les λ_{ij} forment donc une A'-base de M_α. Il existe alors un entier N tel que si $v_{L'}(\alpha-\beta) > N$ pour un β de B' on puisse écrire

$$v_{L'}(\lambda_{ij}\alpha - \lambda_{ij}\beta) > e+1 .$$

Ceci entraîne que $\lambda_{ij}\beta$ est un élément de même valuation que $E_i\pi^j$ et s'écrit donc : $\lambda_{ij}\beta = E'_i\pi^j$ avec E'_i unité de B' vérifiant $\overline{E}'_i = \overline{E}_i$. Par suite les λ_{ij} forment une A'-base de M_β et $M_\alpha = M_\beta$.

III.2.2. Choix de l'élément θ de B qui engendre une base normale de L/K .

a) Premier cas. Il existe un idéal $\mathfrak{q}$ de A non décomposé dans L/K , c'est-à-dire il existe une extension locale $L_{\mathfrak{Q}}/K_{\mathfrak{q}}$ de degré $2p$, $\mathfrak{Q}\cap A = \mathfrak{q}$. Alors pour tout idéal $\mathfrak{p}$ de A au-dessus de 2 ou de p nous choisissons dans $B_{\mathfrak{P}}$ ($\mathfrak{P}\cap A = \mathfrak{p}$) un $\theta_{\mathfrak{P}}$ de façon que l'on connaisse le module $M_{\mathfrak{P}}$ de $K_{\mathfrak{p}}[D]$ (D groupe de décomposition de $\mathfrak{P}$ dans L/K) qui vérifie : $B_{\mathfrak{P}} = M_{\mathfrak{P}}\cdot\theta_{\mathfrak{P}}$ (choix précisé dans [5]). De plus, si l'idéal $\mathfrak{q}$ n'est ni au-dessus de p ni au-dessus de 2 , choisissons un $\theta_{\mathfrak{Q}}$ dans $B_{\mathfrak{Q}}$, tel que $B_{\mathfrak{Q}} = A[G]\cdot\theta_{\mathfrak{Q}}$ puisque l'extension $L_{\mathfrak{Q}}/K_{\mathfrak{q}}$ est forcément modérément ramifiée.

D'après le lemme d'approximation, il existe alors un élément θ de B tel que pour tous les $\mathfrak{p}$ cités au-dessus $v_{\mathfrak{P}}(\theta-\theta_{\mathfrak{P}}) > N_{\mathfrak{P}}$ ($N_{\mathfrak{P}}$ entier défini par le lemme précédent).

Ce θ engendre une base normale de L/K , car l'extension $L_{\mathfrak{Q}}/K_{\mathfrak{q}}$ est de degré $2p$ et dans les algèbres $K_{\mathfrak{p}}[D]$ citées ci-dessus, on a $B_{\mathfrak{P}} = M_{\mathfrak{P}}\cdot\theta = M_{\mathfrak{P}}\cdot\theta_{\mathfrak{P}}$, d'après le lemme précédent.

b) Deuxième cas. Pas d'extensions locales de degré $2p$ mais il existe au moins un idéal $\mathfrak{p}$ de A au-dessus de 2 ou de p qui se décompose en deux idéaux $\mathfrak{P}$ et $\overline{\mathfrak{P}}$. Choisissons dans $B_{\mathfrak{P}}$ un élément $\theta_{\mathfrak{P}}$ qui engendre une base normale de $L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}$ et tel que l'on connaisse le $A_{\mathfrak{p}}[H]$-module $M_{\mathfrak{P}}$ vérifiant $B_{\mathfrak{P}} = M_{\mathfrak{P}}\cdot\theta_{\mathfrak{P}}$.

LEMME. - *Il existe des entiers* N *et* M *tels que si* $\theta \in L$ *vérifie* $v_{\mathfrak{P}}(\theta-\theta_{\mathfrak{p}}) > N$ *et* $v_{\mathfrak{P}}(\theta) \geq M$ *alors* θ *engendre une base normale de* $L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}$ *et on a* $B_{\mathfrak{P}} = M_{\mathfrak{P}}\cdot\theta = M_{\mathfrak{P}}\cdot\theta_{\mathfrak{P}}$ *dans* $K_{\mathfrak{p}}[H]$ *comme dans le lemme du* 2.1.

Dans ce cas, on choisit donc θ grâce au lemme d'approximation en lui imposant les mêmes conditions que dans le premier cas, plus les conditions du lemme du 2.2.

c) Troisième cas. Pas d'extensions locales de degré $2p$ et tous les idéaux au-dessus de 2 et de p se décomposent en p idéaux. Alors il est facile de voir que tout θ de B qui engendre une base normale de L/K engendre aussi une base normale de toutes les extensions locales de degré 2. Dans ce troisième cas, θ est choisi de cette façon là.

Remarque. Dans les deux premiers cas, chaque fois que l'extension locale est soit modérément ramifiée, soit non ramifiée le $\theta_{\mathfrak{P}}$ choisi localement est tel que $B_{\mathfrak{P}} = A_{\mathfrak{p}}[D] \cdot \theta_{\mathfrak{P}}$ c'est-à-dire que $M_{\mathfrak{P}} = A_{\mathfrak{p}}[D]$.

Récapitulons : pour un idéal $\mathfrak{p}$ donné de A, si $\mathfrak{P}$ est un idéal de B, $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$, de groupe de décomposition D et si $\mathfrak{R}$ est un système de représentants de G/D, on note $B_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}[G] \underset{A[G]}{\otimes} B$ et on a

$$B_{\mathfrak{p}} = \underset{g \in \mathfrak{R}}{\oplus} gB_{\mathfrak{P}} .$$

Si θ est choisi comme précédemment pour ce θ on pose $B = M \cdot \theta$ et $M_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}[G] \underset{A[G]}{\otimes} M$ et si $B_{\mathfrak{P}} = M_{\mathfrak{P}} \cdot \theta$ on a : $M = \underset{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}}{\cap} M_{\mathfrak{p}}$ et on a alors quatre cas possibles suivant les ramifications de l'idéal $\mathfrak{p}$.

α) $\mathfrak{p}$ est non décomposé alors $B_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{P}}$ et $M_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{P}}$.

β) $\mathfrak{p}$ est décomposé en deux idéaux : $M_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{P}} \oplus \tau M_{\mathfrak{P}}$.

γ) $\mathfrak{p}$ est décomposé en p idéaux : $M_{\mathfrak{p}} = \underset{0 \le i \le p-1}{\oplus} \sigma^i M_{\mathfrak{P}}$.

δ) $\mathfrak{p}$ est totalement décomposé : $B_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}[G]$.

Rappelons que B est décomposable si et seulement si il existe un idempotent e de $K[G]$ distinct de 1 et de 0 dans $\mathcal{O}_d(M, K[G])$ c'est-à-dire si il existe un idempotent e, $e \neq 1$, $e \neq 0$, vérifiant $e \in \mathcal{O}_d(M_{\mathfrak{p}}, K_{\mathfrak{p}}[G])$ pour tout idéal $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}$.

III. 2. 3. Condition suffisante pour que le $A[G]$-module M soit décomposable.

Rappelons tout d'abord le résultat suivant de Reiner [4] p. 580. Soit $\mathcal{P}_1$ l'ensemble des idéaux premiers de A qui sont soit au-dessus de 2 soit au-dessus de p. Pour tout $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{P}_1$ on note $\check{A}_{\mathfrak{p}}$ le localisé de A en $\mathfrak{p}$. $\check{M}_{\mathfrak{p}} = \check{A}_{\mathfrak{p}} \underset{A}{\otimes} M$, $\check{A} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_1} \check{A}_{\mathfrak{p}}$ et $\check{M} = \check{A} \underset{A}{\otimes} M$ c'est-à-dire $\check{M} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_1} \check{M}_{\mathfrak{p}}$.

D'après [4], M est un $A[G]$-module décomposable si et seulement si $\check{M}$ est un $\check{A}[G]$-module décomposable.

PROPOSITION. - Soit M est un $A[G]$-module de rang 1 contenu dans $K[G]$, il est décomposable si et seulement si il existe un idempotent e de $K[G]$, $e \neq 1$, $e \neq 0$ appartenant à tous les ordres $\mathcal{O}_d(M_{\mathfrak{p}}, K_{\mathfrak{p}}[G])$ pour $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_1$.

En effet, si pour tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_1$, $e \in \mathcal{O}_d(M_{\mathfrak{p}}, K_{\mathfrak{p}}[G])$ on a $\check{M}_{\mathfrak{p}} e \subset \check{M}_{\mathfrak{p}}$, on en déduit $e \in \mathcal{O}_d(\check{M}, K[G])$ et d'après le théorème de Reiner M est décomposable.

Réciproquement, si il existe $e \in \mathcal{O}_d(\check{M}, K[G])$, $e \neq 1$, $e \neq 0$ c'est que $e \in \mathcal{O}_d(\check{M}_{\mathfrak{p}}, K[G])$ pour tout $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{P}_1$ et par complétion $M_{\mathfrak{p}} e \subset M_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{P}_1$.

LEMME. - Si 2 divise la différente $\mathcal{D}(L/K)$, B est un $A[G]$-module décomposable.

Démonstration. Nous allons montrer que si 2 divise la différente de L/K, l'idempotent $\frac{1+\tau}{2}$ appartient à tous les ordres $\mathcal{O}_d(M_{\mathfrak{p}}, K_{\mathfrak{p}}[G])$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_1$.

Regardons tout d'abord les idéaux $\mathfrak{p}$ au-dessus de 2. Si 2 divise la différente de L/K, toutes les extensions locales relatives à des $\mathfrak{p}$ au-dessus de 2 sont de degré 2 et elles sont ramifiées avec une ramification presque maximale. (cf. [5], [2], [10]).

Pour ces extensions, on a :

$$M_p = \bigoplus_{0\le i\le p-1} \sigma^i M_{\mathfrak{P}}$$

et d'après [2] si la ramification est presque maximale, on a $\frac{1+\tau}{2} \in \mathcal{O}_d(M_{\mathfrak{P}}, K_p(D)) = \mathcal{O}(B_{\mathfrak{P}}, K_p[D])$. Par suite, pour ces idéaux p , $\frac{1+\tau}{2} \in \mathcal{O}_d(M_p, K_p[G])$.

Regardons alors les extensions locales pour des idéaux p au-dessus de p .

1er cas. - $M_p = M_{\mathfrak{P}}$. L'extension locale est soit modérément ramifiée et d'après le choix de $\theta_{\mathfrak{P}}$: $M_{\mathfrak{P}} = A_p[G]$ (voir remarque 2.2), et donc $\frac{1+\tau}{2} \in \mathcal{O}_d(A_p[G], K_p[G])$; soit ramifiée et toujours d'après le choix de $\theta_{\mathfrak{P}}$, on vérifie d'après [5] que $\frac{1+\tau}{2} \in \mathcal{O}_d(M_{\mathfrak{P}}, K_p[G])$.

2ème cas. - $M_p = M_{\mathfrak{P}} \oplus \tau M_{\mathfrak{P}}$, l'extension locale est de degré p . D'après le choix du $\theta_{\mathfrak{P}}$, on vérifie que $M_{\mathfrak{P}}\tau = \tau M_{\mathfrak{P}}$ et donc que $\frac{1+\tau}{2} \in \mathcal{O}_d(M_p, K_p[G])$.

3ème cas. - $M_p = \bigoplus_{0\le i\le p-1} \sigma^i M_{\mathfrak{P}}$, l'extension locale est de degré 2, donc modérément ramifiée ; par suite, $\frac{1+\tau}{2} \in \mathcal{O}(B_{\mathfrak{P}}, K_p[D]) = \mathcal{O}_d(M_{\mathfrak{P}}, K_p[D])$ et on en déduit $\frac{1+\tau}{2} \in \mathcal{O}_d(M_p, K_p[G])$.

En utilisant la proposition précédente (§2.3), on a démontré que si 2 divise la différente de L/K , B est un $A[G]$-module décomposable.

LEMME. - Si p divise la différente $\mathcal{D}(L/K)$, B est un $A[G]$-module décomposable.

Démonstration. - Nous allons montrer que si p divise la différente de L/K , l'idempotent $e = \left(\frac{(p-1)T}{2p} - (\sigma+\sigma^2+\ldots+\sigma^{\frac{p-1}{2}})\right)(1+\tau)$ appartient à

tous les ordres $\mathcal{O}_d(M_\mathfrak{p}, K_p[G])$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_1$.

Regardons tout d'abord les idéaux $\mathfrak{p}$ au-dessus de p , si p divise la différente de L/K , toutes les extensions locales relatives à des $\mathfrak{p}$ au-dessus de p sont de degré $2p$ ou p et elles sont ramifiées avec une ramification presque maximale (cf. [5]) . Donc deux cas se présentent :

1er cas. - $M_p = M_\mathfrak{P}$. D'après le choix de $\theta_\mathfrak{P}$ et d'après les résultats de [5] donnant une A-base de $M_\mathfrak{P}$ on démontre que $e \in \mathcal{O}_d(M_p, K_p[G])$.

2ème cas. - $M_p = M_\mathfrak{P} + \tau M_\mathfrak{P}$ l'extension locale est de degré p , ramifiée avec une ramification presque maximale ; on sait d'après le choix de $\theta_\mathfrak{P}$ et d'après [5] que $M_\mathfrak{P} \frac{T}{p} \subset M_\mathfrak{P}$, que $M_\mathfrak{P} \cdot A_p[H] \subset M_\mathfrak{P}$ et que $M_\mathfrak{P}\tau = \tau M_\mathfrak{P}$. Donc $e \in \mathcal{O}_d(M_p, K_p[G])$.

Pour les idéaux $\mathfrak{p}$ au-dessus de 2 , on remarque que $e \in A_p[G]$. D'autre part, soit l'extension locale est modérément ramifiée et par suite $M_p e \subset M_p$, soit elle est de degré 2 et il est facile de vérifier que $M_p e \subset M_p$ puisqu'on a une base de $M_\mathfrak{P}$ d'après [5] .

III.2.4. Condition nécessaire pour que le $A[G]$-module B soit décomposable.

PROPOSITION (cf. [8]). - Soit A un anneau intègre de caractéristique 0 , K son corps des quotients et G un groupe fini, Card $G = n$. Si $e = \sum_{g \in G} a_g g$ est un idempotent de $K[G]$, $e \neq 0$ et $e \neq 1$ alors on a : $a_1 = \frac{q}{n}$ avec q un entier, $0 < q < n$.

En particulier, si G est un groupe diédral, a_1 , mis sous forme irréductible, admet forcément un 2 ou un p au dénominateur ou les deux.

LEMME. - Si ni 2 ni p ne divise la différente $\mathcal{D}(L/K)$, B est un $A[G]$-module indécomposable.

Démonstration. Pour démontrer ce lemme nous utiliserons la proposition précédente et nous montrerons qu'il ne peut pas exister d'idempotent e, $e \neq 1$, $e \neq 0$, tel que $e \in \mathcal{O}_d(M_\mathfrak{p}, K_\mathfrak{p}[G])$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_1$ car pour cet idempotent e, $e = \sum_{g \in G} a_g g$, a_1 ne peut avoir ni 2 ni p au dénominateur.

En effet, si 2 ne divise pas la différente $\mathcal{D}(L/K)$, c'est que les extensions locales au-dessus de 2 sont

- soit de degré 2 avec une ramification qui n'est pas presque maximale. Mais alors si on écrit $M_\mathfrak{p} = \bigoplus_{0 \leq i \leq p-1} \sigma^i M_\mathfrak{P}$, ni $M_\mathfrak{P}$ ni l'ordre $\mathcal{O}(M_\mathfrak{P}, K_\mathfrak{p}[D]) = \mathcal{O}(B_\mathfrak{P}, K_\mathfrak{p}[D])$ ne contiennent $\frac{1+\tau}{2}$ et comme $a_1 + a_\tau \tau$ (de l'écriture $e = \sum_{g \in G} a_g g$) est dans $M_\mathfrak{P}$, a_1 ne peut avoir de 2 au dénominateur ;

- soit de degré autre que 2, mais elles sont alors modérément ramifiées et a_1 n'aura pas non plus de 2 au dénominateur.

On montre de la même façon que si p ne divise pas la différente $\mathcal{D}(L/K)$, a_1 ne peut avoir de p au dénominateur et par suite B est un $A[G]$-module indécomposable.

La démonstration du théorème cité au début du paragraphe III.2 résulte immédiatement des lemmes des paragraphes 2.3 et 2.4 précédents.

Remarquons que la donnée précise, pour une extension L/K, des nombres de ramification des extensions locales permet souvent d'écrire une décomposition en sous-$A[G]$-modules indécomposables du $A[G]$-module M.

Par exemple, si p ne divise pas $\mathcal{D}(L/K_H)$ et si 2 divise $\mathcal{D}(L/K)$ une décomposition de M en sous-$A[G]$-modules indécomposables est $M = M\frac{1+\tau}{2} \oplus M\frac{1-\tau}{2}$.

III. 2. 5. Etude du cas $K = \mathbb{Q}$.

Dans le cas d'une extension diédrale $L/\mathbb{Q}$, les résultats se simplifient un peu, nous les résumons de la manière suivante, en notant L_H le sous-corps de L fixe par le sous-groupe H .

• Si 2 ne divise pas $\mathcal{D}(L/\mathbb{Q})$ et si p ne divise pas $\mathcal{D}(L/\mathbb{Q})$, B est un $A[G]$-module indécomposable.

• Si 2 ne divise pas $\mathcal{D}(L/\mathbb{Q})$, si p divise $\mathcal{D}(L/\mathbb{Q})$ mais ne divise pas $\mathcal{D}(L/L_H)$, B est indécomposable centralement, mais B est un $A[G]$-module décomposable.

• Si 2 ne divise pas $\mathcal{D}(L/\mathbb{Q})$ et si p divise $\mathcal{D}(L/L_H)$, $B = \frac{T}{p}B + (1-\frac{T}{p})B$ est la décomposition centrale de B .

• Si 2 divise $\mathcal{D}(L/\mathbb{Q})$ et que p divise $\mathcal{D}(L/L_H)$, $B = \frac{T(1+\tau)}{2p}B \oplus \frac{T(1-\tau)}{2p}B \oplus (1-\frac{T}{p})B$ est la décomposition centrale de B et $M = M\frac{T(1+\tau)}{2p} \oplus M\frac{T(1-\tau)}{2p} \oplus M(1-\frac{T}{p})(\frac{1+\tau}{2}) \oplus M(1-\frac{T}{p})(\frac{1-\tau}{2})$ est une décomposition totale de M .

• Si 2 divise $\mathcal{D}(L/\mathbb{Q})$ et que p ne divise pas $\mathcal{D}(L/L_{\mathbb{Q}})$, B est indécomposable centralement et $M = M\frac{1+\tau}{2} \oplus M\frac{1-\tau}{2}$ est une décomposition de M en sous-$A[G]$-modules indécomposables.

• Si 2p divise $\mathcal{D}(L/\mathbb{Q})$ et que p ne divise pas $\mathcal{D}(L/L_H)$, $B = \frac{T(1+\tau)}{2p}B \oplus (1-\frac{T(1+\tau)}{2p})B$ est la décomposition centrale de B et $M = M\frac{T(1+\tau)}{2p} \oplus M(1-\frac{T}{p})(\frac{1+\tau}{2}) \oplus M\frac{1-\tau}{2}$ est une décomposition totale de M .

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.M. BERGE - Anneaux d'entiers et ordres associés. Thèse de doctorat Bordeaux, avril 1979.

[2] F. BERTRANDIAS - Décomposition de Galois-module des entiers d'une extension cyclique de degré premier d'un corps de nombres ou d'un corps local. Extrait des annales de l'Institut Fourier, Tome XXIX, Fascicule 1, pp. 33-48 (1979).

[2bis] F. BERTRANDIAS - Décomposition du Galois-module des entiers d'une p-extension cyclique d'un corps local. Séminaire de théorie des nombres, Grenoble, nov. 1977.

[3] Z.I. BOREVICH et S.V. VOSTOKOV - The ring of integral elements of an extension of prime degree of a local field as a Galois-module. Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI) 31, pp. 24-37 (1973).

[4] C.W. CURTIS and I. REINER - Representation theory of finish groups and associative algebras. Interscience, New York (1962).

[5] M.J. FERTON - Sur l'anneau des entiers d'extensions cycliques de degré p et d'extensions diédrales de degré 2p d'un corps local. Thèse de doctorat 3e cycle, Grenoble (1972).

[6] H.W. LEOPOLDT - Uber die Hauptordnung der ganzen Elemente eines abelschen Zahlkörpers. J. reine angew Math. 201 (1959), pp. 119-149.

[7] Y. MIYATA - On the module structure of a p-extension over a p-adic number field. Nagoya Math. J. 77 (1980), pp. 13-23.

[8] I. REINER - K.W. ROGGENKAMP - Integral representations. Lecture Notes 744 Springer (1979), p. 73.

[9] J.P. SERRE - Corps locaux. Hermann (1962).

[9bis] J.P. SERRE - Représentations linéaires de groupes finis. Hermann (1971).

[10] S.V. VOSTOKOV - The ring of integral elements of an algebraic number field as a Galois-module. Zap. Naučn, Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI), 71 (1977), pp. 80-84, 284.