CHANTAL BERLINE

Stabilité et algèbre. 3. Anneaux

Groupe d'étude de théories stables, tome 2 (1978-1979), exp. n° 3, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=STS_1978-1979__2__A3_0>

STABILITÉ ET ALGÈBRE

3. Anneaux

par Chantal BERLINE (*)
[Université Paris-7]

L'ancêtre des résultats qui sont exposés ici est le théorème, maintenant classique, de MACINTYRE [9] qu'un corps commutatif est ω-stable si, et seulement si, il est $\aleph_1$-catégorique, si et seulement si, il est fini ou algébriquement clos. Ce résultat a été amélioré par CHERLIN et SHELAH [6] jusqu'à devenir le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Tout corps superstable est commutatif et fini ou algébriquement clos.

Vu la longueur et la technicité de la preuve de ce théorème, il est hors de question d'en donner ici une démonstration, cependant nous l'utiliserons sans cesse. La question de savoir s'il existe des corps stables non commutatifs est encore ouverte. On sait que les corps finis et les corps algébriquement ou séparablement clos sont des corps stables, on ignore s'il y en a d'autres.

A. Préliminaires algébriques

Le lecteur qui estimerait les rappels qui vont suivre trop succints pourra consulter [7].

Soit R un anneau, son radical de Jacobson J(R) est un idéal bilatère définissable. Si R est unitaire, c'est l'intersection des idéaux à gauche (resp. à droite) maximaux de R ou encore l'ensemble des éléments x de R tels que, pour tout a de R , 1 - ax est inversible à gauche. J(R) contient tout idéal nil (i. e. tout idéal dont tous les éléments sont nilpotents), en particulier, tout idéal (à gauche ou à droite) nilpotent (i. e. tout idéal dont une puissance est nulle), et par conséquent tout élément nilpotent central de R . En revanche, si R n'est pas commutatif, J(R) ne contient pas nécessairement tous les éléments nilpotents de R . Nous dirons que R est sans radical si J(R) = (0) . Pour tout anneau R , R/J(R) est sans radical.

Rappelons qu'un anneau est noethérien (resp. artinien) à gauche si toute suite

(*) Chantal BERLINE, Mathématiques, Université Paris-7, Aile 45-55, 2 place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05.

croissante (resp. décroissante) d'idéaux à gauche est stationnaire, et que artinien à gauche implique noethérien à gauche ; même chose pour la droite. L'anneau R est noethérien (resp. artinien) s'il l'est à droite et à gauche. R est noethérien (à gauche) si, et seulement si, tous ses idéaux (à gauche) sont de type fini. Enfin si R est artinien (à gauche) $J(R)$ est nilpotent.

Nous dirons que R est *semi-simple* s'il est *artinien et* sans radical.

THÉORÈME 2 (ARTIN-WEDDERBURN). - *Un anneau est semi-simple si, et seulement si, c'est une somme directe finie d'anneaux de matrices sur des corps éventuellement gauches.*

En particulier, tout anneau semi-simple $(\neq (0))$ est unitaire.

Il convient de *se méfier* des variations que subit la notion d'anneau semi-simple, comme celle d'anneau semi-primaire que nous introduirons dans la section suivante, quand on passe d'un auteur à l'autre.

B. Conditions de chaînes et conséquences

THÉORÈME 3. - *Tout anneau stable* R *est semi-primaire, c'est-à-dire satisfait les deux conditions équivalentes suivantes* :

(1) $J(R)$ *est nilpotent et* $R/J(R)$ *semi-simple* (i. e. *artinien*)

(2) *Il y a un entier* n *tel que toute suite strictement décroissante d'idéaux principaux* (*à gauche*) *de* R *est de longueur* $\leq n$.

Démonstration. - (2) est conséquence facile du corollaire 12 de l'exposé 1, et de la compacité. Pour l'équivalence de (1) et (2), on pourra par exemple consulter [7].

Pour un anneau quelconque les deux conditions qui suivent sont également équivalentes ([7], p. 164) :

(2)' *Toute suite décroissante d'idéaux principaux* (*à gauche*) *est stationnaire.*

(3) *Toute suite décroissante d'idéaux* (*à gauche*) *de type fini est stationnaire.*

COROLLAIRE 4. - *Pour un anneau stable, être noethérien* (*à gauche*) *équivaut à être artinien* (*à gauche*).

Démonstration. - Nous avons rappelé plus haut que artinien impliquait toujours noethérien. La réciproque est vraie pour les anneaux stables puisqu'ils satisfont (3).

COROLLAIRE 5. - *Tout anneau stable sans idéal nilpotent est artinien.*

En effet, il est sans radical donc semi-simple par le théorème 3.

Remarque. - Les propriétés (1), (2), (3) des anneaux stables conduisent à se demander si les anneaux stables n'admettraient pas la condition de chaîne décroissante sur les idéaux définissables avec paramètres. Il n'en est rien (exposé 11, exercice 15).

C. Anneaux semi-simples stables ([5], [8], [13])

THÉORÈME 6. - Un anneau semi-simple R est :

(a) λ-stable si, et seulement si, c'est une somme directe finie d'anneaux de matrices sur des corps, gauches éventuellement, λ-stables.

(b) superstable si, et seulement si, ω-stable si, et seulement si, tous les corps qui interviennent sont finis ou algébriquement clos.

(c) $\aleph_1$-catégorique si, et seulement si, il y a au plus un corps infini, i. e. si, et seulement si, R est fini ou de la forme $H \oplus M_n(K)$ où H est semi-simple fini, $n \geq 1$ et K algébriquement clos.

Démonstration. - On commence par remarquer qu'un anneau $M_n(D)$ est λ-stable si, seulement si, le corps gauche D l'est : en effet, $M_n(D)$ est clairement définissable à partir de D, au sens du théorème 7 de l'exposé 1, et réciproquement D s'identifie au sous-anneau $eM_n(D)e$ de $M_n(D)$, où e est la matrice qui a un 1 dans son coin supérieur gauche et des zéros partout ailleurs. On obtient alors (a) et (b) comme conséquences des théorèmes 7 et 8 de l'exposé 1 et des théorèmes 1 et 2.

Il en résulte que si $M_n(D)$ est $\aleph_1$-catégorique D est fini ou algébriquement clos. Réciproquement, si K est un corps algébriquement clos et si R' est élémentairement équivalent à $M_n(K)$, R' est de la forme $M_n(K')$ avec K' élémentairement équivalent à K ; on conclue facilement que $M_n(K)$ est $\aleph_1$-catégorique. D'autre part, si R est $\aleph_1$-catégorique, il est ω-stable, donc somme directe finie d'anneaux de matrices sur des corps algébriquement clos ou finis. Par un argument déjà rencontré plusieurs fois (LOWENHEIM-SKOLEM + FEFERMAN-VAUGHT), l'une au plus des composantes peut être infinie, et R est de la forme voulue. Pour achever la démonstration du théorème il suffit donc de prouver le résultat suivant.

LEMME 6.1. - Si S et H sont deux anneaux unitaires, H fini et S $\aleph_1$-catégorique, alors $R = S \oplus H$ est $\aleph_1$-catégorique.

Démonstration. - Soient u , v , 1 les unités respectives de H , S , R ; u et v s'identifient avec des idempotents centraux de R , et une fois cette identification faite, on a $u + v = 1$, $uR = H$, $vR = S$. Compte tenu du théorème 24 (b) de l'exposé 1, il nous suffit de vérifier que (R , u , v) est $\aleph_1$-catégorique. Soit (R' , u' , v') élémentairement équivalent à (R , u , v) . Alors $u' R'$ est isomorphe à H , et $v' R'$ élémentairement équivalent à S . Si

R' est de cardinal $\aleph_1$, on a donc $v' R'$ isomorphe à S par un isomorphisme qui échange v et v' . Donc :

$$R' = u' R' \oplus v' R' \simeq uR \oplus vR = R$$

et ceci par un isomorphisme u sur u' , v sur v' . Donc (R', u', v') est isomorphe à (R, u, v) . Q.E.D.

COROLLAIRE 7. - Tout anneau superstable sans éléments nilpotents est commutatif et somme directe finie de corps finis ou algébriquement clos.

Démonstration. - Soit R un anneau superstable sans éléments nilpotents. Compte tenu du théorème 3, R est semi-simple. On peut donc lui appliquer le théorème 6. Il reste à remarquer que, pour $n \geq 2$, $M_n(K)$ contient des éléments nilpotents.

COROLLAIRE 8. - Tout anneau intègre infini superstable est un corps algébriquement clos.

D. Anneaux commutatifs [5]

Les résultats de la section précédente permettent de traiter les anneaux commutatifs qui n'ont pas d'éléments nilpotents, et uniquement ceux-là. Les résultats qui vont suivre permettent d'aller plus loin. Au paravant, nous énonçons un lemme facile, vrai dans un contexte plus général.

Dans cette section, tous les anneaux sont supposés unitaires (cf. § E).

LEMME 9. - Tout anneau λ-stable est somme directe d'un nombre fini d'anneaux λ-stables indécomposables.

Démonstration. - L'algèbre de Boole $B(R)$ des idempotents centraux de R , munis de l'addition $e \dotplus f = e + f - ef$ et de la multiplication induite par celle de R est définissable dans R , donc stable, donc finie, (cf. corollaire 11, exposé 1). Soient $e_1 , \dots , e_n$ les atomes de $B(R)$: $R = \bigoplus_{i=1}^{n} Re_i$, et les Re_i n'ont pas d'idempotents centraux non triviaux donc sont indécomposables en somme directe d'anneaux. Enfin, ils sont λ-stables puisque définissables dans R .

LEMME 10. - Tout anneau commutatif λ-stable indécomposable est local d'idéal maximal nilpotent et de corps résiduel λ-stable.

Démonstration. - $J(R)$ est nilpotent (théorème 3), donc il est nil, et tout idempotent de $R/J(R)$ se relève en un idempotent de R (voir par exemple [7], p. 41), donc $R/J(R)$ est indécomposable. Comme il est semi-simple et commutatif, c'est un corps. R est donc local ; enfin $R/J(R)$ est λ-stable puisque quotient de R par un idéal définissable.

Dans le cas noethérien, le lemme 10 admet une réciproque que nous allons énoncer. Sa démonstration utilise le théorème de structure des anneaux locaux complets et la notion d'anneau de coefficients ; on la trouvera dans [5].

LEMME 11. - Tout anneau commutatif noethérien local d'idéal maximal nilpotent et de corps résiduel λ-stable est λ-stable.

Avant d'en tirer quelques conséquences nous rappelons les deux faits algébriques suivants :

Fait A : Un anneau local commutatif R est artinien si, et seulement si, il est noethérien et de radical nilpotent.

Fait B : Soit R un anneau tel que $J(R)$ est un idéal nilpotent de type fini, alors R est fini si, et seulement si, $R/J(R)$ l'est (exercice), en particulier si R est artinien et $R/J(R)$ fini, alors R est fini.

COROLLAIRE 12. - Un anneau commutatif noethérien est λ-stable si, et seulement si, c'est une somme directe finie d'anneaux locaux artiniens de corps résiduels λ-stables.

COROLLAIRE 13. - Un anneau commutatif noethérien est superstable si, et seulement si, il est ω-stable si, et seulement si, c'est une somme directe finie d'anneaux locaux artiniens de corps résiduels algébriquement clos et d'un anneau fini.

LEMME 14. - Tout anneau local commutatif L de rang de Morley fini et de corps résiduel infini est artinien.

Démonstration. - On va montrer que L est noethérien en montrant qu'il a la condition de chaîne croissante sur les idéaux de type fini. Ces idéaux sont définissables, il suffit donc, moyennant le théorème 20 de l'exposé 1, de montrer que si I et J sont deux idéaux quelconques de R tels que $I \subsetneq J$ le groupe additif de I est d'indice infini dans celui de J. Comme $L/J(L)$ est infini on peut trouver dans $L - J(L)$ une suite d'éléments $(\lambda_n)_{n\in\omega}$ telle que, pour tous entiers $m \neq n$, $\lambda_n - \lambda_n \notin J(L)$, i. e. $\lambda_n - \lambda_m$ est inversible. Soit alors $x \in J - I$, les classes $\lambda_n x + I$ sont disjointes et incluses dans J, et I est bien d'indice infini dans J.

Notons que l'hypothèse $L/J(L)$ infini est nécessaire (ex. 6.1 de [5]).

LEMME 15. - Tout anneau commutatif artinien local de corps résiduel algébriquement clos est $\aleph_1$-catégorique.

La démonstration utilise les mêmes ingrédients que celle du lemme 11, et se trouve également dans [5].

COROLLAIRE 16 [ ]. - Un anneau commutatif dont le quotient par le radical est *infini (par exemple un anneau de caractéristique 0) est $\aleph_1$-catégorique si, et seulement si, c'est la somme directe d'un anneau fini et d'un anneau local artinien de corps résiduel algébriquement clos.*

Démonstration. - Elle utilise le corollaire 13, les lemmes 14 et 15, et Feferman-Vaught + Lowenheim-Skolem.

La question de savoir quels sont les anneaux locaux commutatifs non noethériens de corps résiduel fini $\aleph_1$-catégoriques ou de rang de Morley fini (ainsi que les indécomposables non noethériens commutatifs ω-stables) est toujours ouverte.

E. Compléments ([5], [11])

THÉORÈME 17. - *Tout anneau stable ayant un élément régulier est unitaire.*

Démonstration. - Supposons que l'élément a de R est régulier, i. e. non diviseur de zéro. La suite Ra^n est stationnaire, donc il existe un entier $n \geq 1$ et un $\lambda \in R$ tels que $a^n = \lambda a^{n+1}$. Comme a est régulier, $a = \lambda a^2$. Posant $e = \lambda a$ il vient $a = ea$, donc $a = e^2 a$ et $e = e^2$. De plus, $ae = a$ $(= ea)$ puisque $aea = a^2$. Donc e est un idempotent régulier. Soit x un élément quelconque de R, $ex = e^2 x$, donc $x = ex$, de même $x = xe$, et e est unité de R.

Il est clair d'autre part qu'il existe des anneaux stables non unitaires : il suffit de prendre un groupe abélien et de le munir de la multiplication nulle.

Soit R un anneau non nécessairement unitaire, et R_1 l'anneau obtenu en lui ajoutant canoniquement une unité : R_1 est l'ensemble des couples (m, x) avec $m \in \mathbb{Z}$, $x \in R$, muni des opérations $(m, x) + (n, y) = (m + n, x + y)$ et $(m, x)(n, y) = (mn, my + nx + xy)$. R_1 conserve un certain nombre de propriétés de R, en particulier, il est noethérien si, et seulement si, R l'est (exercice). Supposons maintenant R de caractéristique finie, i. e. $nR = (0)$ pour un entier $n \geq 2$, on peut alors faire exactement la même construction avec $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ à la place de $\mathbb{Z}$, et dans ce cas on a le théorème suivant.

THÉORÈME 18. - *Si R est λ-stable (resp. $\aleph_0$-catégorique) R_1 l'est aussi.*

La démonstration est laissée en exercice.

F. $\aleph_0$-catégoricité ([1], [2], [4], [10], [12])

LEMME 19. - *Le fait pour un anneau d'être noethérien (resp. artinien) est préservé par sous-structure élémentaire.*

Démonstration. - Si R est sous-structure élémentaire de R', tout idéal I de R est tel que $R' I \cap R = I$, et par suite, toute chaîne strictement croissante ou décroissante d'idéaux de R fournit une chaîne de même nature et longueur pour R' .

Rappelons que tout anneau $\aleph_0$-catégorique est uniformément localement fini, en particulier il a une caractéristique finie.

LEMME 20. - _Si_ R _est_ _$\aleph_0$-catégorique_, J(R) _est nil d'exposant borné, c'est-à-dire qu'il y a un entier_ n _tel que_ $x^n = 0$ _pour tout_ x _de_ J(R) .

Démonstration. - Fixons $a \in R$. Les termes x^m , $m \in \underset{\sim}{N}$, ne prennent qu'un nombre fini de valeur sur a , donc il y a deux entiers r , $s \geq 1$ tels que $r < s$ et $a^r = a^s$. On en déduit $a^r(a^{s-r} - 1) = 0$ (si R est unitaire, sinon travailler dans R_1). Si $a \in J(R)$, alors $1 - a^{s-r}$ est inversible et $a^r = 0$. Avec la compacité, il est facile de voir qu'un même r conviendra pour tous les éléments de J(R) . En fait, on trouve dans [4] le résultat suivant, dont la démonstration est très technique :

THÉORÈME 21. - _Si_ R _est_ _$\aleph_0$-catégorique_, J(R) _est nilpotent_.

THÉORÈME 22. - _Tout anneau_ _$\aleph_0$-catégorique noethérien_ _(à gauche)_ _est fini_.

Démonstration. - Soit R un tel anneau, L le langage habituel des anneaux, et $L' = L \cup \{P_n \; ; \; n \in \underset{\sim}{N}\}$ où les P_n sont des prédicats unaires. Soit F l'ensemble de formules de L' suivant :

$$F = T(R) \cup \{\text{"}P_n \text{ est un idéal à gauche"} \; ; \; n \in \underset{\sim}{N}\} \cup \{\text{"}P_n \subsetneq P_{n+1}\text{"} \; ; \; n \in \underset{\sim}{N}\} .$$

Si R n'est pas artinien, F est finiment satisfaisable dans R donc a un modèle dénombrable R_0 . Par construction de F , R_0 n'est pas noethérien. Comme c'est le seul modèle dénombrable de T(R) , il se plonge élémentairement dans R , et R n'est pas noethérien (lemme 19). Contradiction. R est donc artinien, et R/J(R) semi-simple donc produit fini direct d'anneaux de matrices sur des corps gauches (théorème 2). Comme R est $\aleph_0$-catégorique, R/J(R) l'est aussi. Ceci n'est possible que si tous les corps qui interviennent sont finis et dans ce cas R/J(R) est fini. Pour conclure il suffit alors d'utiliser le fait B de la section D .

COROLLAIRE 23. - _Tout anneau_ _$\aleph_0$-catégorique stable_ R _est "nilpotent-par-fini"_.

Démonstration. - R/J(R) est $\aleph_0$-catégorique et artinien (théorème 3), donc fini, et J(R) est nilpotent, par exemple par le théorème 3, donc R a un idéal définissable d'indice fini et nilpotent. Q.E.D.

On trouvera dans [2] une _caractérisation des "nilpotents-par-finis totalement catégoriques"_.

THÉORÈME 24. - _Tout anneau unitaire_ _$\aleph_0$-catégorique sans éléments nilpotents est commutatif_.

Démonstration. - Un anneau $\aleph_0$-catégorique R est de caractéristique finie donc décomposable en une somme directe finie d'anneaux de caractéristique de la forme p^n, p premier, $n \in \underset{\sim}{N}$. Si R n'a pas d'éléments nilpotents, on voit facilement que $n = 1$. Comme pour montrer la commutativité de R il suffit de montrer celle de ses composantes, on peut supposer R de caractéristique p première. Soit $x \in R$, x engendre un anneau commutatif fini sans éléments nilpotents, donc produit d'un nombre fini de corps finis de caractéristique p. On en déduit qu'il y a un entier m tel que $x^{p^m} = x$, et c'est un résultat classique qu'un anneau sans éléments nilpotents dont tout élément satisfait une équation $x^{n(x)} = x$ est commutatif.

On trouvera dans [10] une classification complète des théories d'anneaux unitaires $\aleph_0$-catégoriques sans éléments nilpotents.

REFERENCES

[1] BALDWIN (J.) et ROSE (B.). - $\aleph_0$-categoricity and stability of rings, J. of Algebra, t. 45, 1977, p. 1-16.

[2] BAUR (W.), CHERLIN (G.) and MACINTYRE (A.). - Totally categorical groups and rings, J. of Algebra, t. 57, 1979, p. 407-440.

[3] CHERLIN (G.). - Stable algebraic theories, "Logic Colloquium 78", [1978. Mons]. Edited by M. Boffa, D. Van Dalen, K. McAloon, p. 53-74. - Amsterdam, North-Holland, 1979 (Studies in Logic, 97).

[4] CHERLIN (G.). - On $\aleph_0$-categorical nilrings, II, J. of symb. Logic, t. 45, 1980, p. 291-301.

[5] CHERLIN (G.) and REINEKE (J.). - Stability and categoricity for commutative rings, Annals of math. Logic, t. 10, 1976, p. 376-399.

[6] CHERLIN (G.) and SHELAH (S.). - Superstable fields and groups, Ann. of math. Logic, t. 18, 1980, p. 227-270.

[7] FAITH (C.). - Algebra, II : Ring theory. - Berlin, Springer-Verlag, 1976 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 191).

[8] FELGNER (U.). - $\aleph_1$-kategorische Theorien nicht-kommutativen Ringe, Fund. Math., Warszawa, t. 82, 1975, p. 331-346.

[9] MACINTYRE (A.). - On ω_1-categorical theories of fields, Fund. Math., Warzawa, t. 71, 1971, p. 1-25.

[10] MACINTYRE (A.) and ROSENSTEIN (J. G.). - $\aleph_0$-categoricity for rings without nilpotent elements and for Boolean structures, J. of Algebra, t. 43, 1976, p. 129-154.

[11] SABBAGH (G.). - Catégoricité en $\aleph_0$ et stabilité : Constructions les préservant et conditions de chaîne, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280, 1975, Série A, p. 531-533.

[12] SABBAGH (G.). - Catégoricité et stabilité : Quelques exemples parmi les groupes et les anneaux, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280, 1975, Série A, p. 603-606.

[13] ZIL'BER (B. I.). - Rings with $\aleph_1$-categorical theories, Algebra and Logic [Trans. from Algebra i Logika], t. 13, 1974, n° 2, p. 168-187.