BRUNO POIZAT

Le rang U selon Lascar

Groupe d'étude de théories stables, tome 2 (1978-1979), exp. nº 6, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=STS_1978-1979__2__A6_0>

LE RANG U SELON LASCAR

par Bruno POIZAT (*)

Comme nous le savons déjà, le rang U est le plus petit de tous les rangs ; il est défini par l'induction suivante :

- pour α limite, $RU(p) \geq \alpha$ si $RU(p) \geq \beta$ pour tout $\beta < \alpha$,

- $RU(p) \geq \alpha + 1$ si pour tout cardinal λ il existe un ensemble de paramètres où p a au moins λ fils de RU supérieur à α .

On montre sans peine que si p est instable $RU(p) = \infty$, et que si p est stable $RU(p) \geq \alpha + 1$ si, et seulement si, p a un fils déviant de RU supérieur à α (ce qui permet de montrer la propriété de complétion). On voit donc que dès que p a au moins $(2^T)^+$ fils de RU supérieur à α , ou même seulement deux si on est sur un modèle, alors $RU(p) \geq \alpha + 1$; que pour un type stable, RU(p) est le rang de fondation de la borne de p dans l'ordre fondamental ; on peut alors montrer que si $RU(p) \geq |T|^+$, $RU(p) = \infty$ (Pour plus de détails voir [1], exposés 1 et 4, ainsi que ma thèse).

Le rang U est la <u>seule</u> notion de rang possédant la propriété suivante : si $RU(p) = \alpha < \infty$, et si $\beta < \alpha$, p a un fils de RU β .

Nous allons examiner aujourd'hui les conséquences qu'a sur le rang U la symétrie de la déviation ; tous ces résultats sont dûs à Lascar et sont exposés dans sa thèse. $t(\overline{a}/A)$ désignera le type de $\overline{a}$ sur A , $RU(\overline{a}/A)$ le rang U de ce type; tous les types considérés seront supposés stables.

Les ordinaux ω^α sont définis par l'induction suivante :

- si α est limite, $\omega^\alpha = \sup \omega^\beta$ pour $\beta < \alpha$,

- $\omega^{\alpha+1} = \omega^\alpha \omega$ (Dans ω , on remplace chaque point par ω^α : c'est l'ordre lexicographique d'un dictionnaire arabe). On remarquera que si $\alpha > \beta$, $\omega^\beta + \omega^\alpha = \omega^\alpha$; tout ordinal s'écrit de manière unique sous la forme $\omega^{\alpha_1} n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_s} n_s$ où $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_s$: cette écriture est connue sous le nom de <u>développement de Cantor</u>. Si donc $\alpha = \sum \omega^\beta n_\beta$, $\alpha + \omega^\gamma$ est obtenu en effaçant dans le développement de Cantor les termes d'ordre inférieur à γ , et en augmentant d'une unité celui d'indice γ . La <u>somme naturelle</u> de deux ordinaux, $\alpha = \sum \omega^\gamma n_\gamma$, $\beta = \sum \omega^\gamma m_\gamma$, est l'ordinal $\alpha \oplus \beta = \sum \omega^\gamma (n_\gamma + m_\gamma)$; cette somme est commutative et associative ; elle permet, contrairement à la somme ordinaire, de récurrer sur les deux termes : si $\alpha' \leq \alpha$, $\beta' \leq \beta$, et $\alpha' < \alpha$ <u>ou</u> $\beta' < \beta$, alors $\alpha' \oplus \beta' < \alpha \oplus \beta$; en outre, $\alpha \oplus \beta$ est le plus petit majorant strict des $\alpha' \oplus \beta$ et des $\alpha \oplus \beta'$.

(*) Bruno POIZAT, 11 parc d'Ardenay, 91120 PALAISEAU.

1. L'inégalité de Lascar.

THÉORÈME 1. – $RU(\overline{b}/A \cup \{\overline{a}\}) + RU(\overline{a}/A) \leq RU(\overline{a}\hat{}\,\overline{b}/A)$; $RU(\overline{a}\hat{}\,\overline{b}/A) \leq RU(\overline{b}/A \cup \{\overline{a}\}) \oplus RU(\overline{a}/A)$.

On vérifiera sans peine cet encadrement lorsque certains de ces rangs sont ∞ (avec par convention $\infty = \alpha + \infty = \infty + \alpha = \alpha \oplus \infty$).

Hormis ce cas, la première inégalité se montre par induction sur $RU(\overline{a}/A) = \alpha$; pour tout $\beta < \alpha$, il existe A' tel que $RU(\overline{a}/A') = \beta$; plaçons A' par rapport à $\overline{b}$ de manière à ce que $t(\overline{b}/A' \cup \{\overline{a}\})$ ne dévie pas sur $A \cup \{\overline{a}\}$; par hypothèse d'induction : $RU(\overline{b}/A' \cup \{\overline{a}\}) + RU(\overline{a}/A') \leq RU(\overline{a}\hat{}\,\overline{b}/A')$ et $RU(\overline{b}/A' \cup \{\overline{a}\}) = RU(\overline{b}/A \cup \{\overline{a}\})$, $RU(\overline{a}\hat{}\,\overline{b}/A) > RU(\overline{a}\hat{}\,\overline{b}/A')$ (car $t(\overline{a}\hat{}\,\overline{b}/A')$ dévie sur A si, et seulement si $t(\overline{a}/A')$ dévie sur A ou $t(\overline{b}/A' \cup \{\overline{a}\})$ dévie sur $A \cup \{\overline{a}\}$; voir [1], exposé 5, lemme 4) ; d'où le résultat par continuité à droite de la somme, et le fait qu'il est trivial lorsque $RU(\overline{a}/A) = 0$.

La deuxième inégalité s'obtient par induction sur $RU(\overline{a}\hat{}\,\overline{b}/A) = \alpha$; pour tout $\beta < \alpha$, il existe A' tel que $RU(\overline{a}\hat{}\,\overline{b}/A') = \beta$, et, par hypothèse d'induction :

$$RU(\overline{a}\hat{}\,\overline{b}/A') \leq RU(\overline{b}/A' \cup \{\overline{a}\}) \oplus RU(\overline{a}/A') .$$

Mais comme ça dévie, l'un des deux termes du second membre est strictement inférieur au terme correspondant sur A , donc la somme naturelle aussi.

THÉORÈME 2. – <u>Si</u> $\overline{a}$ <u>et</u> $\overline{b}$ <u>sont indépendants au-dessus de</u> A ,

$$RU(\overline{a}\hat{}\,\overline{b}/A) = RU(\overline{a}/A) \oplus RU(\overline{b}/A) .$$

Il suffit de montrer que $RU(\overline{a}/A) \oplus RU(\overline{b}/A) \leq RU(\overline{a}\hat{}\,\overline{b}/A)$; on le fait par induction sur le premier membre : pour tout $\alpha < RU(\overline{a}/A)$, on prend A' tel que $RU(\overline{a}/A') = \alpha$, on place $\overline{b}$ sans dévier, et on en déduit par hypothèse de récurrence que :

$$\alpha \oplus RU(\overline{b}/A) = RU(\overline{a}/A') \oplus RU(\overline{b}/A') \leq RU(\overline{a}\hat{}\,\overline{b}/A') < RU(\overline{a}\hat{}\,\overline{b}/A) .$$

De même, pour tout $\beta < RU(\overline{b}/A)$, $RU(\overline{a}/A) \oplus \beta < RU(\overline{a}\hat{}\,\overline{b}/A)$; d'où la conclusion.

<u>Exemple</u>. – On considère la théorie T des corps différentiellement clos de caractéristique nulle, A un tel corps, a différentiellement transcendant sur A , b la dérivée de a :

$$RU(b/A \cup \{a\}) + RU(a/A) = 0 + \omega = \omega = RU(a\hat{}\,b/A) = 0 \oplus \omega = RU(b/A \cup \{a\}) \oplus RU(a/A)$$

mais

$$RU(a/A \cup \{b\}) + RU(b/A) = 1 + \omega = \omega = RU(a\hat{}\,b/A) = RU(b\hat{}\,a/A)$$
$$< 1 \oplus \omega = \omega + 1 = RU(a/A \cup \{b\}) \oplus RU(b/A) .$$

2. Le lemme de symétrie de LASCAR.

THÉORÈME 3. - Si $t(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\})$ est superstable (c'est-à-dire rangé par le rang U), $RU(\bar{a}/A) \geq RU(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\}) \oplus \alpha$ implique $RU(\bar{b}/A) \geq RU(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\}) + \alpha$.

Par induction sur $RU(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\}) \oplus \alpha$; étant donné $\beta < \alpha$, choisissons A' tel que $t(\bar{a}/A')$ dévie sur A et $RU(\bar{a}/A') \geq RU(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\}) \oplus \beta$ et plaçons A' de façon que $t(\bar{b}/A' \cup \{\bar{a}\})$ ne dévie pas sur $A \cup \{\bar{a}\}$; distinguons deux cas :

(i) $t(\bar{b}/A')$ dévie sur A ; $RU(\bar{a}/A) \geq RU(\bar{a}/A' \cup \{\bar{b}\}) \oplus \beta$, d'où, par hypothèse de récurrence, $RU(\bar{b}/A) > RU(\bar{b}/A) \geq RU(\bar{b}/A' \cup \{\bar{a}\}) + \beta = RU(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\}) + \beta$.

(ii) $t(\bar{b}/A')$ ne dévie pas sur A ; le type de A' sur $A \cup \{\bar{b}\}$ ne dévie pas sur A ; mais le type de A' sur $A \cup \{\bar{a}\}$ dévie sur A : il est donc nécessaire (suivez les bornes !) que le type de A' sur $A \cup \{\bar{a} , \bar{b}\}$ dévie sur $A \cup \{\bar{b}\}$, c'est-à-dire que $RU(\bar{a}/A' \cup \{\bar{b}\}) < RU(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\})$, d'où

$$RU(\bar{a}/A') \geq RU(\bar{a}/A' \cup \{\bar{b}\}) \oplus (\beta + 1) ,$$

et par hypothèse de récurrence :

$$RU(\bar{b}/A) = RU(\bar{b}/A') \geq RU(\bar{b}/A' \cup \{\bar{a}\}) + \beta + 1 = RU(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\}) + \beta + 1 .$$

Dans tous les cas de figure $RU(\bar{b}/A) > RU(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\}) + \beta$, d'où le résultat par continuité à droite de la somme.

Remarque. - On a utilisé la stabilité de $t(A'/A)$, mais on peut toujours la supposer.

THÉORÈME 4. - Si $t(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\})$ est superstable, $RU(\bar{a}/A) \geq RU(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\}) + \omega^{\alpha} n$ implique $RU(\bar{b}/A) \geq RU(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\}) + \omega^{\alpha} n$.

Scholie. - Ce théorème généralise la symétrie de la déviation : si $\bar{b}$ fait dévier $\bar{a}$ au moins $\omega^{\alpha} n$ fois, $\bar{a}$ fait dévier $\bar{b}$ au moins $\omega^{\alpha} n$ fois.

Si $\alpha = 0$, $RU(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\}) + n = RU(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\}) \oplus n$; sinon $\omega^{\alpha} n$ est limite et pour tout β qui lui est strictement inférieur $RU(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\}) + \omega^{\alpha} n > RU(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\}) \oplus \beta$; d'où le résultat d'après le théorème précédent.

3. Déviation des ensembles indépendants.

On considère un ensemble de paramètres A , et des éléments (ou des uples) a_β , pour $\beta < \alpha$; $A_\beta = A \cup \{\dots a_\gamma \dots\}$ pour $\gamma < \beta$; je rappelle que les a_β sont dits indépendants au-dessus de A si pour tout β , $t(a_\beta/A_\beta)$ ne dévie pas sur A ; cela revient au même de dire que pour tout $\beta < \alpha$, $t(a_\beta/A_\alpha - \{a_\beta\})$ ne dévie pas sur A , donc que cette notion est indépendante de l'énumération choisie ([1], exposé n° 5). On remarquera que si on regroupe les éléments d'un ensemble indépendant en paquets de uples, on obtient un ensemble de uples indépendants (toujours pour la même raison : $t(\bar{a}\hat{}\bar{b}/A')$ dévie sur A si, et seulement si, etc. ...).

Soit $\bar{b}$ un uple de paramètres, et appelons p_β le type de $\bar{b}$ sur A_β ; une application aisée de la symétrie de la déviation nous avait permis de montrer que si $t(a_\beta/A \cup \{\bar{b}\})$ dévie sur A, alors $p_{\beta+1}$ est extension déviante de p_β ; donc si $t(\bar{b}/A)$ est superstable, le nombre de ces a_β est fini, et même, dans le cas où $RU(\bar{b}/A)$ est fini, majoré par ce dernier. Le théorème suivant montre que même lorsque $RU(\bar{b}/A)$ est infini, à condition que tous ces $t(a_\beta/A)$ soient superstables, leur nombre peut être majoré en fonction seulement de $RU(\bar{b}/A)$.

THÉORÈME 5. - Soit S un ensemble indépendant au-dessus de A, tel que, pour tout a de S, $t(a/A)$ soit superstable ; soit $\bar{b}$ tel que

$$RU(\bar{b}/A) = \omega^{\alpha_u} n_u + \dots + \omega^{\alpha_1} n_1 \quad \text{avec} \quad \alpha_u > \dots > \alpha_1 ,$$

et que, pour tout a de S, $t(a/A \cup \{\bar{b}\})$ dévie sur A. Alors S a strictement moins de $(n_u + 1) \dots (n_1 + 1)$ éléments.

On montre par induction sur i que si S satisfait les hypothèses du théorème et a $(n_i + 1) \dots (n_1 + 1)$ éléments, alors $RU(\bar{b}/A \cup S) < \omega^{\alpha_u} n_u + \dots + \omega^{\alpha_{i+1}} n_{i+1}$; cela donne bien la conclusion du théorème car s'il existait un S de cardinal $(n_u + 1) \dots (n_1 + 1)$, on devrait avoir $RU(\bar{b}/A \cup S) < 0$!

Pour $i = 1$; si $a_j \in S$, par symétrie $t(\bar{b}/A \cup \{a_j\})$ dévie sur A, et à cause de la forme de $RU(\bar{b}/A)$, $RU(\bar{b}/A) \geqslant RU(\bar{b}/A \cup \{a_j\}) + \omega^{\alpha_1}$; donc d'après le théorème 4, $RU(a_j/A) \geqslant RU(a_j/A \cup \{\bar{b}\}) + \omega^{\alpha_1}$; vu l'indépendance de S, $RU(a_j/A) = RU(a_j/A_j)$, et par conséquent $RU(a_j/A_j) \geqslant RU(a_j/A_j \cup \{\bar{b}\}) + \omega^{\alpha_1}$; une nouvelle application du théorème 4 donne alors $RU(\bar{b}/A_j) \geqslant RU(\bar{b}/A_j \cup \{a_j\}) + \omega^{\alpha_1}$. Le type de $\bar{b}$ dévie donc $n_1 + 1$ fois d'au moins ω^{α_1},

$$RU(\bar{b}/A) \geqslant RU(\bar{b}/A \cup S) + \omega^{\alpha_1}(n_1 + 1) ,$$

d'où le résultat.

Le passage de i à $i + 1$ se fait ainsi : on découpe S en $n_i + 1$ paquets de cardinal $(n_{i-1} + 1) \dots (n_1 + 1)$, soient $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_j, \dots$; par hypothèse d'induction $RU(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}_j\}) < \omega^{\alpha_u} n_u + \dots + \omega^{\alpha_{i+1}} n_{i+1}$, donc

$$RU(\bar{b}/A) \geqslant RU(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}_j\}) + \omega^{\alpha_{i+1}} .$$

On en déduit comme précédemment, par un aller et retour du lemme de symétrie de Lascar, que chaque paquet fait dévier le type de $\bar{b}$ d'au moins $\omega^{\alpha_{i+1}}$ fois, d'où le résultat.

4. Applications.

4-A. Types de rang $U\ \omega^\alpha$

PROPOSITION. - Soient A un ensemble de paramètres, a de rang $U\ \omega^\alpha$ sur A, et B un ensemble d'éléments tous de rang U strictement inférieur à ω^α sur A ; alors le type de a sur $A \cup B$ ne dévie pas sur A.

Si ce type déviait, il dévierait à cause d'un ensemble fini $\bar{b} = \{b_1, \dots, b_n\}$ d'éléments de B ; donc d'après l'inégalité de Lascar,

$$RU(a/A) \leq RU(a^\frown\bar{b}/A) \leq RU(a/A\cup\{\bar{b}\}) \otimes RU(b_1/A) \otimes \dots \otimes RU(b_n/A) ;$$

c'est impossible car ω^α n'est pas somme naturelle d'ordinaux strictement inférieurs.

Cette proposition permet de faire une théorie de la dimension : soit B un ensemble d'éléments tous de rang U égal à ω^α au-dessus de A ; on montre alors sans peine que les ensembles indépendants sur A maximaux extraits de B ont tous même cardinal, car on a les propriétés de réfléxivité, extension-finitude, symétrie de la dépendance, et en outre, à cause de la proposition ci-dessus, également la transitivité (voir exercice 14, 1978). Exemples de cette situation : $\alpha = 0$, $\omega^\alpha = 1$: dimension d'une formule fortement minimale, base d'un espace vectoriel, base de transcendance d'un corps ; $\alpha = 1$, $\omega^1 = \omega$: base de transcendance différentielle d'un corps différentiel.

On peut aussi démontrer à peu de frais que si T est ω_1-catégorique, tous les types sont de RU fini (ce qui est beaucoup plus faible que le résultat de Baldwin); en effet, sinon on aurait un modèle M dénombrable, avec un type p de RU égal à 1, et un type q de RU égal à ω ; formons la suite de Morley S de p de longueur $\lambda > \omega$, et prenons le modèle premier N au-dessus de $M \cup S$: tout élément de N a un type isolé sur $M \cup S$, qui ne peut cohériter de sa restriction à M que si cet élément est dans M, donc (air connu) tout élément de $N - M$ a un type sur $M \cup S$ qui dévie sur M ; d'après la proposition, q est omis dans N, qui est un modèle non saturé de cardinal λ.

4-B. Nombre de modèles dénombrables d'une théorie superstable.

THÉORÈME 6 (LACHLAN, LASCAR). - Soit T complète, dénombrable, superstable, non ω-catégorique ; T a une infinité de modèles dénombrables deux à deux non isomorphes ; plus précisément, il existe une suite M_n, $n \in \omega$, de modèles dénombrables de T telle que M_n se plonge (élémentairement) dans M_m si, et seulement si, $n \leq m$.

1° Si pour un certain N, $S_N(\emptyset)$ n'est pas dénombrable, on prend M_0 dénombrable, M_1 extension élémentaire dénombrable de M_0 réalisant un N-type omis par M_0, etc. ...

2° On suppose donc que pour tout N, $S_N(\emptyset)$ est dénombrable, ce qui revient à dire que pour tout $\bar{a}$ fini $S_1(\bar{a})$ est dénombrable ; d'après le théorème de Baire, pour tout $\bar{a}$ fini les types isolés de $S_1(\bar{a})$ sont denses, et on n'a aucun mal à construire un modèle atomique premier sur $\bar{a}$ (à la n-ième étape, satisfaire le test de Tarski pour chacune des n premières formules de chacun des ensembles de paramètres finis introduits précédemment).

Comme T n'est pas ω-catégorique, pour un certain N, S_N est infini et contient un type p non isolé ; soit $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n, \ldots$ une suite indépendante de réalisations de p, par exemple la suite de Morley d'un type fort étendant p, et soit M_n le modèle premier sur $A_n = \bar{a}_1{}^\frown\bar{a}_2{}^\frown\ldots{}^\frown\bar{a}_n$; tous les uples de M_n ont un type isolé sur A_n, et ceux qui réalisent p ont un type sur A_n qui dévie sur $\emptyset$ (Théorème de l'application ouverte : voir appendice ci-après) ; donc, d'après le théorème 4, il existe un entier k, qui ne dépend que de $RU(A_n/\emptyset)$, tel que M_n ne contienne pas de suite indépendante de réalisations de p de longueur k : pour $j \geq k$, M_j n'est pas isomorphe à une restriction élémentaire de M_n.

On n'a alors aucun mal à extraire de la suite M_n une suite ayant la propriété demandée.

<u>Remarque</u>. - Il suffit d'avoir p superstable et non isolé dans $S_N(\emptyset)$ pour avoir le résultat ; on remarquera que si T est superstable et non ω-catégorique, un modèle atomique sur un ensemble fini ne peut réaliser tous les types absolus.

4-C. Les modèles dénombrables d'une théorie ω_1-catégorique.

Nous savons (exposé 3) que si T est ω_1-catégorique, il existe une formule minimale $f(x, \bar{b})$, à paramètres $\bar{b}$ de type isolé dans $S(\emptyset)$, et que les modèles se décrivent ainsi : on prend une réalisation de $\bar{b}$ dans M, une suite indépendante $A = \{a_0, \ldots, a, \ldots\}$ maximale dans la formule minimale, et alors M est le modèle premier sur $A \cup \{\bar{b}\}$. Si A est de cardinal $\lambda > \omega$, on obtient ainsi l'unique modèle de cardinal λ ; si A est dénombrable, on obtient le modèle dénombrable saturé M_ω ; c'est évidemment le seul modèle dénombrable si T est ω-catégorique, ce qui signifie que la suite $\bar{b}, a_0, \ldots, a_n, \ldots$ est atomique sur $\emptyset$.

Sinon il existe un plus grand entier k tel que la suite $\bar{b}, a_0, \ldots, a_k$ soit atomique, et elle doit bien sûr être présente dans tous les modèles. Appelons alors M_0 le modèle premier sur $\bar{b}, a_0, \ldots, a_k$ (c'est le modèle premier sur $\emptyset$), M_1 le modèle premier sur $\bar{b}, a_0, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, M_n$ le modèle premier sur $b, a_0, \ldots, a_{k+n}, \ldots$ Nous sommes sûrs d'avoir ainsi décrit tous les modèles, et <u>dans le cas où</u> f <u>est sans paramètres</u>, nous voyons que $M_n \neq M_m$ si $n \neq m$; mais si f a un paramètre $\bar{b}$, il se pourrait que pour une autre interprétation $\bar{b}'$ de ce paramètre M_n apparaisse comme isomorphe à M_m, avec $n \neq m$ (ω est exclus car M_n n'est pas saturé) ; en fait, cela est impossible, et tous nos M_n sont distincts d'après la proposition suivante :

PROPOSITION. - <u>Si</u> M <u>est un modèle dénombrable non saturé d'une théorie</u> ω_1-<u>catégorique</u>, M <u>n'a pas de restriction élémentaire propre qui lui soit isomorphe</u>.

(La proposition montre bien que $M_n \neq M_m$ si $n < m$, car M_n est visiblement restriction de M_m.)

Supposons donc que $M = M_n$ ait une restriction isomorphe propre M' ; soit $\bar{b}'$ l'image de $\bar{b}$ par cet isomorphisme : comme $f(x, \bar{b}')$ n'a pas de paires de Vaught, il y a dans $M - M'$ des éléments qui la satisfont, et M a une restriction isomorphe à M_{n+1}. Il en est de même de M', et M a une restriction propre isomorphe à M_{n+1}, donc aussi une restriction isomorphe à M_{n+2}, etc. : si $m \geq n$, M_m se plonge élémentairement dans M_n.

Mais alors les modèles dénombrables de T sont $M_0, \ldots, M_{n-1}, M_\omega$, plus tous ceux de la forme M_{n+s} qui se plongent les uns dans les autres : on contredit la conclusion du théorème 6.

Appendice. Le théorème de l'application ouverte

THÉORÈME 7. - L'application restriction de l'espace des types forts $St_1(A)$ dans l'espace des types $S_1(A)$ est ouverte.

Nous savons que si Ω et Ω' sont deux types forts qui se projettent sur le même type p, il existe un automorphisme σ, conservant les types sur A, de $St_1(A)$ tel que $\sigma\Omega = \Omega'$. Si donc O est un ouvert de $St_1(A)$, le complémentaire de sa projection est la projection de l'intersection des complémentaires des σO, où σ parcourt l'ensemble des automorphismes de $St_1(A)$ qui conservent les types ; ce dernier ensemble est fermé, donc compact, et sa projection est fermée.

THÉORÈME 8 (dit de l'application ouverte, de LASCAR). - T stable ; soient $A \subset B$ deux ensembles de paramètres, X le fermé de $S_1(B)$ formé des types qui ne dévient pas sur A ; alors la restriction à X de l'application-restriction de $S_1(B)$ sur $S_1(A)$ est ouverte.

Si B est un modèle, c'est une conséquence du théorème 7 car la restriction de $S_1(M)$ sur $St_1(A)$ induit un isomorphisme de X sur $St_1(A)$ (Application bijective continue de X vers $St_1(A)$: par compacité l'application réciproque est continue) ; sinon on considère un modèle M contenant B, et Y les types sur M qui ne dévient pas sur A : si O est un ouvert de X, son image réciproque O' est un ouvert de $S_1(M)$; la projection de O' dans $S_1(A)$ est ouverte, et c'est aussi la projection de O.

COROLLAIRE. - T stable ; $A \subset B$; si $p \in S_1(B)$ est isolé et ne dévie pas sur A, p/A est isolé dans $S_1(A)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Groupe d'étude de Théories stables (Bruno POIZAT), 1re année, 1977/78. - Paris, Secrétariat mathématique, 1978