

GROUPE D'ÉTUDE EN THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES

GEORGES RHIN

Sur les mesures d'irrationalité de certains nombres transcendants

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 1 (1984-1985), exp. n° 28, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=TAN_1984-1985__1__A10_0

© Groupe d'étude en théorie analytique des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude en théorie analytique des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES MESURES D'IRRATIONALITÉ DE CERTAINS NOMBRES TRANSCENDANTS

par Georges RHIN (*)

1. Introduction.

Soit α un élément de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On dit que le réel $\mu = \mu(\alpha)$ est une mesure d'irrationalité (effective) de α si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $q_0(\epsilon) > 0$ effectivement calculable tel que, pour tout couple (p, q) de \mathbb{Z}^2 vérifiant $q \geq q_0(\epsilon)$, on ait $|\alpha - p/q| \geq q^{-\mu-\epsilon}$.

Nous étudions ici $\log 2$ et π , mais cette méthode se généralise à d'autres nombres transcendants ou même algébriques. La méthode de Baker de minoration de formes linéaires de logarithmes [2] fournit $\mu(\log 2) = 10^{22}$. En 1978, APÉRY (cf. [11]) obtient $\mu(\log 2) = 4,622 \dots$ par une méthode d'accélération de la convergence de la série définissant $\log 2$. Les approximations de $\log 2$ obtenues sont liées aux approximations de Padé de la fonction $\log(1 - (1/z))$. Cette méthode avait déjà permis à BAKER [1] de donner en 1964 $\mu(\log 2) = 12,5$. En 1982, CHOUDNOVSKY ([5] et [7]) annonce $\mu(\log 2) = 4,269\ 654\ 9$ et $\mu(\log 2) = 4,134\ 400\ 029$.

Nous donnons ici des démonstrations simples de ces deux résultats, et nous donnons la valeur $\mu(\log 2) = 4,079\ 154 \dots$

MAHLER [9] a donné en 1953 $\mu(\pi) = 42$, puis MIGNOTTE [10] a donné en 1974 $\mu(\pi) = 20$. Ce résultat a été légèrement amélioré par CHOUDNOVSKY en 1979 [4] avec $\mu(\pi) = 19,89$. Ce dernier a annoncé en 1982 successivement $\mu(\pi) = 17$, puis $\mu(\pi) = 14,65$ ([6] et [7]). Nous donnons ici la valeur $\mu(\pi) = 16,2$.

2. Mesure d'irrationalité de $\log 2$.

On étudie les intégrales du type

$$I_n = \int_0^1 \frac{H_n(x)}{(x+1)^{n+1}} dx,$$

où H_n est un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré inférieur ou égal à $2n$ appartenant à l'idéal $(X+1, 2)^n$. Alors

$$H_n(X) = \sum_{i=n}^{2n} b_i (X+1)^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^{n-i} (X+1)^i$$

et

$$I_n = b_n \log 2 + a_n$$

(*) Georges RHIN, Département de Mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences, Ile du Saulcy, 57045 METZ CEDEX 1.

avec $b_n \in \mathbb{Z}$ et

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b_i 2^{n-i}}{n-i} (1 - 2^{i-n}) + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{b_i}{i-n} (2^{i-n} - 1).$$

Si $d_n = \text{ppcm}(1, 2, \dots, n)$, il est clair que $d_n a_n$ est dans \mathbb{Z} . Pour obtenir une mesure d'irrationalité de $\log 2$, il suffit alors d'estimer I_n et de majorer $|b_n|$ qui est donné par

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{H_n(z)}{(z+1)^{n+1}} dz,$$

où C est un cercle de centre -1 , de rayon non nul, et d'utiliser le lemme suivant.

LEMME. - Soit α un réel. Soient $k_0 > 0$, $\lambda_0 \geq 1/2 \geq \lambda_1 > 0$, $1 < E_0 \leq E_1$ et $Q > 1$ des nombres réels tels qu'il existe une suite (p_n, q_n) de \mathbb{Z}^2 vérifiant, pour $n \geq 0$,

$$|q_n| \leq k_0 Q^n \quad \text{et} \quad \lambda_1 E_1^{-n} \leq |q_n \alpha - p_n| \leq \lambda_0 E_0^{-n}.$$

Alors, pour tous p, q dans \mathbb{Z} , $q \neq 0$,

$$|\alpha - p/q| \geq c |q|^{-\mu},$$

où $\mu = \frac{\log(QE_1)}{\log E_0}$ et $c = \frac{\lambda_1}{k_0} (QE_1)^{-(1+(\log(\lambda_0/\lambda_1)/\log E_0))}$.

Démonstration. - Soit $\delta = \alpha - (p/q)$, et soit n le plus petit des entiers m tels que

$$|q_n \alpha - p_n| < \frac{\lambda_1}{|q|}.$$

Il est clair que $q_n \neq 0$. Nous avons

$$q |q_n \alpha - p_n| = q_n p - p_n q + q \delta q_n.$$

Si $q_n p - p_n q = 0$,

$$|\delta| \geq \frac{1}{|q_n|} \lambda_1 E_1^{-n}.$$

Puisque n est minimal et que $n \geq 1$,

$$\lambda_0 E_0^{-n+1} \geq |q_{n-1} \alpha - p_{n-1}| \geq \frac{\lambda_1}{|q|},$$

donc $n \leq 1 + (\log(|q| \lambda_0/\lambda_1)/\log E_0)$.

De $|\delta| \geq \lambda_1 E_1^{-n}/k_0 Q^n$, on déduit que

$$|\delta| \geq c |q|^{-\mu}.$$

Si $q_n p - p_n q \neq 0$, alors $|q_n p - p_n q| \geq 1$ et

$$|\delta q q_n| \geq 1 - |q| |q_n^\alpha - p_n| \geq \frac{1}{2},$$

d'après le choix de n . On a $|\delta| \geq 1/2 k_0 |q| Q^n$, et l'on vérifie que la minoration précédente est encore valable.

On appliquera le lemme à l'expression $d_n I_n = d_n b_n \log 2 + d_n a_n$ en remarquant que, d'après le théorème des nombres premiers, $d_n = e^{n(1+o(1))}$.

Le résultat d'Apéry est obtenu en prenant $H_n(X) = (X(1-X))^n$.

Pour majorer I_n , il suffit de trouver le maximum de $f_1(x) = x(1-x)/(1+x)$ sur $[0, 1]$.

Nous avons $f_1'(x) = -(x^2 + 2x - 1)/(x+1)^2$ qui s'annule en $x_0 = \sqrt{2} - 1$ et $f_1(x_0) = (\sqrt{2} - 1)^2$.

D'autre part, $|b_n| \leq \omega_1^n$, où

$$\omega_1 = \min_{\rho > 0} \max_{|z+1|=\rho} \left| \frac{z(1-z)}{z+1} \right|.$$

La valeur ω_1 est atteinte en un point x_1 , zéro de f_1' ,

$$x_1 = -1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \omega_1 = (\sqrt{2} + 1)^2.$$

La fonction $(x(1-x))^n/(x+1)^{n+1}$ étant positive sur $[0, 1]$, on peut appliquer le lemme, et l'on obtient

$$\mu(\log 2) = \frac{4 \log(\sqrt{2} + 1)}{2 \log(\sqrt{2} + 1) - 1} = 4,622\ 100\ 832 \dots$$

Pour obtenir le premier résultat de Choodnovsky, on utilise le polynôme $X^2 + 2X - 1 = (X+1)^2 - 2$, numérateur de la dérivée de f_1 . On prend

$$H_n(X) = (X^2 + 2X - 1)^{2[\beta n]} (X(1-X))^{n-2[\beta n]} \quad \text{avec} \quad 0 < \beta < 1$$

la valeur optimale de β est 0,06, et l'on obtient

$$I_n \leq c_1 e^{bn} \quad \text{et} \quad |b_n| \leq c_2 e^{an}$$

avec $b = -1,776\ 029\ 24 \dots$ et $a = 1,533\ 870\ 74 \dots$.

H_n étant positif ou nul sur $[0, 1]$, on obtient

$$\mu(\log 2) = 4,265\ 174\ 29 \dots$$

Le second résultat de Choodnovsky est obtenu en utilisant le polynôme $6X^2 - 5X + 1$

qui est égal à $6(X+1)^2 - 17(X+1) + 12$. On prend

$$H_n(X) = (6X^2 - 5X + 1)^{2[0,05n]} (X(1-X))^{n-2[0,05n]}.$$

Soit $f_3(x) = |6x^2 - 5x + 1|^{0,1} (x(1-x))^{0,9} / (x+1)$. Sur $[0, 1]$, $f_3'(x)$ s'annule en $1/4$, $3/5$ et $\pm\sqrt{2} - 1$. Avec les notations précédentes, nous avons $b = -1,937\ 666\ 495 \dots$ et $a = 1,939\ 021\ 891 \dots$ qui nous donnent $\mu(\log 2) = 4,134\ 400\ 029 \dots$.

On peut donner une meilleure mesure d'irrationalité de $\log 2$ en utilisant plusieurs polynômes de degré 2 comme facteurs de H_n . Si

$$P_1 = X^2 + 2X - 1, \quad P_2 = 6X^2 - 5X + 1, \quad P_3 = 7X^2 - 5X + 1, \quad P_4 = 13X^2 - 11X + 2,$$

on prend

$$H_n(X) = P_1^{2m_1} P_2^{2m_2} P_3^{2m_3} P_4^{2m_4} (X(1-X))^{n-2m_5},$$

où $m_1 = [0,00645n]$, $m_2 = [0,0554n]$, $m_3 = [0,01985n]$, $m_4 = [0,002n]$ et $m_5 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$.

Alors $b = -1,976\ 013\ 647 \dots$ et $a = 2,005\ 296\ 66 \dots$, donc $\mu(\log 2) = 4,079\ 154\ 34$.

C'est actuellement la meilleure mesure d'irrationalité connue de $\log 2$.

3. Mesures d'irrationalité de π^2 et π .

Soit \mathfrak{a} l'idéal de $\underline{\mathbb{Z}}[X, Y]$ engendré par $T = 1 - XY$, $U = 1 - X$ et $V = 1 - Y$. Soit $P_n \in \underline{\mathbb{Z}}[X, Y]$ de degré inférieur ou égal à $4n$ et appartenant à \mathfrak{a}^n . Alors l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(x, y)}{(1-xy)^{n+1}} dx dy$$

est convergente. On remarque que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{1-xy} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

et que, pour $n \geq 1$ et $\lambda \geq 0$,

$$d_n^2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)^\lambda (1-y)^{n-\lambda}}{(1-xy)^{n+1}} dx dy \in \underline{\mathbb{Z}}$$

et

$$d_{n+\lambda}^2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+\lambda}}{(1-xy)^{n+1}} dx dy \in \underline{\mathbb{Z}}.$$

Supposons que P_n s'écrive $P_n = \sum_{j=0}^{2n} T^j A_j(U, V)$ avec $A_j(U, V) = Q_j(U) + B_j(U, V) + R_j(V)$

où A_j est de degré inférieur ou égal à n et que, pour $0 \leq j \leq n$, Q_j et R_j soient d'ordre supérieur ou égal à $n - j$, et B_j soit homogène de degré $n - j$.
Si on pose $A_n(0, 0) = b_n$,

$$b_n = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{|x|=\rho} \int_{|y|=\rho} \frac{P_n(x, y)}{(1 - xy)^{n+1}} dx dy \quad \text{pour } \rho > 1$$

et

$$I_n = a_n + b_n \zeta(2) \quad \text{avec } b_n \in \mathbb{Z} \text{ et } d_n^2 a_n \in \mathbb{Z}.$$

Si l'on prend $P_n = (XY(1 - X)(1 - Y))^n$, on obtient les formules données par F. BEUKERS [3] (voir aussi [11]).

Le maximum de $xy(1 - x)(1 - y)/(1 - xy)$ sur $[0, 1]^2$ est obtenu pour $x = y = (\sqrt{5} - 1)/2$ et vaut $((\sqrt{5} - 1)/2)^5$.

De plus, $|b_n| \leq ((\sqrt{5} + 1)/2)^{5n}$, donc

$$\mu(\pi^2) = 11,850\ 782\ 2 \dots$$

et

$$\mu(\pi) = 23,701\ 564\ 4 \dots$$

Si on utilise le polynôme $X - Y$, il vient, en prenant

$$P_n = XY^{[1,075]n} ((1 - X)(1 - Y))^{n-2[0,075n]} (X - Y)^{2[0,075n]},$$

$$\mu(\pi^2) = 9,385\ 630\ 57 \dots$$

et

$$\mu(\pi) = 18,771\ 261\ 14 \dots$$

Si l'on prend le polynôme

$$P_n = (XY)^{[0,97n]} ((1 - X)(1 - Y))^{n-2[0,15n]} (X - Y)^{2[0,15n]} (2XY - 1)^{2[0,9n]},$$

on obtient

$$\mu(\pi^2) = 8,099\ 587 \dots$$

et

$$\mu(\pi) = 16,199\ 174 \dots$$

Ces résultats peuvent encore être un peu améliorés, mais le calcul des maxima de $P_n(x, y)/(1 - xy)^n$ requiert l'utilisation de langages de calcul formel. Le calcul précédent a été réalisé sur MACSYMA avec le concours du GRECO calcul formel.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAKER (A.). - Approximations to the logarithms of certain rational numbers, Acta Arithm., Warszawa, t. 10, 1964, p. 315-323.
- [2] BAKER (A.). - Transcendental number theory. - Cambridge, Cambridge University Press, 1975.
- [3] BEUKERS (F.). - A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, Bull. of the London math. Soc., t. 11, 1979, p. 268-272.
- [4] CHOUDNOVSKY (G. V.). - Formules d'Hermite puis les approximations de Padé de logarithmes et de fonctions binômes, et mesure d'irrationalité, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 288, 1979, série A, p. 965-967.
- [5] CHOUDNOVSKY (G. V.). - Recurrences defining rational approximations to irrational numbers, Proc. Japan Acad., Series A, t. 58, 1982, p. 129-133.
- [6] CHOUDNOVSKY (G. V.). - Number theoretic applications of polynomials with rational coefficients defined by extremality conditions, "Arithmetic and geometry", vol. 1, p. 61-105. - Boston, Basel, Stuttgart, Birkhäuser, 1983 (Progress in Mathematics, 35).
- [7] CHOUDNOVSKY (G. V.). - Padé and rational approximations to systems of functions and their arithmetic applications, "Number theory", p. 37-84. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1984 (Lecture Notes in Mathematics, 1052).
- [8] DANILOV (V.). - [En Russe] Math. Zametki, t. 24, 1978, p. 449-458.
- [9] MAHLER (K.). - On the approximations of π , Koninkl. nederl. Akad. Wetensch., Proc., Series 1, t. 56, 1953, p. 30-42 ; Indag. Math., t. 15, 1953.
- [10] MIGNOTTE (M.). - Approximations rationnelles de π et quelques autres nombres, "Journées arithmétiques" [1973. Grenoble], p. 121-132, Bull. Soc. math. France. Mémoires, t. 37, 1974.
- [11] VAN DER POORTEN (A.). - A proof that Euler missed ... Apéry's proof of irrationality of $\zeta(3)$, Math. Intelligencer, t. 1, 1979, p. 195-203.
-