GROUPE D'ÉTUDE EN
THÉORIE ANALYTIQUE
DES NOMBRES

MICHEL BALAZARD

Sur la fonction $\Omega_E(n)$

Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, tome 1 (1984-1985), exp. n° 34, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=TAN_1984-1985__1__A15_0>

Groupe d'étude en
THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
1re-2e années, 1984-1985, n° 34, 10 p.

SUR LA FONCTION $\Omega_E(n)$

par Michel BALAZARD (*)

1. La fonction Ω_E.

Nous désignerons l'ensemble $\{2 , 3 , 5 , \ldots\}$ des nombres premiers par la lettre P , E sera une partie non vide quelconque de P , $p_1 < p_2 < \ldots$ la suite ordonnée des éléments de E .

Pour tout $n \in \underset{\sim}{N}^*$, on pose

$$\Omega_E(n) = \text{Card}\{(p , k) \quad E \times \underset{\sim}{N}^* ; \; p^k | n\} .$$

Autrement dit, $\Omega_E(n)$ est le nombre de facteurs premiers $\in E$ de l'entier n , comptés avec multiplicités. Dans ce paragraphe, nous citons quelques propriétés bien connues de Ω_E .

Pour commencer, posons pour tout $x \geqslant 2$

$$E(x) = \sum_{\substack{p\in E \\ p\leqslant x}} 1/p .$$

Notons que, si $E = P$, on a $E(x) = \log \log x + B + O\,(1/\log x)$ où B est la constante $\gamma + \sum_p \{1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{p}\}$, γ désignant la constante d'Euler (cf. [8], théorèmes 427 et 428).

Il se trouve que la fonction $E(x)$ est l'ordre moyen de la fonction $\Omega_E(n)$. Plus précisément, il existe une constante absolue $A > 0$ telle que, pour tout $x \geqslant 2$,

$$0 \leqslant x \;\{E(x) + \sum_{p\in E} \frac{1}{p(p - 1)}\} - \sum_{n\leqslant x} \Omega_E(n) \leqslant A \frac{x}{\log x} .$$

L'idée probabiliste que ce résultat traduit est que, la probabilité pour qu'un entier $\leqslant x$ soit divisible par p^k étant approximativement $(1/p^k)$, l'espérance de la variable aléatoire Ω_E sur $\underset{\sim}{N}^* \cap [1 , x]$ est approximativement

$$\sum_{\substack{p^k\leqslant x \\ p\in E}} \frac{1}{p^k} \times 1 = E(x) + \sum_{p\in E} \frac{1}{p(p - 1)} + o(1) .$$

Un résultat remarquable, dû à HARDY et RAMANUJAN dans le cas de $E = P$ (cf. [8], théorème 431) est que $E(x)$ est non seulement l'ordre moyen de Ω_E , mais aussi son ordre normal si $\sum_{p\in E} \frac{1}{p}$ diverge. Nous avons la proposition suivante.

(*) Michel BALAZARD, Département de Mathématiques, Université de Limoges, 123 av. Albert Thomas, 87060 LIMOGES CEDEX.

PROPOSITION 1. - Supposons que $\sum_{p\in E} \frac{1}{p} = +\infty$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$\{n \in \underset{\sim}{N}^* \ ; \ |\Omega_E(n) - E(n)| > \varepsilon\, E(n)\}$$

a une densité naturelle nulle.

Cette proposition est une conséquence de l'inégalité de Turan-Kubilius (cf. [3], tome 1, ch. 4). Dans le cas où $\sum_{p\in E} \frac{1}{p} < +\infty$, il est facile de voir que le résultat devient faux.

L'ordre maximal de $\Omega_E(n)$ est la fonction $n \mapsto \frac{\log n}{\log p_1}$. En effet, on a, pour tout $n \in \underset{\sim}{N}^*$, $p_1^{\Omega_E(n)} \leqslant n$, donc

$$\Omega_E(n) \leqslant \frac{\log n}{\log p_1} ,$$

et $\Omega_E(n) = \frac{\log n}{\log p_1}$ si, et seulement si, n est une puissance de p_1.

Enfin, en ce qui concerne l'ordre minimal de $\Omega_E(n)$, on a évidemment

$$\lim_{n\to+\infty} \inf \Omega_E(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } E \neq P \\ 1 & \text{si } E = P . \end{cases}$$

Le but de l'exposé est de présenter quelques résultats concernant la répartition des valeurs de la fonction Ω_E. Pour cela, nous noterons

$$\pi_E(x\,,\,k) = \{n \in \underset{\sim}{N}^* \ ; \ n \leqslant x \ \text{ et } \ \Omega_E(n) = k\}$$

$$N_E(x\,,\,k) = \operatorname{Card} \pi_E(x\,,\,k) \quad \text{où } x \geqslant 2 \text{ et } k \in \underset{\sim}{N} .$$

On peut faire quelques remarques

1° $N_E(x\,,\,k) = 0$ si $k > \frac{\log x}{\log p_1}$. En effet si $n \in \pi_E(x\,,\,k)$, on a

$$k = \Omega_E(n) \leqslant \frac{\log n}{\log p_1} \leqslant \frac{\log x}{\log p_1} .$$

2° Si $0 \leqslant k \leqslant \frac{\log x}{\log p_1}$, $N_E(x\,,\,k) \geqslant 1$, car $p_1^k \in \pi_E(x\,,\,k)$.

3° Si $x = p_1^k$ $\left(k = \frac{\log x}{\log p_1}\right)$, on a $N_E(x\,,\,k) = 1$ (p_1^k est le seul élément de $\pi_E(x\,,\,k)$).

4° $\sum_{k\geqslant 0} N_E(x\,,\,k) = [x]$.

2. Méthodes et résultats.

L'idée de départ pour évaluer $N_E(x\,,\,k)$ est une astuce classique de la théorie analytique des nombres. Posons en effet

$$M(x\,,\,z) = \sum_{n\leqslant x} z^{\Omega_E(n)} \quad \text{pour } z \in \underset{\sim}{C} \text{ et } x \geqslant 2 .$$

En groupant les termes de même degré on obtient

$$M(x\ ,\ z) = \sum_{k\geq 0} N_E(x\ ,\ k)\ z^k$$

d'où

(1) $$N_E(x\ ,\ k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} M(x\ ,\ z)\ z^{-k-1}\,dz$$

d'après le théorème de Cauchy. Ici r est un réel > 0 quelconque. On peut alors espérer évaluer $N_E(x\ ,\ k)$ en obtenant une estimation de $M(x\ ,\ z)$, et en choisissant convenablement r.

Or il est bien connu que l'étude de $M(x\ ,\ z)$ conduit à utiliser la fonction génératrice $F(s\ ,\ z) = \sum_{n\geq 1} (z^{\Omega_E(n)}/n^s)$. Comme la fonction $z^{\Omega_E(n)}$ est la fonction complètement multiplicative définie par la valeur z sur les éléments de E et la valeur 1 sur les éléments de $P \setminus E$, on a une représentation en produit eulérien

$$F(s\ ,\ z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^{\Omega_E(n)}}{n^s} = \prod_{p\in E} \frac{1}{1 - \frac{z}{p^s}} \times \prod_{p\notin E} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}\ .$$

Cette représentation est valable pour $|z| < p_1$, $\Re e\ s > 1$, domaine où F est holomorphe. Un calcul simple conduit à

$$F(s\ ,\ z) = \zeta(s)\ \zeta_E(s)^{z-1}\ G_E(s\ ,\ z)$$

où

$$\zeta_E(s) = \prod_{p\in E} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \quad \text{et} \quad G_E(s\ ,\ z) = \prod_{p\in E} \frac{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^z}{1 - \frac{z}{p^s}}\ .$$

L'intérêt de cette écriture est double. D'une part, $G_E(s\ ,\ z)$ est holomorphe pour $|z| < p_1$, et $\Re e\ s > \frac{1}{2}$, d'autre part on connait le comportement de $\zeta(s)$ quand $\Re e\ s \to 1$, $\Re e\ s > 1$. On est donc face à une alternative

- soit ζ_E a de bonnes propriétés (par exemple prolongement analytique pour $\Re e\ s \leq 1$), et on pourra alors abtenir par intégration complexe une estimation de $M(x\ ,\ z)$ permettant d'évaluer $N_E(x\ ,\ k)$. C'est ce qu'à fait A. SELBERG dans le cas $E = P$ (cf. [13]). H. DELANGE a étendu les résultats de A. SELBERG au cas où E est un "bon ensemble" de nombres premiers (cf. [1]),

- soit ζ_E n'a pas a priori de bonnes propriétés (E est quelconque), et il faut procéder autrement : ce sont les methodes de G. HALASZ (cf. [5]). Nous en donnerons une description sommaire au paragraphe (b) ci-dessous.

Il se trouve que dans l'étude asymptotique de $N_E(x\ ,\ k)$, $x \to +\infty$ et $0 \leq k \leq \frac{\log x}{\log p_1}$, les formules obtenues sont différentes pour $k < p_1\ E(x)$ et pour $k > p_1\ E(x)$. En quelque sorte les valeurs $k > p_1\ E(x)$ sont des grandes déviations par rapport à la moyenne $E(x)$ des valeurs de $\Omega_E(n)$ quand n va de 1 à x.

En fait, une étude complète de $N_E(x\ ,\ k)$ doit envisager les intervalles suivants

1° k petit c'est-à-dire k = constante ou $k \leqslant \varphi(x)\, E(x)$, avec φ fonction de x tendant vers 0 quand $x \to +\infty$,

2° k moyen c'est-à-dire $\delta\, E(x) \leqslant k \leqslant (p_1 - \delta)\, E(x)$, où $\delta > 0$

3° k grand c'est-à-dire $(p_1 + \delta)\, E(x) \leqslant k \leqslant \frac{\log x}{\log p_1}$,

ainsi que les transitions entre ces intervalles.

Dans le cas de $E = P$, le tableau est maintenant assez complet. Donnons les principaux résultats en notant simplement $N_P(x , k) = N(x , k)$.

(a) Résultats quand $E = P$.

- $k = 0$ on a $N(x , 0) = 1$,

- k petit ou moyen : si $\delta > 0$, alors

$$N(x , k) = F\left(\frac{k-1}{\log\log x}\right) \frac{x}{\log x} \frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)\,!} \left(1 + O_\delta\left(\frac{k}{(\log\log x)^2}\right)\right)$$

uniformément pour $x \geqslant 2$ et $1 \leqslant k \leqslant (2 - \delta) \log\log x$, où F désigne la fonction définie, pour $|z| < 2$, par

$$F(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z \left(1 - \frac{z}{p}\right)^{-1} . \tag{2}$$

Si l'on omet le terme "reste", ce résultat a été démontré, pour $k = 1$, à la fin du siècle dernier par HADAMARD et de LA VALLEE-POUSSIN c'est le théorème des nombres premiers.

Puis, en 1900, E. LANDAU l'a démontré pour k = constante, comme corollaire du théorème des nombres premiers (cf [8], théorème 437).

Ce n'est qu'en 1948 que l'on a considéré des valeurs de k plus grandes : P. ERDÖS a prouvé le résultat pour $k - \log\log x = O(\sqrt{\log\log x})$ (cf. [4]).

Notons que, dans ces trois cas, $F\left(\frac{k-1}{\log\log x}\right) \sim 1$ et la fonction F n'apparaissaient pas dans les formules obtenues.

En 1953 et 1954, L. G. SATHE démontre la formule (sans terme "reste") par une méthode élémentaire assez longue (cf. [12]).

En 1954, Atle SELBERG introduit la méthode analytique dont nous avons parlé, ce qui raccourcit beaucoup la démonstration et fournit le terme "reste". La formule obtenue par A. SELBERG pour $M(x , z)$, est

$$M(x , z) = \sum_{n \leqslant x} z^{\Omega(n)} = xz\, F(z) (\log x)^{z-1} + O_R(x (\log x)^{\mathcal{R}e\, z-2})$$

uniformément pour $x \geqslant 2$ et $|z| \leqslant R$, où $R < 2$, F étant la fonction méromorphe définie par (2) (cf. [13] et, pour une version détaillée, [14]).

- Transition entre k moyen et k grand : une idée très précise en est donnée par le théorème suivant, dû à H. DELANGE (non publié).

Pour tout $A > 0$, quand x tend vers $+\infty$, on a uniformément pour

$$2 \log\log x - A\sqrt{\log\log x} \leqslant k \leqslant 2 \log\log x + A\sqrt{\log\log x} ,$$

$$N(x , k) = C\, G\left(\frac{k - 2\log\log x}{\sqrt{2\log\log x}}\right) \frac{x \log x}{2^k} \left(1 + O_A\left(\frac{1}{\sqrt{\log\log x}}\right)\right)$$

où $C = \frac{1}{4} \prod_{p>2}\left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right)$ et $G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/u}\, du$.

Il en résulte que si g est une fonction positive telle que, quand x tend vers $+\infty$, $g(x) = o(\sqrt{\log\log x})$, on a uniformément pour

$$2\log\log x - g(x) \leqslant k \leqslant 2\log\log x + g(x) ,$$

$$N(x , k) \sim C \frac{x \log x}{2^{k+1}} .$$

– k <u>grand</u> : si $\delta > 0$, on a uniformément pour $x \geqslant 2$ et $(2+\delta)\log\log x \leqslant k \leqslant \frac{\log x}{\log 2}$

$$N(x , k) = C \frac{x}{2^k} \log \frac{x}{2^k} + O_\delta\left(\frac{x}{2^k} \log^b \frac{3x}{2^k}\right)$$

où C est la même constante que précédemment et b une constante $\in]0 , 1[$ ne dépendant que de δ .

Une remarque sur cette formule : le terme principal est nul si $x = 2^k$, alors que $N(2^k , k) = 1$. Ce phénomène est dû au remplacement de la fonction $\exp E(x)$ par la fonction $\log x$, comme nous le verrons plus clairement dans la suite.

Ce résultat est dû à J. L. NICOLAS. Il en a donné deux démonstrations. L'une (1982, cf. [9]) est analytique et utilise la formule de Selberg, mais donne un reste moins bon que l'autre (1985, cf. [10]) qui utilise des techniques élémentaires suggérées par G. HALASZ.

Passons maintenant au cas d'un ensemble E quelconque mais pas trop petit.

(b) <u>Résultats quand</u> E <u>est quelconque</u> (<u>avec</u> $\sum_{p\in E} \frac{1}{p} = +\infty$).

Sont actuellement publiés les résultats suivants.

<u>1re formule de Halasz</u> : Si $\delta > 0$, on a uniformément pour $x \geqslant 2$ et $\delta E(x) \leqslant k \leqslant (2-\delta) E(x)$,

$$N_E(x , k) = x\, e^{-E(x)} \frac{E(x)^k}{k\,!}\left(1 + O_\delta\left(\frac{k - E(x)}{E(x)}\right) + O_\delta\left(\frac{1}{\sqrt{E(x)}}\right)\right)$$

(cf. [5] et [3], chapitres 19 et 21).

<u>Encadrement de Halasz et Sarkozy</u> : Si $\delta > 0$, on a uniformément pour $x \geqslant 2$,

$$x\, e^{-E(x)} \frac{E(x)^k}{k\,!} \ll N_E(x , k) \ll x\, e^{-E(x)} \frac{E(x)^k}{k\,!} ,$$

la majoration ayant lieu pour $0 \leqslant k \leqslant (2-\delta) E(x)$ et la minoration pour $\delta E(x) \leqslant k \leqslant (2-\delta) E(x)$ (cf. [6] et [11]).

Enfin P. D. T. A. ELLIOTT dans son livre "Probabilistic Number theory" ([3], page 312 du tome 2) raconte avoir reçu en 1975 une lettre où G. HALASZ lui indique une nouvelle formule.

2e formule de Halasz : Si $\delta > 0$, on a uniformément pour $x \geqslant 2$ et $\delta\, E(x) \leqslant k \leqslant (2-\delta)\, E(x)$,

$$N_E(x, k) = e^{-k} \frac{E(x)^k}{k!} \sum_{n \leqslant x} r^{\Omega_E(n)} \left(1 + O_\delta\left(\frac{1}{\sqrt{E(x)}}\right)\right), \text{ où } r = \frac{k}{E(x)}.$$

G. HALASZ donne dans cette lettre le principe d'une démonstration de sa 2e formule, mais cette démonstration n'a pas encore été publiée.

Comme on le voit, il s'agit de résultats portant sur des valeurs de k petites ou moyennes.

Pour démontrer ses deux formules, G. HALASZ part de l'égalité

$$(1) \qquad N_E(x, k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} M(x, z)\, z^{-k-1}\, dz$$

choisit $r = \frac{k}{E(x)}$ et remarque que la contribution prépondérante dans l'intégrale est due aux z proches du point r. Il établit alors deux théorèmes : l'un estime $M(x, z)$ pour z proche du point r, et l'autre majore $M(x, z)$ pour z sur l'arc de cercle restant. Ces théorèmes (19.2 et 19.1 de [3]) concernent plus généralement les sommes $\sum_{n \leqslant x} g(n)$ où g est complètement multiplicative, et vérifie

$$|g(p) - 1| \leqslant \eta < 1 \quad \text{pour le premier théorème}$$

$$0 < \lambda \leqslant |g(p)| \leqslant 2 - \lambda \quad \text{pour le deuxième théorème.}$$

Dit grossièrement : le premier énoncé est de la forme

$$(2) \qquad \sum_{n \leqslant x} g(n) = x \exp \sum_{p \leqslant x} \frac{g(p) - 1}{p} + \text{reste, pour } x \geqslant 2 .$$

Dans le cas de $g(n) = z^{\Omega_E(n)}$, on obtient alors

$$(3) \quad M(x, z) = \sum_{n \leqslant x} z^{\Omega_E(n)} = x \exp(z-1)\, E(x) + \text{reste pour } x \geqslant 2 \text{ et } |z - 1| \leqslant \eta < 1.$$

La première formule découle alors de ce type d'estimations. Quant à la deuxième, G. Halasz indique qu'il faut remplacer le terme principal $x \exp(z-1)\, E(x)$ de (z) par $M(x, r) \exp(z-r)\, E(x)$ où $r = |z|$. Pour cela il faut démontrer un théorème du type

$$\sum_{n \leqslant x} g(n) = \sum_{n \leqslant x} |g(n)| \times \exp \sum_{p \leqslant x} \frac{g(p) - |g(p)|}{p} + \text{reste},$$

ou plus généralement

$$\sum_{n \leqslant x} g(n) = \sum_{n \leqslant x} h(n) \times \exp \sum_{p \leqslant x} \frac{g(p) - h(p)}{p} + \text{reste}.$$

J'ai établi un théorème de ce type concernant des fonctions g et h complètement multiplicatives, vérifiant

$$k_1 \leqslant |g(p)| \leqslant K_1 \ , \quad k_2 \leqslant h(p) \leqslant K_2$$

où $0 < k_1 \leqslant K_1$ et $\frac{1}{2} < k_2 \leqslant K_2$, et

$$|g(p)| \leqslant \alpha\, p \ , \quad h(p) \leqslant \alpha\, p \quad \text{où} \quad \alpha \in \,]0\,,\,1[$$

(h est réelle positive). Cela m'a permis d'étendre la 1re formule à tout l'intervalle $\delta\, E(x) \leqslant k \leqslant (p_1 - \delta)\, E(x)$ des valeurs de k "moyennes" et de démontrer la 2e formule sur l'intervalle $(\frac{1}{2} + \delta)\, E(x) \leqslant k \leqslant (p_1 - \delta)\, E(x)$ (le $\frac{1}{2} + \delta$ provient de la condition $k_2 > \frac{1}{2}$ du théorème ci-dessus).

Indiquons maintenant quelques conséquences des formules de HALASZ. Si, dans la 1re formule, on fait $k \sim E(x)$, on obtient

$$N_E(x\,,\,k) \sim x e^{-E(x)} \frac{E(x)^k}{k\,!} \quad \text{ou} \quad N_E(x\,,\,k) \sim x e^{-E(x)} \frac{E(x)^{k-1}}{(k-1)!}$$

ce qui généralise le résultat de 1948 de P. ERDOS. La formule donne également la majoration

$$N_E(x\,,\,k) \ll x\, e^{-E(x)} \frac{E(x)^k}{k\,!} \quad \text{pour} \quad \delta\, E(x) \leqslant k \leqslant (p_1 - \delta)\, E(x)\ .$$

En revanche on n'obtient une minoration qu'au voisinage de $k = E(x)$. La formule n'assure même pas que $N_E(x\,,\,k) \geqslant 0$ pour tout k tel que $\delta\, E(x) \leqslant k \leqslant (p_1 - \varepsilon) E(x)$!.

Quant à la 2e formule, son intérêt est de ramener l'étude asymptotique de $N_E(x\,,\,k)$ quand $x \dashrightarrow +\infty$ à celle de la somme $\sum_{n \leqslant x} r^{\Omega_E(n)}$. Or $n \mapsto r^{\Omega_E(n)}$ est réelle > 0 et complètement multiplicative, et il y a des théorèmes assez précis qui permettent d'étudier la somme en question. En particulier on peut retrouver l'encadrement de HALASZ et SARKOZY et même l'entendre à l'intervalle

$$\delta\, E(x) \leqslant k \leqslant (p_1 - \delta)\, E(x)\ .$$

En effet, on a, par des moyens élémentaires, l'encadrement suivant

$$x \exp(r-1)\, E(x) \ll \sum_{n \leqslant x} r^{\Omega_E(n)} \ll x \exp(r-1)\, E(x)$$

uniformément pour $\delta \leqslant r \leqslant p_1 - \delta$, où des constantes effectives de minoration et majoration peuvent être données.

On obtient donc, pour $\frac{1}{2} + \delta \leqslant r \leqslant p_1 - \delta$ et x assez grand,

$$N_E(x\,,\,k) \asymp e^{-rE(x)} \frac{E(x)^k}{k\,!}\, x \exp(r-1)\, E(x) = x\, e^{-E(x)} \frac{E(x)^k}{k\,!}\ .$$

La formule sera très utile, alliée aux théorèmes classiques de Wirsing (cf. [15]), pour obtenir un équivalent de $N_E(x\,,\,k)$ quand E est assez régulier, par exemple quand E a une densité α par rapport à P . A ce propos, si $\alpha < 1$ (E n'est pas trop gros), H. DELANGE a démontré dans [2] que

$$N_E(x\,,\,k) \sim \frac{e^{B_E}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{x}{e^{E(x)}} \frac{E(x)^k}{k\,!} \quad \text{quand} \quad x \dashrightarrow +\infty \quad (\ k = \text{constante})$$

où $B_E = \gamma\,\alpha + \sum_{p \in E} \{\log(1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{p}\}$.

En ce qui concerne les grandes valeurs de k , j'ai obtenu la proposition suivante.

PROPOSITION 2. - <u>Soit</u> a <u>un réel quelconque</u>. <u>On a uniformément pour</u> $x \geqslant 1$, $k \geqslant 0$ et $p_1\, E(x) + a\, E(x)^{1/2} \leqslant k \leqslant (\log x/\log p_1)$,

$$N_E(x\ ,\ k) \asymp \frac{x}{p_1^k} \exp(p_1 - 1)\ E\left(\frac{x}{p_1^k}\right) .$$

Cela généralise le résultat de NICOLAS, mais ne fournit qu'un ordre de grandeur pour $N_E(x\ ,\ k)$. La démonstration utilise les idées de [9] pour la minoration, et de [10] pour la majoration.

<u>Post-scriptum</u>. - Depuis la présentation de cet exposé, j'ai obtenu la proposition suivante.

PROPOSITION 3. - <u>Si</u> $\delta > 0$ <u>est fixé</u>, <u>on a uniformément pour</u> $\delta\, E(x) \leqslant k \leqslant \frac{\log x}{\log p_1}$,

$$N_E(x\ ,\ k) \asymp \frac{x}{p_1^k}\ P_k\left(p_1\ E\left(\frac{x}{p_1^k}\right)\right)\ e^{-E(x/p_1^k)}$$

<u>où</u> $P_k(X)$ <u>est le polynôme</u> $\sum_{\ell=0}^{k} \frac{X^\ell}{\ell!}$.

Rappelons quelques propriétés des sommes partielles de la série exponentielle (cf. [7], théorème 137).

(i) Si $\alpha \in\ ]0\ ,\ 1[$ est fixé, on a uniformément pour $k \leqslant \alpha x$, $k \in \mathbb{N}$, $x \geqslant 0$,

$$P_k(x) \asymp \frac{x^k}{k!} .$$

(ii) Si $a \in \mathbb{R}$ est fixé, on a uniformément pour $k \geqslant x + a\, x^{1/2}$, $k \in \mathbb{N}$, $x \geqslant 0$,

$$P_k(x) \asymp e^x .$$

De (i), on peut facilement déduire

(iii) Si $\alpha \in]0\ ,\ 1[$ est fixé, on a uniformément pour $k\ ,\ h \in \mathbb{N}$, $x \geqslant 0$, $h \leqslant \alpha\, x$ et $k \geqslant h$,

$$P_k(x) \asymp \sum_{h \leqslant \ell \leqslant k} \frac{x^\ell}{\ell!}$$

(d'une part $P_k(x) \geqslant \sum_{h \leqslant \ell \leqslant k} (x^\ell/\ell!)$; d'autre part, si $h \geqslant 1$

$$P_{h-1}(x) + \sum_{h \leqslant \ell \leqslant k} \frac{x^\ell}{\ell!} \ll \frac{x^{h-1}}{(h-1)!} + \sum_{h \leqslant \ell \leqslant k} \frac{x^\ell}{\ell!} \ll \frac{x^h}{h!} + \sum_{h \leqslant \ell \leqslant k} \frac{x^\ell}{\ell!} \leqslant 2 \sum_{h \leqslant \ell \leqslant k} \frac{x^\ell}{\ell!}) .$$

Compte tenu de (i) et (ii), la proposition 3 généralise à la fois l'encadrement de HALASZ et SARKOZY et la proposition 2. D'autre part, elle bouche le "trou" qui existait entre ces deux résultats.

Indiquons le principe de la démonstration. Pour $k \geqslant p_1\ E(x)$, c'est une conséquence de (ii) et de la proposition 2. Il reste à traiter les $k \leqslant (p_2 - 1)\ E(x)$ (par exemple). Pour cela on écrit

(4) $$N_E(x\ ,\ k) = \sum_{\ell=0}^{k} N'_E\left(\frac{x}{p_1^{k-\ell}}\ ,\ \ell\right)$$

où $N'_E(y\ ,\ \ell) = \mathrm{Card}\{n \in \underset{\sim}{N}^* \ ;\ n \leqslant y\ ,\ n$ premier à p_1 et $\Omega_E(n) = \ell\}$ (l'égalité (4) s'obtient en groupant dans $N_E(x\ ,\ k)$ les éléments divisibles par exactement la même puissance de p_1).

On observe ensuite que les méthodes de HALASZ et SARKOZY permettent d'obtenir

(5) $$N'_E(y\ ,\ \ell) \ll y\, e^{-E(y)} \frac{E(y)^\ell}{\ell!} \quad \text{uniformément pour } 0 \leqslant \ell \leqslant (p_2 - \epsilon)\, E(y)$$

(6) $$N'_E(y\ ,\ \ell) \gg y\, e^{-E(y)} \frac{E(y)^\ell}{\ell!} \quad \text{uniformément pour } \epsilon\, E(y) \leqslant \ell \leqslant (p_2 - \epsilon)\, E(y)$$

où ϵ est > 0 donné.

Les inégalités $\ell \leqslant k \leqslant (p_2 - 1)\, E(x)$ entraînent que $E(x) - E\left(\frac{x}{p^{k-\ell}}\right) = O(1)$ quand $x \dashrightarrow +\infty$, donc $\ell \leqslant (p_2 - \frac{1}{2})\, E\left(\frac{x}{p_1^{k-\ell}}\right)$ pour x assez grand.

(4) et (5) donnent alors la majoration

$$N_E(x\ ,\ k) \ll \frac{x}{p_1^k} \sum_{\ell=0}^{k} e^{-E\left(\frac{x}{p_1^{k-\ell}}\right)} \frac{[p_1\ E(x/p_1^{k-\ell})]^\ell}{\ell\ !} \ll \frac{x}{p_1^k}\, e^{-E(x/p_1^k)}\, P_k\left(p_1\ E\left(\frac{x}{p_1^k}\right)\right).$$

Pour la minoration, prenons $\epsilon = \delta$, (4) et (6) donnent alors

$$N_E(x\ ,\ k) \gg \sum_{\delta E(x) \leqslant \ell \leqslant k} \frac{x}{p_1^k}\quad e^{-E(x/p_1^{k-\ell})} \frac{[p_1\ E(x/p_1^{k-\ell})]^\ell}{\ell\ !}\ ,$$

donc

$$N_E(x\ ,\ k) \gg \frac{x}{p_1^k}\quad e^{-E(x/p_1^k)} \sum_{\delta E(x) \leqslant \ell \leqslant k} \frac{\left[p_1\ E\left(\frac{x}{p_1^k}\right)\right]^\ell}{\ell\ !} \gg \frac{x}{p_1^k}\, e^{-E(x/p_1^k)}\, P_k\left(p_1\ E\left(\frac{x}{p_1^k}\right)\right),$$

d'après (iii).

BIBLIOGRAPHIE

[1] DELANGE (H.). - Sur des formules de Atle-Selberg, Acta Arithm., Warszawa, t. 19, 1971, p. 105-146.

[2] DELANGE (H.). - A theorem on integral-valued additive functions, Illinois J. of Math., t. 18, 1974, p. 357-372.

[3] ELLIOTT (P. D. T. A.). - Probabilistic number theory. - New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1979 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 239).

[4] ERDÖS (P.). - On the integers having exactly k prime factors, Annals of Math., Series 2, t. 49, 1948, p. 53-66.

[5] HALASZ (G.). - On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions, Studia, scient. Math. Hungar., t. 6, 1971, p. 211-233.

[6] HALASZ (G.). - Remarks to my paper "On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions", Acta Math. Acad. Scient. Hungar., t. 23, 1972, p. 425-432.

[7] HARDY (G. H.). - Divergent series. - Oxford, Clarendon Press, 1949.

[8] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers. 3e édition. - Oxford, Clarendon Press, 1954.

[9] NICOLAS (J. L.). - Autour de formules dues à A. Selberg. Colloque Hubert Delange. [Orsay, 1982] (Publication de l'Université Paris Sud).

[10] NICOLAS (J. L.). - Sur la distribution des entiers ayant une quantité fixée de facteurs premiers, Acta Arithm., Warszawa, t. 44, 1984, p. 191-200.

[11] SARKOZY (A.). - Remarks on a paper of G. Halasz, Period. Math. Hungar., t. 8, 1977, p. 135-150

[12] SATHE (L. G.). - On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors, I, II, III, IV, J. of Indian math. Soc., New Series, t. 17, 1953, p. 63-141 ; t. 18, 1954, p. 27-81.

[13] SELBERG (A.). - Note on a paper by L. G. Sathe, J. of Indian math. Soc., New Series, t. 18, 1954, p. 83-87.

[14] TENENBAUM (G.). - Cours de théorie analytique des nombres. Université de Bordeaux.

[15] WIRSING (E.). - Das asymptotische Verhalten von Summer über multiplikative Funktionen, II, Acta Math. Acad. Scient. Hungar., t. 18, 1967, p. 411-467.