CHI-TAI CHUANG

Étude sur les familles normales et les familles quasi-normales de fonctions méromorphes

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1938

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1938__215__1_0>

Série A, n° 1828
N° d'ordre :
2694

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

Par M. Chi-Tai CHUANG

1re THÈSE. — Étude sur les familles normales et les familles quasi-normales de fonctions méromorphes.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le devant la Commission d'examen.

MM. É. BOREL *Président.*
P. MONTEL } *Examinateurs.*
G. VALIRON }

PARIS

1938

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire . . . . . M. MOLLIARD.
Doyen . . . . C. MAURAIN, *Professeur,* Physique du Globe.

Professeurs honoraires

H. LEBESGUE.	BLAISE.	G. BERTRAND.
A. FERNBACH.	DANGEARD.	ABRAHAM.
ÉMILE PICARD.	LESPIEAU.	CH. FABRY.
LÉON BRILLOUIN.	MARCHIS.	LÉON BERTRAND.
GUILLET.	VESSIOT.	WINTREBERT.
PÉCHARD.	PORTIER.	DUBOSCQ.
FREUNDLER.	MOLLIARD.	BOHN.
AUGER.	LAPICQUE.	

PROFESSEURS

M. CAULLERY . .	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN . . .	T	Chimie générale.
ÉMILE BOREL . .	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
JEAN PERRIN . .	T	Chimie physique.
E. CARTAN . . .	T	Géométrie supérieure.
A. COTTON . .	T	Recherches physiques
J. DRACH . . .	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
CHARLES PÉREZ .	T	Zoologie.
E. RABAUD . . .	T	Biologie expérimentale.
M. GUICHARD . .	T	Chimie minérale.
PAUL MONTEL .	T	Théorie des fonctions et Théorie des transformations.
L. BLARINGHEM .	T	Botanique.
G. JULIA. . . .	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
C. MAUGUIN . .	T	Minéralogie.
A. MICHEL-LÉVY .	T	Pétrographie.
H. BÉNARD. . .	T	Mécanique expérimentale des fluides.
A. DENJOY . . .	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
L. LUTAUD . . .	T	Géographie physique et géologie dynamique.
EUGÈNE BLOCH .	T	Physique.
G. BRUHAT . . .	T	Physique théoriques et physique céleste.
E. DARMOIS . .	T	Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE . .	T	Physique Générale et Radioactivité.
A. DUFOUR . .	T	Physique (P. C. B.).
L. DUNOYER . .	T	Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND	T	Botanique.
M. JAVILLIER . .	T	Chimie biologique.
ROBERT-LÉVY . .	T	Physiologie comparée.
F. PICARD . . .		Zoologie (Évolution des êtres organisés).
HENRI VILLAT. .	T	Mécanique des fluides et applications.
CH. JACOB . . .	T	Géologie.
P. PASCAL . . .	T	Chimie minérale.
M. FRÉCHET . .	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.
E. ESCLANGON . .	T	Astronomie.
M.me RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH		Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER . . .		Physique (P. C. B.).
DE BROGLIE . . .	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN		Optique appliquée.
P. JOB		Chimie générale.
LABROUSTE		Physique du Globe.
PRENANT.	T	Anatomie et Histologie comparées.
VILLEY		Mécanique physique et expérimentale.
COMBES	T	Physiologie végétale.
GARNIER	T	Mathématiques générales
PÉRÈS		Mécanique théorique des fluides.
HACKSPILL		Chimie (P. C. B.).
LAUGIER	T	Physiologie générale.
TOUSSAINT		Technique Aéronautique
M. CURIE		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD	T	Hautes températures.
CHAZY.	T	Mécanique rationnelle.
GAULT		Chimie (P. C. B.).
CROZE.		Recherches physiques.
DUPONT	T	Théories chimiques.
LANQUINE	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
VALIRON.		Mathématiques générales
BARRABÉ.		Géologie structurale et géologie appliquée.
MILLOT		Biologie animale (P.C.B.)
F. PERRIN		Théories physiques.
VAVON		Chimie organique.
G. DARMOIS . . .		Calcul des probabilités et Physique-Mathém.
CHATTON	T	Biologie maritime.
AUBEL		Chimie biologique.
JACQUES BOURCART .		Géographie physique et Géologie dynamique.
M.me JOLIOT-CURIE .		Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL		Biologie végétale (P.C.B.)
CABANNES		Enseignement de Phys.
GRASSÉ		Biologie anim. (P. C. B.).
PRÉVOST		Chimie (P. C. B.).

Secrétaire . . . . A. PACAUD.
Secrétaire honoraire . . . D. TOMBECK.

À MES PARENTS

À MESSIEURS

KING-LAI HIONG

PRÉSIDENT DE L'UNIVERSITÉ YUNNAN

ET

GEORGES VALIRON

PROFESSEUR À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Hommage de ma respectueuse reconnaissance.

Mémoire extrait du tome LXII (1938) des *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.*

PREMIÈRE THÈSE.

ÉTUDE SUR LES FAMILLES NORMALES ET LES FAMILLES QUASI-NORMALES DE FONCTIONS MÉROMORPHES.

INTRODUCTION.

Le présent Mémoire se divise en deux parties. La première partie est consacrée à l'étude d'un problème proposé par M. MONTEL, sur la recherche des conditions de normalité d'une famille de fonctions holomorphes ne prenant pas la valeur zéro et dont une dérivée ne prend pas la valeur un, et à l'étude des problèmes analogues dans le sens considéré par M. VALIRON (voir n° 15). La méthode utilisée pour traiter ces problèmes est la méthode directe de M. VALIRON. Dans la deuxième partie, nous étudions les familles de fonctions méromorphes, en suivant la voie ouverte par les travaux de M. AHLFORS.

Dans le premier chapitre, nous établissons un théorème général sur le comportement d'une fonction holomorphe dans le cercle unité, théorème qui nous sert de base fondamentale dans la première partie. Ce théorème est une généralisation d'un théorème de M. VALIRON, et est énoncé sous une forme nouvelle; il est démontré en modifiant convenablement sa méthode.

Nous obtenons, dans le Chapitre II, certains résultats sur le problème de M. MONTEL: Il existe des familles de fonctions holomorphes admettant dans un certain sens deux valeurs exceptionnelles, qui ne sont ni normales, ni quasi-normales et vérifient des inégalités analogues à celles que fournit le théorème de SCHOTTKY. Une branche quelconque du logarithme d'une fonction holomorphe dans le cercle unité, ne prenant pas la valeur zéro et dont une dérivée ne prend pas la valeur un, est majorée par une fonction déterminée, holomorphe dans le même cercle. Des résultats analogues sont obtenus, dans le sens indiqué par M. VALIRON.

Dans le Chapitre III, nous étudions certains cas particuliers. Nous considérons une fonction $F(z)$ holomorphe, ne s'annulant pas dans le cercle unité, et nous supposons que l'équation

$$\sum_{\iota=0}^{\nu} a_\iota(z) F^{(\nu-\iota)}(z) = 1$$

n'a pas de racines. Une méthode de M. MIRANDA, nous permet de parvenir à une limitation de $|F(z)|$, dont nous tirons un critère de famille normale. Cette limitation de $|F(z)|$ est améliorée par les méthodes de M. MILLOUX, qui fournissent une inégalité qui se réduit en particulier, à des constantes numériques près, au théorème de SCHOTTKY-LANDAU. Des limitations du module d'une fonction holomorphe vérifiant les conditions considérées par M. VALIRON, sont aussi obtenues.

Le théorème démontré dans le premier chapitre, qui n'est que le théorème bien connu de M. BLOCH, sous une forme générale, permet d'obtenir des extensions de théorèmes de cet auteur, elles font l'objet du Chapitre IV. Une conséquence immédiate de ce théorème est la suivante: Une fonction $Z = f(z)$ holomorphe dans le cercle unité, ayant la propriété que, (Γ) étant une couronne arbitraire de centre origine et d'épaisseur supérieure à un nombre positif donné M, la fonction inverse de $f(z)$ restreinte au cercle unité, ne possède que $k - 1$ branches au plus, holomorphes dans (Γ) fendue suivant $\arg Z = \omega(\Gamma)$, est majorée par une fonction déterminée holomorphe dans ce cercle. Nous déduisons de là, un critère de famille quasi-normale, comprenant un énoncé de M. BLOCH. Nous obtenons dans ce sens, d'autres résultats qui précisent les théorèmes donnés dans le Chapitre II.

Dans la deuxième partie, nous parvenons à certains critères de famille quasi-normale, à quelques propriétés d'une suite exceptionnelle d'OSTROWSKI, au voisinage d'un point irrégulier, et à certaines généralisations de théorèmes de M. AHLFORS [1]).

En terminant cette introduction, j'exprime ma respectueuse reconnaissance à M. le Professeur GEORGES VALIRON pour m'avoir suggéré d'entreprendre ces recherches et pour m'avoir aidé de ses conseils et de ses critiques pendant toute la durée de ce travail.

---

[1]) Une partie des résultats donnés dans ce Mémoire a été communiquée à l'Académie des Sciences de France (séances du 10 mai 1937, du 12 juillet 1937, du 7 février 1938, du 28 mars 1938).

PREMIÈRE PARTIE.

FAMILLES DE FONCTIONS HOLOMORPHES.

CHAPITRE I.

Théorème général sur le comportement d'une fonction holomorphe dans le cercle unité.

1. Dans ce chapitre, nous allons établir le théorème suivant qui nous sert de base fondamentale dans cette partie. Ce théorème est une généralisation d'un théorème de M. VALIRON [11, *e*] [2]); il s'établit par une méthode analogue. La démonstration se fait en distinguant deux cas suivant que le nombre N défini ci-dessous, est supérieur ou inférieur à une certaine constante. Dans le premier cas, les méthodes sont celles de M. VALIRON pour traiter les fonctions entières [11, *a*, *b*]; dans le deuxième cas, les méthodes sont celles de M. BLOCH [2, *a*], sous une forme modifiée due à M. VALIRON [11, *d*].

THÉORÈME I. — *Il existe des nombres positifs* $\lambda(k)$, $\alpha(k)$, $\beta(k)$, $\beta'(k)$, $\beta_p(k)$, *jouissant des propriétés suivantes. Si*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

est une fonction holomorphe pour $|z| < 1$, *qui n'est pas majorée par*

$$\lambda(k)\left[S + \sum_{i=0}^{k-1} |c_i|\right] \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^{\frac{3}{4}}} z^n,$$

où S *est un nombre positif arbitrairement donné, on peut trouver* k *domaines* $D_i(f, \omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *contenus dans le cercle* $|z| < r = r(f, k)$, *avec* $\alpha(k) < r < 1$, *et* $M(r, f) > S$, *dans lesquels* $f(z)$ *se comporte comme suit:*

1°. $f(z)$ *est univalente dans* $D_i(f, \omega)$ *et représente ce domaine sur la couronne fendue*

$$\frac{1}{4} M(r, f) < |Z| < \frac{1}{2} M(r, f), \qquad |\arg Z - \omega| < \pi \quad (\omega \text{ arbitraire}).$$

[2]) Les numéros figurant entre crochets renvoient à l'Index bibliographique.

2°. Si $1 \leqq n \leqq k$, dans $D_1(f, \omega)$, l'argument de $f^{(n)}(z)$ varie de moins de 3π, et l'on a

$$\frac{1}{2} < \left|\frac{f^{(n)}(z)}{H_n f(z)}\right| < 2, \qquad \beta'(k) < H_n^{\frac{1}{n}} < \beta(k)\left[\log \frac{M(r, f)}{S}\right]^{\frac{4}{3}},$$

H_n dépendant de n, k, $f(z)$, et r.

3°. Si $1 \leqq n \leqq p$, on a dans $D_1(f, \omega)$

$$|f^{(n)}(z)| < \beta_p(k) M(r, f)\left[\log \frac{M(r, f)}{S}\right]^{\frac{4p}{3}}.$$

2. Supposons d'abord que $f(z)$ soit holomorphe pour $|z| \leqq 1$ et désignons par E le maximum des nombres

$$|c_r| e^{-n^{\frac{3}{4}}},$$

alors

(1) $$|c_n| \leqq E e^{n^{\frac{3}{4}}}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty).$$

Si $E < 1$, $f(z)$ est majorée par

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} e^{n^{\frac{3}{4}}} z^n.$$

Nous supposerons désormais que $E \geqq 1$. Soit $N = N(f)$ le plus grand des entiers n pour lesquels (1) est une égalité et écrivons

$$f(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^N \sum_{p=-N}^{\infty} c_{N+p} z_0^{N+p} \left(\frac{z}{z_0}\right)^p,$$

et

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^p = \left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right)^p = 1 + p\frac{z - z_0}{z_0} + \frac{p(p-1)}{2!}\left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}\left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^k + \left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^{k+1} R_p\left(\frac{z - z_0}{z_0}\right),$$

où $k \geqq 1$. On aura

(3) $$\begin{cases} f(z) = \left(\dfrac{z}{z_0}\right)^N \Big\{ f(z_0) + \dfrac{z - z_0}{z_0} g_1(z_0) + \left(\dfrac{z - z_0}{z_0}\right)^2 g_2(z_0) + \cdots \\ \qquad \cdots + \left(\dfrac{z - z_0}{z_0}\right)^k g_k(z_0) + \left(\dfrac{z - z_0}{z_0}\right)^{k+1} X(z, z_0) \Big\}, \end{cases}$$

où

$$(4) \qquad X(z, z_0) = \sum_{p=-N}^{\infty} c_{N+p} z_0^{N+p} R_p\left(\frac{z - z_0}{z_0}\right),$$

et où

$$(5) \quad g_s(z_0) = \frac{1}{s!} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \frac{s(s-1)\dots(s-j+1)}{j!} N(N+1)\dots(N+j-1) z_0^{s-j} f^{(s-j)}(z_0),$$

pour $s = 1, 2, \dots, k$. Pour vérifier (5), il suffit de poser

$$p = q - N, \qquad \varphi_s(q) = (q - N)(q - N - 1) \dots (q - N - s + 1),$$

et d'observer que

$$\varphi_s(q) = \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \frac{s(s-1)\dots(s-j+1)}{j!} N(N+1)\dots(N+j-1) q(q-1)\dots(q-s+j+1).$$

3. Nous allons chercher des bornes supérieures de $|X(z, z_0)|$ et de $|g_s(z_0)|$, et établir des formules pour $f(z)$ et $f^{(s)}(z)$.

LEMME 1. — *Si*

$$(6) \qquad |z_0| = r_0 = e^{-\frac{3}{4} N^{-\frac{1}{4}}}, \qquad \left|\frac{z - z_0}{z_0}\right| < \frac{N^{-\frac{5}{8}}}{10k},$$

on a

$$(7) \qquad |X(z, z_0)| < \frac{1}{(k+1)!} e^{10k} (10k)^{k+2} N^{\frac{5(k+2)}{8}} M(r_0, f),$$

pourvu que $N \geqq (10k)^3$.

On a $R_p(v) = 0$ si $p = 0, 1, 2, \dots, k$, et d'après la formule de TAYLOR, on constate aisément que

$$|R_p(v)| < \frac{p^{k+1}}{(k+1)!} (1 + |v|)^p,$$

si $p > k$, et

$$|R_p(v)| < \frac{(|p| + k)^{k+1}}{(k+1)!} (1 - |v|)^{p-k-1},$$

si $p < 0$ et si $|v| < 1$. D'après (1), et en vertu de la définition de N, on a

$$\left|\frac{c_{N+p}}{c_N}\right| \leqq e^{(N+p)^{\frac{3}{4}} - N^{\frac{3}{4}}}.$$

Donc eu égard à (4) et à (6),

$$|X(z, z_0)| < \frac{|c_N z_0^N|}{(k+1)!} \left(\sum_{p=1}^{\infty} A_p + \sum_{p=1}^{N} B_p \right), \tag{8}$$

où

$$\log A_p = (N+p)^{\frac{3}{4}} - N^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4} p N^{-\frac{1}{4}} + p \log \left(1 + \frac{N^{-\frac{5}{8}}}{10 k} \right) + (k+1) \log p,$$

et où

$$\log B_p = (N-p)^{\frac{3}{4}} - N^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4} p N^{-\frac{1}{4}} - (p+k+1) \log \left(1 - \frac{N^{-\frac{5}{8}}}{10 k} \right) + (k+1) \log (p+k).$$

Considérons l'expression

$$\sum_{p=1}^{\infty} A_p.$$

On a

$$(N+p)^{\frac{3}{4}} - N^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4} p N^{-\frac{1}{4}} = -\frac{3}{32} p^2 (N + \theta p)^{-\frac{5}{4}} < 0, \tag{9}$$

où $0 < \theta < 1$. Posons

$$M = \text{partie entière de } 10 k N^{\frac{5}{8}}, \tag{10}$$

alors

$$M \leqq 10 k N^{\frac{5}{8}} < N, \qquad M^2 > \frac{1}{2} (10 k)^2 N^{\frac{5}{4}}.$$

On a

$$\log \frac{A_{2M+p}}{A_{M+p}} < (2M+N+p)^{\frac{3}{4}} - (M+N+p)^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4} M N^{-\frac{1}{4}} + 1 + (k+1) \log 2,$$

et θ, θ' désignant des nombres compris entre 0 et 1,

$$\begin{aligned}
&(2M+N+p)^{\frac{3}{4}} - (M+N+p)^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4} M N^{-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{3}{4} M \{ (M+N+p+\theta M)^{-\frac{1}{4}} - N^{-\frac{1}{4}} \} \\
&< \frac{3}{4} M \{ (M+N)^{-\frac{1}{4}} - N^{-\frac{1}{4}} \} \\
&= -\frac{3}{16} M^2 (N + \theta' M)^{-\frac{5}{4}} \\
&< -\frac{3}{32} 2^{-\frac{5}{4}} (10 k)^2.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\log \frac{A_{2M+p}}{A_{M+p}} < -\frac{3}{32} 2^{-\frac{5}{4}} (10\,k)^2 + 1 + (k+1)\log 2 < -\frac{1}{8}.$$

Donc

$$\sum_{p=1}^{\infty} A_p = \sum_{p=1}^{M} A_p + \sum_{p=1}^{M}\left(\sum_{q=1}^{\infty} A_{qM+p}\right) < \sum_{p=1}^{M} A_p + \frac{1}{1-e^{-\frac{1}{8}}} \sum_{p=1}^{M} A_{M+p},$$

et eu égard à (9),

$$\sum_{p=1}^{M} A_p < e(10\,k)^{k+2} N^{\frac{5(k+2)}{8}},$$

$$\sum_{p=1}^{M} A_{M+p} < e^2 2^{k+1} (10\,k)^{k+2} N^{\frac{5(k+2)}{8}},$$

d'où

$$\sum_{p=1}^{\infty} A_p < e^{9k} (10\,k)^{k+2} N^{\frac{5(k+2)}{8}}. \tag{11}$$

Considérons maintenant l'expression

$$\sum_{p=1}^{N} B_p.$$

On a

$$(N-p)^{\frac{3}{4}} - N^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4} p N^{-\frac{1}{4}} = -\frac{3}{32} p^2 (N-\theta p)^{-\frac{5}{4}} < 0, \tag{12}$$

où $0 < \theta < 1$. M étant défini par (10), on a

$$\log \frac{B_{2M+p}}{B_{M+p}} < (N-2M-p)^{\frac{3}{4}} - (N-M-p)^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4} M N^{-\frac{1}{4}} + 2 + (k+1)\log 2,$$

et θ, θ' désignant des nombres compris entre 0 et 1,

$$\begin{aligned}
&(N-2M-p)^{\frac{3}{4}} - (N-M-p)^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4} M N^{-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{3}{4} M \{N^{-\frac{1}{4}} - (N-M-p-\theta M)^{-\frac{1}{4}}\} \\
&< \frac{3}{4} M \{N^{-\frac{1}{4}} - (N-M)^{-\frac{1}{4}}\} \\
&= -\frac{3}{16} M^2 (N-\theta' M)^{-\frac{5}{4}} \\
&< -\frac{3}{32} (10\,k)^2.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\log \frac{B_{2M+p}}{B_{M+p}} < -\frac{3}{32}(10\,k)^2 + 2 + (k+1)\log 2 < -5.$$

On a $N = iM + j$, $i \geqq 1$, $j < M$, et

$$\sum_{p=1}^{N} B_p = \sum_{p=1}^{M} B_p + \sum_{p=1}^{M}\left(\sum_{q=1}^{i-1} B_{qM+p}\right) + \sum_{p=1}^{j} B_{iM+p} < \sum_{p=1}^{M} B_p + \frac{1}{1-e^{-5}}\sum_{p=1}^{M} B_{M+p} + \sum_{p=1}^{j} B_{M+p},$$

en supposant que $i > 1$. Eu égard à (12), on voit que

$$\sum_{p=1}^{N} B_p < e^{8k}(10\,k)^{k+2} N^{\frac{5(k+2)}{8}}. \tag{13}$$

L'inégalité (7) résulte donc de (8), (11), et (13).

LEMME 2. — *Si*

$$|z_0| = r_0 = e^{-\frac{3}{4}N^{-\frac{1}{4}}},$$

on a

$$|g_s(z_0)| < \frac{1}{(k+1)!}\, 4^s k^{sk} e^{10k^2} (10\,k)^{s+1} N^{\frac{5s}{8}\frac{k+2}{k+1}} M(r_0, f), \tag{14}$$

pour $s = 1, 2, \ldots, k$, *pourvu que* $N \geqq (10\,k)^3$.

Considérons k points ζ_j sur le cercle $|z| = r_0$, tels que

$$\left|\frac{\zeta_j - z_0}{z_0}\right| = \frac{N^{-\frac{5}{8}\frac{k+2}{k+1}}}{10\,k\,j},$$

pour $j = 1, 2, \ldots, k$, et posons

$$d_j = \frac{\zeta_j - z_0}{z_0}.$$

La formule (3) fournit les relations

$$\left\{\begin{array}{l}
d_1 g_1(z_0) + d_1^2 g_2(z_0) + \cdots + d_1^k g_k(z_0) = \varphi_1(\zeta_1, z_0),\\
d_2 g_1(z_0) + d_2^2 g_2(z_0) + \cdots + d_2^k g_k(z_0) = \varphi_1(\zeta_2, z_0),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
d_k g_1(z_0) + d_k^2 g_2(z_0) + \cdots + d_k^k g_k(z_0) = \varphi_1(\zeta_k, z_0),
\end{array}\right. \tag{15}$$

où

$$\varphi_1(z, z_0) = \left(\frac{z_0}{z}\right)^N f(z) - f(z_0) - \left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^{k+1} X(z, z_0).$$

D'après le Lemme 1, on a

$$|\varphi_1(\zeta_j, z_0)| < \frac{1}{(k+1)!} 2 e^{10k^2}(10k) M(r_0, f).$$

Résolvons les équations (15) par rapport à $g_1(z_0)$. On a

$$g_1(z_0) = \sum_{j=1}^{k} A_j \varphi_1(\zeta_j, z_0),$$

où

$$|A_j| < \frac{j^k}{(j-1)!(k-j)!}(10k) N^{\frac{5}{8}\frac{k+2}{k+1}}.$$

Par suite,

$$|g_1(z_0)| < \frac{1}{(k+1)!} 4 k^k e^{10k^2}(10k)^2 N^{\frac{5}{8}\frac{k+2}{k+1}} M(r_0, f).$$

Écrivons les premières $k - 1$ équations de (15), sous la forme

$$(16)\qquad \begin{cases} d_1^2 g_2(z_0) + d_1^3 g_3(z_0) + \cdots + d_1^k g_k(z_0) = \varphi_2(\zeta_1, z_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ d_{k-1}^2 g_2(z_0) + d_{k-1}^3 g_3(z_0) + \cdots + d_{k-1}^k g_k(z_0) = \varphi_2(\zeta_{k-1}, z_0), \end{cases}$$

où

$$\varphi_2(z, z_0) = \varphi_1(z, z_0) - \left(\frac{z - z_0}{z_0}\right) g_1(z_0).$$

On a

$$|\varphi_2(\zeta_j, z_0)| < \frac{1}{(k+1)!} 8 k^k e^{10k^2}(10k) M(r_0, f).$$

En résolvant (16) par rapport à $g_2(z_0)$, on trouve d'une manière analogue que

$$|g_2(z_0)| < \frac{1}{(k+1)!} 4^2 k^{2k} e^{10k^2}(10k)^3 N^{\frac{10}{8}\frac{k+2}{k+1}} M(r_0, f).$$

En général, posons

$$\varphi_{s+1}(z, z_0) = \varphi_s(z, z_0) - \left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^s g_s(z_0),$$

pour $s = 1, 2, \ldots, k-1$. Supposons que l'on ait montré l'inégalité

$$(17) \qquad |\varphi_s(\zeta_j, z_0)| < \frac{1}{(k+1)!} 2 \times 4^{s-1} k^{(s-1)k} e^{10k^2} (10k) M(r_0, f),$$

et l'inégalité (14), pour $s = s$. Alors (17) est encore vraie pour $s = s+1$. En résolvant les équations

$$d_1^{s+1} g_{s+1}(z_0) + \cdots + d_1^k g_k(z_0) = \varphi_{s+1}(\zeta_1, z_0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$d_{k-s}^{s+1} g_{s+1}(z_0) + \cdots + d_{k-s}^k g_k(z_0) = \varphi_{s+1}(\zeta_{k-s}, z_0),$$

par rapport à $g_{s+1}(z_0)$, on a

$$g_{s+1}(z_0) = \sum_{j=1}^{k-s} A_j^{(s+1)} \varphi_{s+1}(\zeta_j, z_0),$$

où

$$|A_j^{(s+1)}| < \frac{j^k}{(j-1)!(k-s-j)!} (10k)^{s+1} N^{\frac{5(s+1)}{8} \frac{k+2}{k+1}}.$$

Il s'ensuit que (14) est encore vraie pour $s = s+1$. Cette inégalité est ainsi vraie en général.

Lemme 3. — *Si*

$$|z_0| = r_0 = e^{-\frac{3}{4} N^{-\frac{1}{4}}}, \qquad |f(z_0)| = M(r_0, f),$$

on a

$$(18) \qquad f(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^N f(z_0)\{1 + \varphi(z, z_0)\}, \qquad |\varphi(z, z_0)| < \frac{1}{10},$$

dans le cercle

$$(C) \qquad \left|\frac{z - z_0}{z_0}\right| < e^{-20k^2} N^{-\frac{5}{8} \frac{k+2}{k+1}},$$

pourvu que $N \geqq (10k)^3$.

D'après la formule (3) et les Lemmes 1 et 2, si

$$\left|\frac{z - z_0}{z_0}\right| < \frac{\lambda}{\frac{1}{(k+1)!} 4k^k e^{10k^2} (10k)^2 N^{\frac{5}{8} \frac{k+2}{k+1}}},$$

où $\lambda < 1$, on a

$$f(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^N f(z_0)\{1 + \varphi(z, z_0)\},$$

$$|\varphi(z, z_0)| < \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^{k+1} < \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Par suite, si $\lambda = 1/11$, on a $|\varphi(z, z_0)| < 1/10$. On constate d'autre part, que l'expression

$$\frac{1}{(k+1)!} 44 k^k e^{10k^2} (10k)^2$$

est inférieure à e^{20k^2}.

LEMME 4. — *Si*

$$|z_0| = r_0 = e^{-\frac{3}{4} N^{-\frac{1}{4}}}, \qquad |f(z_0)| = M(r_0, f),$$

on a

$$(19) \qquad \frac{z^s f^{(s)}(z)}{N^s f(z)} = 1 + \varphi_s(z), \qquad |\varphi_s(z)| < \frac{1}{10},$$

pour $s = 1, 2, \ldots, k$, *dans le domaine*

$$(\Delta) \qquad \left(1 - \frac{2}{N}\right) < \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1, \qquad |\arg z - \arg z_0| < \frac{(2k+2)\pi}{N},$$

pourvu que $N \geqq (10)^{200k^2}$.

Le domaine (Δ) est intérieur au cercle (C), si

$$(20) \qquad e^{-20k^2} N^{-\frac{5}{8}\frac{k+2}{k+1}+1} > 2(2k+2)\pi.$$

Ceci a lieu dès que N dépasse un certain rang, car

$$-\frac{5}{8}\frac{k+2}{k+1} + 1 \geqq \frac{1}{16}.$$

Cela posé, les fonctions $g_s(z)$ étant des fonctions holomorphes, les inégalités (14) sont encore vérifiées, si l'on y remplace z_0 par z, pourvu que $|z| \leqq r_0$. D'après les formules (5), on a

$$g_1(z) = zf'(z) - Nf(z).$$

Dans le domaine (Δ), on a

$$\left|\frac{f(z_0)}{f(z)}\right| < e^3.$$

En posant

$$\frac{zf'(z)}{Nf(z)} = 1 + \varphi_1(z),$$

il suit du Lemme 2 que

$$|\varphi_1(z)| < \alpha_1$$

dans (Δ), si

$$e^3 \frac{1}{(k+1)!} 4^k k^k e^{10k^2} (10k)^2 N^{\frac{5}{8}\frac{k+2}{k+1}-1} < \alpha_1. \tag{21}$$

On a

$$2!g_2(z) = z^2 f''(z) - 2Nzf'(z) + N(N+1)f(z).$$

En posant

$$\frac{z^2 f''(z)}{N^2 f(z)} = 1 + \varphi_2(z),$$

on voit que

$$|\varphi_2(z)| < \alpha_2$$

dans (Δ), si (21) a lieu et si

$$e^3 \frac{2!}{(k+1)!} 4^2 k^{2k} e^{10k^2} (10k)^3 N^{\frac{10}{8}\frac{k+2}{k+1}-2} < \frac{\alpha_2}{2},$$

$$2\alpha_1 + \frac{1}{N} < \frac{\alpha_2}{2}.$$

En général, soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, k nombres positifs, tels que

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k < 1;$$

si N est assez grand, on aura

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)\left(1+\frac{2}{N}\right) \cdots \left(1+\frac{\sigma}{N}\right) = 1 + \lambda_\sigma, \qquad |\lambda_\sigma| < \alpha_\sigma, \tag{22}$$

pour $\sigma = 1, 2, \ldots, k-1$. Supposons que l'on ait, dans (Δ),

$$\frac{z^s f^{(s)}(z)}{N^s f(z)} = 1 + \varphi_s(z), \qquad |\varphi_s(z)| < \alpha_s, \tag{23}$$

pour $s = 1, 2, \ldots, s-1$. Alors d'après la formule (5), et le Lemme 2, on voit aisément que l'inégalité

$$|\varphi_s(z)| < \alpha_s$$

aura encore lieu dans (Δ), pour $s = s$, si l'on a

$$e^3 \frac{s!}{(k+1)!} 4^s k^{sk} e^{10k^2} (10k)^{s+1} N^{\frac{5s}{8}\frac{k+2}{k+1}-s} < \frac{\alpha_s}{2}, \tag{24}$$

et si

$$3\alpha_{s-1} 2^s \leqq \frac{\alpha_s}{2}. \tag{25}$$

Il est ainsi évident que (23) est vraie pour $s = 1, 2, \ldots, k$, si (24) a lieu pour $s = 1, 2, \ldots, k$, et si (25) est vérifiée pour $s = 2, 3, \ldots, k$. En prenant

$$3\,\gamma_{s-1}\,2^s = \frac{\alpha_s}{2}\,, \qquad \gamma_k = \frac{1}{10}\,,$$

pour $s = 2, 3, \ldots, k$, on voit que les conditions (22), (24), et (20) sont vérifiées dès que

(26) $$N \geqq (10)^{200k^2}\,.$$

4. Le domaine (Δ') défini par

$$\left(1 - \frac{3}{N}\right) < \left|\frac{z}{z_0}\right| < \left(1 + \frac{1}{N}\right), \qquad |\arg z - \arg z_0| < \frac{(2k+4)\pi}{N}\,,$$

est aussi intérieur au cercle (C) dès que (26) a lieu. D'autre part, les points de (Δ) sont à une distance de la frontière de (Δ'), au moins égale à $|z_0|/N$. Dans (Δ'), on a d'après le Lemme 3,

$$|f(z)| < \frac{11\,e}{10}\,|f(z_0)| < 3\,|f(z_0)|.$$

Les formules de Cauchy fournissent les inégalités

(27) $$|f^{(\nu)}(z)| < 40\,k\,\nu\,!\,|f(z_0)|\,(2\,N)^\nu,$$

valables dans (Δ). En vertu de la définition de N, et comme on suppose que $E \geqq 1$, on a

(28) $$|f(z_0)| \geqq |c_N\,z_0^N| = E\,e^{N^{\frac{3}{4}}}\,e^{-\frac{3}{4}N^{\frac{3}{4}}} \geqq e^{\frac{1}{4}N^{\frac{3}{4}}}\,,$$

donc

(29) $$N \leqq 7\left(\log|f(z_0)|\right)^{\frac{4}{3}}\,,$$

et si z est dans (Δ), on a d'après (27) et (29)

(30) $$|f^{(\nu)}(z)| < 40\,k\,\nu\,!\,|f(z_0)|\left(14 \log|f(z_0)|\right)^{\frac{4\nu}{3}}\,.$$

5. Considérons un nombre réel arbitraire ω, et posons

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{\omega - \arg f(z_0)}{N}\,, \qquad z_0 = r_0\,e^{i\varphi_0}.$$

Si l'on suppose que

$$|\arg f(z_0) - \omega| \leqq \pi,$$

on aura

$$|\varphi_1 - \varphi_0| \leqq \frac{\pi}{N}.$$

Désignons par $\Delta(\varphi_1)$ la portion de (Δ), définie par

$$\Delta(\varphi_1) \qquad |\varphi - \varphi_1| < \frac{\pi}{N}, \qquad z = re^{i\varphi},$$

(Δ) étant donné dans le Lemme 4. Lorsque z décrit $\Delta(\varphi_1)$, la fonction

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^N f(z_0)$$

représente $\Delta(\varphi_1)$ conformément sur la couronne fendue

$$(31) \qquad \left(1 - \frac{2}{N}\right)^N |f(z_0)| < |Z| < |f(z_0)|, \qquad |\arg Z - \omega| < \pi.$$

Considérons le domaine $\Lambda(\omega)$ défini par

$$\Lambda(\omega) \qquad \frac{1}{4}|f(z_0)| < |Z| < \frac{1}{2}|f(z_0)|, \qquad |\arg Z - \omega| < \frac{\pi}{2}.$$

Les points de $\Lambda(\omega)$ sont à une distance de la frontière de (31) supérieure à $|f(z_0)|/10$. Donc, Z appartenant à $\Lambda(\omega)$, on a sur la frontière de $\Delta(\varphi_1)$,

$$\left|Z - \left(\frac{z}{z_0}\right)^N f(z_0)\right| > \frac{|f(z_0)|}{10}.$$

Le théorème de ROUCHÉ montre que l'équation

$$(32) \qquad Z - f(z) = 0$$

qui s'écrit d'après le Lemme 3,

$$\left\{Z - \left(\frac{z}{z_0}\right)^N f(z_0)\right\} - \left(\frac{z}{z_0}\right)^N f(z_0)\varphi(z, z_0) = 0,$$

a une racine et une seule dans $\Delta(\varphi_1)$. L'équation (32) définit une fonction $z = g_\omega(Z)$, holomorphe dans $\Lambda(\omega)$, qui est une branche de la fonction inverse de $f(z)$. Considérons un nombre ω',

$$|\omega' - \omega| \leqq \frac{\pi}{4}.$$

De la même manière, on voit que l'équation (32) définit une fonction $z = g_{\omega'}(Z)$ holomorphe dans

$$\Lambda(\omega') \qquad \frac{1}{4}|f(z_0)| < |Z| < \frac{1}{2}|f(z_0)|, \qquad |\arg Z - \omega'| < \frac{\pi}{2},$$

z restant dans la portion de (Δ) définie par

$$\Delta(\varphi_1') \qquad |\varphi - \varphi_1'| < \frac{\pi}{N},$$

où

$$\varphi_1' = \varphi_0 + \frac{\omega' - \arg f(z_0)}{N}.$$

Montrons que $g_{\omega'}(Z)$ est le prolongement analytique de $g_\omega(Z)$. Supposons par exemple, $\omega' = \omega + h$, $h > 0$, et considérons l'arc s défini par

$$|z| = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{N}} |z_0|, \qquad \varphi_1 < \varphi < \varphi_1',$$

qui appartient à la partie commune à $\Delta(\varphi_1)$ et à $\Delta(\varphi_1')$. Sur cet arc, on voit, eu égard au Lemme 3, que l'on a

$$\frac{1}{4}|f(z_0)| < |f(z)| < \frac{1}{2}|f(z_0)|,$$

et

$$|\arg f(z) - \omega| \leqq N|\varphi - \varphi_1| + |\arg[1 + \varphi(z, z_0)]| < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{20} < \frac{\pi}{2},$$

$$|\arg f(z) - \omega'| \leqq N|\varphi - \varphi_1'| + |\arg[1 + \varphi(z, z_0)]| < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{20} < \frac{\pi}{2}.$$

Donc les fonctions $g_\omega(Z)$ et $g_{\omega'}(Z)$ prennent les mêmes valeurs sur un arc correspondant à s. Elles coïncident partout dans la partie commune à $\Lambda(\omega)$ et à $\Lambda(\omega')$.

En donnant à ω successivement les valeurs $\omega + j\frac{\pi}{4}(j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, ou en faisant tourner le rayon ω autour de l'origine dans le sens positif par exemple, on prolonge $g_\omega(Z)$ dans la couronne

$$\frac{1}{4}|f(z_0)| < |Z| < \frac{1}{2}|f(z_0)|, \tag{33}$$

fendue suivant un rayon ω, et l'on obtient une branche $z = g_1(Z|\omega)$ de la fonction inverse de $f(z)$, holomorphe dans cette couronne fendue. En faisant tourner le rayon ω d'un angle $2k\pi$ autour de l'origine, on obtient successivement k branches $z = g_i(Z|\omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ de la fonction inverse de $f(z)$, holomorphes dans cette couronne fendue. Ces branches sont évidemment distinctes, car dans la portion de la couronne (33), définie par

$$\omega < \arg Z < \omega + \frac{\pi}{2},$$

les valeurs de $g_i(Z|\omega)$ et de $g_j(Z|\omega)$ sont respectivement dans les portions de (Δ), définies par

$$\left|\varphi - \varphi_1 - (i-1)\frac{2\pi}{N}\right| < \frac{\pi}{N}, \qquad \left|\varphi - \varphi_1 - (j-1)\frac{2\pi}{N}\right| < \frac{\pi}{N},$$

et ces portions sont distinctes. Les domaines $D_i(\omega)$ décrits par les valeurs de $g_i(Z|\omega)$ ne se recouvrent pas l'un sur l'autre. $f(z)$ est univalente dans $D_i(\omega)$ et le représente sur la couronne fendue (33). Lorsque z décrit la frontière de $D_i(\omega)$, $f(z)$ décrit celle de la couronne fendue (33). D'autre part, on voit aisément que $D_i(\omega)$ est contenu dans la portion de (Δ), définie par

$$\varphi_1 + (i-1)\frac{2\pi}{N} + \frac{\pi}{2N} - \frac{\pi}{N} < \varphi < \varphi_1 + (i-1)\frac{2\pi}{N} + \frac{3}{2}\frac{\pi}{N} + \frac{\pi}{N},$$

donc l'argument de z varie de moins de $3\pi/N$ dans $D_i(\omega)$. D'après le Lemme 4, on voit que l'argument de $f^{(s)}(z)$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$ varie de moins de 3π dans $D_i(\omega)$. Le Lemme 3 montre que dans $D_i(\omega)$, le module de z est compris entre les nombres

$$\left(\frac{1}{4}\frac{10}{11}\right)^{\frac{1}{N}} r_0, \qquad \left(\frac{1}{2}\frac{10}{9}\right)^{\frac{1}{N}} r_0.$$

En prenant la moyenne géométrique r' de ces deux nombres, on a, eu égard au Lemme 4,

$$\frac{1}{2} < \left|\frac{r'^s}{N^s}\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)}\right| < 2,$$

dans $D_i(\omega)$.

Les résultats obtenus jusqu'ici fournissent un énoncé analogue au Théorème I, en supposant que le nombre N vérifie la condition (26).

6. Supposons maintenant que l'on ait

$$N < (10)^{200k^2}.$$

Posons

$$P = (10)^{200k^2}.$$

D'apres un lemme de M. Valiron [11, *d*], $c_0, c_1, \ldots, c_{2P-1}$ étant les coefficients de $f(z)$, il existe un entier m,

$$0 \leqq m < 2P,$$

tel que

$$|c_n| \leqq |c_m| e^{15k(2P-m+1)(n-m)}, \qquad n = 0, 1, \ldots, m, \tag{34}$$

$$|c_n| \leqq |c_m| e^{15k(2P-m)(n-m)}, \qquad n = m, m+1, \ldots, 2P-1. \tag{35}$$

On a d'ailleurs, $m \leqq N$.

Le nombre m peut être égal à une des valeurs $0, 1, \ldots, k-1$. Mais dans ce cas, E étant le nombre défini dans le n° 2, on a, eu égard à (35),

$$E \leqq |c_N| < e^{30kP^2} \sum_{s=0}^{k-1} |c_s|,$$

donc $f(z)$ est majorée par

$$\left(e^{30kP^2} \sum_{s=0}^{k-1} |c_s|\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^{\frac{3}{4}}} z^n. \tag{36}$$

Nous supposons que $f(z)$ n'est pas majorée par cette expression, alors $m \geqq k$. Cela posé, établissons les lemmes suivants:

Lemme 5. — *Si*

$$|z| < e^{-\frac{3}{4}(2P)^{-\frac{1}{4}}}, \tag{Γ}$$

on a

$$\left|\sum_{n=2P}^{\infty} c_n z^n\right| < E e^P |z|^{2P}, \tag{37}$$

$$\left|\sum_{n=2P}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-s+1) c_n z^{n-s}\right| < E e^P |z|^{2P-s}, \tag{38}$$

pour $s = 1, 2, \ldots, k$.

On a, en effet,

$$\left|\sum_{n=2P}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-s+1)c_n z^{n-s}\right| < \sum_{n=2P}^{\infty} n^s|c_n||z|^{n-s} < E 2^s(2P)^s e^{(2P)^{\frac{3}{4}}}|z|^{2P-s}\left(1+\sum_{p=1}^{\infty}\Omega_p\right),$$

avec

$$\log \Omega_p = (2P+p)^{\frac{3}{4}} - (2P)^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4}p(2P)^{-\frac{1}{4}} + s\log p.$$

Cette expression est analogue à l'expression $\log A_p$ considérée dans la démonstration du Lemme 1. En appliquant l'inégalité (11), il s'ensuit que

$$\sum_{p=1}^{\infty}\Omega_p < e^{9s}(10s)^{s+1}(2P)^{\frac{5(s+1)}{8}}.$$

On constate que l'expression

$$2^s(2P)^s e^{(2P)^{\frac{3}{4}}}\left(1 + e^{9s}(10s)^{s+1}(2P)^{\frac{5(s+1)}{8}}\right)$$

est inférieure à e^P, ce qui établit (38). (37) se démontre d'une manière analogue.

LEMME 6. — *Si*

$$(S) \qquad e^{-15k(2P-m)-10k} \leqq |z| \leqq e^{-15k(2P-m)-6k}$$

on a

$$(39) \qquad f(z) = c_m z^m[1+\varphi(z)], \qquad |\varphi(z)| < \frac{1}{30},$$

$$(40) \quad f^{(s)}(z) = m(m-1)\ldots(m-s+1)c_m z^{m-s}[1+\varphi_s(z)], \qquad |\varphi_s(z)| < \frac{1}{30},$$

pour $s = 1, 2, \ldots, k$.

Dans la couronne (S), on a, eu égard à (34) et à (35),

$$\left|\sum_{n=0}^{m-1} n(n-1)\ldots(n-s+1)c_n z^{n-s}\right| < |m(m-1)\ldots(m-s+1)c_m z^{m-s}|\sum_{n=0}^{m-1}\left(e^{15k(2P-m+1)}|z|\right)^{n-m}$$

$$< |m(m-1)\ldots(m-s+1)c_m z^{m-s}|\sum_{p=1}^{m} e^{-5kp},$$

$$\left|\sum_{n=m+1}^{2P-1} n(n-1)\ldots(n-s+1)c_n z^{n-s}\right| \leqq$$

$$\leqq |m(m-1)\ldots(m-s+1)c_m z^{m-s}|\sum_{n=m+1}^{2P-1}(1+n-m)^s\left[e^{15k(2P-m)}|z|\right]^{n-m}$$

$$< |m(m-1)\ldots(m-s+1)c_m z^{m-s}|\sum_{p=1}^{2P-m-1} e^{-5kp}$$

On a d'autre part, eu égard à (35),

$$E < |c_\lambda| \leqq |c_m| e^{15k(2P-m)(\lambda-m)}$$

$$< |c_m| e^{15k(2P-m)(P-m)} \leqq |c_m| e^{-15kP} e^{15k(2P-m)^2}.$$

Donc, d'après le Lemme 5, en observant que la couronne (S) est contenue dans le cercle (Γ), on a

$$\left|\sum_{n=2P}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-s+1)c_n z^{n-s}\right| < |m(m-1)\ldots(m-s+1)c_m z^{m-s}| e^{-14kP}[e^{15k(2P-m)}|z|]^{2P-m}$$

$$< |m(m-1)\ldots(m-s+1)c_m z^{m-s}| e^{-6k(2P-m)},$$

dans (S). Par suite on a dans (S),

$$f^{(s)}(z) = m(m-1)\ldots(m-s+1)c_m z^{m-s}[1+\varphi_s(z)],$$

$$|\varphi_s(z)| < 2\sum_{p=1}^{\infty} e^{-skp} < \frac{1}{30}.$$

(39) s'établit d'une manière analogue.

7. Considérons la couronne contenue dans (S), définie par

$$(S_1) \qquad e^{-15k(2P-m)-9k} < |z| < e^{-15k(2P-m)-7k},$$

et soit z_0 un point sur le cercle

$$|z| = r_0 = e^{-15k(2P-m)-7k},$$

tel que

$$|f(z_0)| = M(r_0, f).$$

(39) et (40) fournissent à fortiori dans (S_1), les formules

$$(41) \qquad f(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^m f(z_0)\{1+\psi(z, z_0)\}, \qquad |\psi(z, z_0)| < \frac{1}{10},$$

$$(42) \qquad \frac{z^s f^{(s)}(z)}{m(m-1)\ldots(m-s+1)f(z)} = 1 + \psi_s(z), \qquad |\psi_s(z)| < \frac{1}{10},$$

pour $s = 1, 2, \ldots, k$. Ces formules étant valables dans (S), on a sur sa frontière,

$$|f(z)| < \frac{11}{10} e^{km} |f(z_0)|.$$

Les points de (S_1) sont à une distance supérieure à

$$\frac{1}{2} e^{-15k(2P-m)-9k},$$

de la frontière de (S). En appliquant les formules de CAUCHY, on trouve les inégalités

$$|f^{(\nu)}(z)| < 2\,\nu\,!\, e^{30kP\nu} |f(z_0)|, \tag{43}$$

valables dans (S_1). Observons que l'on a

$$M(r_0, f) \geqq |c_N| r_0^N > E r_0^N > e^{-30kP^2}. \tag{44}$$

8. Lorsque z décrit la couronne (S_1), le point

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^m f(z_0) \tag{45}$$

décrit m fois la couronne

$$e^{-2km} |f(z_0)| < |Z| < |f(z_0)|. \tag{46}$$

Soit ω un nombre réel arbitraire et posons

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{\omega - \arg f(z_0)}{m}, \qquad z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}.$$

$\arg f(z_0)$ demeure fixe. La fonction (45) représente conformément la portion de (S_1), définie par

$$\Delta(\varphi_1) \qquad |\varphi - \varphi_1| < \frac{3\pi}{4m},$$

sur la portion de (46), définie par

$$|\arg Z - \omega| < \frac{3}{4}\pi.$$

Eu égard à (41), on voit de la même manière que dans le cas précédent, que $f(z)$ représente conformément une portion de $\Delta(\varphi_1)$, sur le domaine

$$\Lambda(\omega) \qquad \frac{1}{4}|f(z_0)| < |Z| < \frac{1}{2}|f(z_0)|, \qquad |\arg Z - \omega| < \frac{\pi}{2},$$

et on prolonge la branche $z = g_1(Z|\omega)$ de la fonction inverse de $f(z)$, ainsi obtenue, dans la couronne

$$\frac{1}{4}|f(z_0)| < |Z| < \frac{1}{2}|f(z_0)|, \tag{47}$$

fendue suivant un rayon ω, en donnant successivement à ω, les valeurs

$$\omega + p\frac{\pi}{4}(p = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6),$$

ou en faisant tourner le rayon ω autour de l'origine dans le sens positif, par exemple. En faisant tourner le rayon ω d'un angle $2m\pi$ autour de l'origine, on obtient m branches $z = g_i(Z|\omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ de la fonction inverse de $f(z)$, holomorphes dans la couronne (47) fendue suivant ω. Ces branches, ainsi que les domaines correspondants $D_i(\omega)$ décrits par leurs valeurs, sont distinctes. Mais dans ce cas, on voit aisément que la valeur finale de $g_m(Z|\omega)$ coïncide avec la valeur initiale de $g_1(Z|\omega)$; ces branches se permutent entre elles, lorsque Z tourne autour de l'origine.

On voit que l'argument de z varie de moins de $5\pi/2m$, dans $D_i(\omega)$, et d'après le Lemme 6, il s'ensuit que l'argument de $f^{(s)}(z)$ varie de moins de 3π, dans $D_i(\omega)$. Dans ce domaine, le module de z est compris entre les nombres

$$\left(\frac{1}{4}\,\frac{10}{11}\right)^{\frac{1}{m}} r_0, \qquad \left(\frac{1}{2}\,\frac{10}{9}\right)^{\frac{1}{m}} r_0.$$

r' étant la moyenne géométrique de ces nombres, on a, dans $D_i(\omega)$, eu égard à (42),

$$\frac{1}{2} < \left|\frac{f^{(s)}(z)}{H_s f(z)}\right| < 2,$$

~~avec~~

$$H_s = \frac{m(m-1)\ldots(m-s+1)}{r'^s}.$$

9. En combinant les résultats obtenus dans ces deux cas, on voit que l'on a cet énoncé:

Il existe des nombres positifs $l(k)$, $a(k)$, $b(k)$, $c(k)$, $c'(k)$, $c_p(k)$, *jouissant des propriétés suivantes. Si*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

est une fonction holomorphe pour $|z| < 1$, *qui n'est pas majorée par*

$$\left[1 + l(k)\sum_{i=0}^{k-1}|c_i|\right]\sum_{n=0}^{\infty} e^{n^{\frac{3}{4}}} z^n, \tag{48}$$

on peut trouver k *domaines* $D_i(f, \omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *contenus dans le cercle* $|z| < r = r(f, k)$, *avec* $a(k) < r < 1$ *et* $M(r, f) > b(k)$, *dans lesquels* $f(z)$ *se comporte comme suit:*

1°. $f(z)$ *est univalente dans* $D_i(f, \omega)$ *et représente ce domaine sur la couronne fendue*

$$\frac{1}{4} M(r, f) < |Z| < \frac{1}{2} M(r, f), \qquad |\arg Z - \omega| < \pi \ (\omega \text{ arbitraire}).$$

2°. *Si* $1 \leqq n \leqq k$, *dans* $D_i(f, \omega)$, *l'argument de* $f^{(n)}(z)$ *varie de moins de* 3π *et l'on a*

$$\frac{1}{2} < \left|\frac{f^{(n)}(z)}{H_n f(z)}\right| < 2, \qquad c'(k) < H_n^{\frac{1}{n}} < c(k)[1 + \overset{+}{\log} M(r, f)]^{\frac{4}{3}},$$

H_n *dépendant de* n, k, $f(z)$, *et* r.

3°. *Si* $1 \leqq n \leqq p$, *on a dans* $D_i(f, \omega)$,

$$|f^{(n)}(z)| < c_p(k) M(r, f)[1 + \overset{+}{\log} M(r, f)]^{\frac{4p}{3}}.$$

Cet énoncé est établi pour les fonctions $f(z)$ holomorphes dans le cercle $|z| < 1$, et sur sa circonférence. Pour passer au cas où $f(z)$ est holomorphe dans $|z| < 1$, considérons une suite de nombres positifs

$$\frac{1}{2} < \rho_1 < \rho_2 < \cdots < \rho_n < \cdots < 1, \qquad \rho_n \to 1.$$

$f(\rho_n z)$ est holomorphe pour $|z| \leqq 1$. Si $f(\rho_n z)$ est majorée par (48), quel que soit ρ_n, $f(z)$ l'est aussi. Dans le cas contraire, pour une valeur ρ_n, $f(\rho_n z)$ n'est pas majorée par (48). En considérant la fonction $\varphi(z) = f(\rho_n z)$, et en modifiant convenablement les nombres $a(k)$, $c(k)$, $c_p(k)$, on voit que l'énoncé est vrai en général.

Soit enfin, S un nombre positif arbitrairement donné. En considérant la fonction

$$\psi(z) = \frac{b(k)}{eS} f(z),$$

on passe de cet énoncé au Théorème I. Ce théorème est ainsi démontré.

Remarque. — Dans la démonstration, on a constaté que dans $D_i(f, \omega)$, le module de z est compris entre $r/5$ et r, et que son argument varie de moins de $3\pi/k$. D'autre part, les branches $z = g_i(Z|\omega)$ de la fonction inverse de $f(z)$ sont liées entre elles. Dans le premier cas, ces branches s'obtiennent successivement à partir d'une branche initiale, en faisant tourner Z autour de l'origine et dans le deuxième cas, ces branches se permutent entre elles lorsque Z tourne autour de l'origine.

CHAPITRE II.

Les valeurs exceptionnelles des fonctions holomorphes.

10. Dans une conférence donnée en 1934 à la Société Mathématique suisse, M. MONTEL a proposé l'étude des conditions de normalité d'une famille de fonctions holomorphes ne prenant pas la valeur zéro et dont une dérivée ne prend pas la valeur un [7, *b*]. Ce problème a été traité par MM. BUREAU [3], MIRANDA [6], et VALIRON [11, *e*]. Si l'on pose avec M. VALIRON,

$$F(z) = e^{f(z)},$$

des calculs simples montrent que l'équation

$$F^{(\nu)}(z) = 1$$

prend la forme

$$e^f[f'^{\nu} + P_\nu(f', f'', \ldots, f^{(\nu)})] = 1, \tag{49}$$

où P_ν est un polynome de degré $\nu - 1$. Nous sommes donc conduits à considérer les fonctions $f(z)$ pour lesquelles l'équation (49) n'a pas de racines. Nous allons étudier certaines équations de ce genre et établir la proposition suivante:

THÉORÈME II. — *Soient k, p, d des entiers positifs, $a_0 (a_0 \neq 0)$, a_j $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ des constantes données, $\Pi(f, f', \ldots, f^{(k)})$ un monôme de degré d ayant le coefficient a_0, $P(f, f', \ldots, f^{(p)})$ un polynome de degré inférieur à d ayant les coefficients a_j, et m un entier positif donné. Posons*

$$A = 1 + m + \left|\log |a_0|\right| + \sigma \sum_{j=1}^{\sigma} \left|\frac{a_j}{a_0}\right|^2 .$$

Si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

est holomorphe dans $|z| < 1$, et si l'équation

$$e^f[\Pi(f, f', \ldots, f^{(k)}) + P(f, f', \ldots, f^{(p)})] = 1 \tag{50}$$

n'a que m racines au plus dans $|z| < 1$, *on a*

$$(51) \qquad |f(z)| < \left(A + \sum_{i=0}^{k-1} |c_i|\right) \Omega(|z|, k, p, d),$$

pour $|z| < 1$. $\Omega(|z|, k, p, d)$ *désigne une fonction indépendante de* $f(z)$.

D'après le Théorème I, où l'on prend $S = 1$, ou bien $f(z)$ est majorée par

$$(52) \qquad \lambda(k)\left(1 + \sum_{i=0}^{k-1} |c_i|\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^{\frac{3}{4}}} z^n,$$

et on a déjà une limitation de $|f(z)|$, ou bien on peut trouver k domaines $D_i(f, \omega)$ dans lesquels $f(z)$ et ses dérivées possèdent les propriétés énoncées. Considérons ce second cas et soit D un des domaines $D_1(f, 0)$. Par hypothèse, l'ensemble des équations

$$(53) \qquad f(z) + 2i\pi\tau + \log \Pi + \log\left(1 + \frac{P}{\Pi}\right) = 0,$$

où τ est un entier arbitraire, et où les déterminations des logarithmes ont été choisies en un point, n'a que m racines au plus. $f(z)$ représente D sur la couronne fendue

$$(54) \qquad \frac{1}{4} M(r, f) < |Z| < \frac{1}{2} M(r, f), \qquad |\arg Z| < \pi$$

et lorsque z décrit la frontière de D, $f(z)$ décrit celle de (54). Il est donc visible que si

$$(55) \qquad M(r, f) > 16(m + 1)\pi$$

(54) comprend au moins $2(m + 1)$ des points $2i\pi\tau$, correspondant aux valeurs $\pm \tau_l$ $(l = 1, 2, \ldots, m + 1)$ de τ, et pour ces valeurs, on a

$$(56) \qquad |f(z) + 2i\pi\tau| > \frac{1}{16} M(r, f),$$

sur la frontière de D.

Pour étudier les racines de (53), cherchons des limitations du module des fonctions

$$\log \Pi, \qquad \log\left(1 + \frac{P}{\Pi}\right),$$

lorsque z est dans D. On a

$$\Pi(f, f', \ldots, f^{(k)}) \equiv a_0 f^{d_0} (f')^{d_1} \ldots (f^{(k)})^{d_k}, \qquad d_0 + d_1 + \cdots + d_k = d,$$

$$\log \Pi = \log a_0 + \sum_{i=0}^{k} d_i \log f^{(i)}.$$

Prenons en un point z_0 dans D, les déterminations réduites pour $\log a_0$, et $\log f^{(1)}$. D'après les première et seconde parties du Théorème I, on voit aisément que si

$$M(r, f) > e$$

on a, dans D,

$$|\log \Pi| < \left|\log |a_0|\right| + K \log M(r, f), \tag{57}$$

K ne dépendant que de k et d. Comme

$$P(f, f', \ldots, f^{(p)}) \equiv \sum_{j=1}^{\sigma} a_j f^{e_{0j}} (f')^{e_{1j}} \ldots (f^{(p)})^{e_{pj}}, \qquad e_{0j} + e_{1j} + \cdots + e_{pj} < d,$$

les trois parties du Théorème I montrent que si

$$M(r, f) > K_1 + K_2 \sigma \sum_{j=1}^{\sigma} \left|\frac{a_j}{a_0}\right|^2,$$

K_1, K_2 ne dépendant que de k, p, et d, on a dans D,

$$\left|\frac{P}{\Pi}\right| < \frac{1}{2}. \tag{58}$$

En prenant au point z_0 dans D, la détermination réduite pour

$$\log\left(1 + \frac{P}{\Pi}\right),$$

(58) fournit une limitation du module de cette fonction dans D.

Les conditions (55), (57), et (58) sont donc vérifiées, si

$$M(r, f) > 16(m+1)\pi + e + K_1 + K_2 \sigma \sum_{j=1}^{\sigma} \left|\frac{a_j}{a_0}\right|^2. \tag{59}$$

Pour chacune des valeurs $\pm \tau_l$, l'équation

$$f(z) + 2 i \pi \tau = 0$$

admet une racine dans D. D'après le théorème de Rouché, on voit eu égard à (56), (57), (58), et (59), que l'équation (53) a une racine dans D, pour chacune des valeurs $\pm \tau_l$, si

$$M(r, f) > CA,$$

A étant le nombre défini dans l'énoncé du Théorème II, et C ne dépendant que de k, p, et d. Par suite, l'équation (50) aurait plus de m racines dans $|z| < 1$. Donc, d'après l'hypothèse, on a

$$M(r, f) < CA.$$

Puisque $r > \alpha(k) = \alpha$, d'après le Théorème I, on a, à fortiori,

$$M(\alpha, f) < CA.$$

Ceci et (52) donnent l'inégalité

$$M(\alpha, f) < C_1\left(A + \sum_{i=0}^{k-1}|c_i|\right),$$

valable dans tous les cas.

Moyennant cette inégalité, les formules de CAUCHY fournissent des bornes de $|f^{(i)}(z)|/i!$ pour $|z| \leqq \alpha' = \alpha/2$. On trouve que

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{|f^{(i)}(z)|}{i!} < C'\left(A + \sum_{i=0}^{k-1}|c_i|\right), \tag{60}$$

pour $|z| \leqq \alpha'$, C' ne dépendant que de k, p, et d.

Appliquons cette inégalité à la fonction

$$f_1(z) = f[z_0 + z(1 - \alpha')], \qquad |z_0| = \alpha'.$$

On a

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{|f_1^{(i)}(z)|}{i!} < C'\left(A_1 + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{|f_1^{(i)}(0)|}{i!}\right), \tag{61}$$

pour $|z| \leqq \alpha'$, où

$$A_1 < \frac{L}{(1-\alpha')^{\mu}}A,$$

L et μ étant des entiers ne dépendant que de k, p, et d. Eu égard à (60), (61) nous donne

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{|f^{(i)}(z)|}{i!} < \frac{2LC'^2}{(1-\alpha')^{\mu+k-1}}\left(A + \sum_{i=0}^{k-1}|c_i|\right), \tag{62}$$

pour $\alpha' \leqq |z| \leqq 1 - (1-\alpha')^2 = \alpha'_1$. Appliquons (60) à la fonction

$$f_2(z) = f[z_1 + z(1 - \alpha'_1)], \qquad |z_1| = \alpha'_1.$$

On a

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{|f_2^{(i)}(z)|}{i!} < C'\left(A_2 + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{|f_2^{(i)}(0)|}{i!}\right),$$

pour $|z| \leqq \alpha'$, où

$$A_2 < \frac{L}{(1-\alpha'_1)^{\mu}}A.$$

Eu égard à (62), on trouve que

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{|f^{(i)}(z)|}{i!} < \frac{4 L C'^3}{(1-\alpha')^{2\mu+3(k-1)}} \left(A + \sum_{i=0}^{k-1} |c_i| \right),$$

pour $1-(1-\alpha')^2 \leqq |z| \leqq 1-(1-\alpha')^3$.

En procédant de proche en proche, on voit que l'on a en général,

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{|f^{(i)}(z)|}{i!} < \frac{2^{s-1} L C'^s}{(1-\alpha')^{(s-1)\mu+(1+2+\dots+s-1)(k-1)}} \left(A + \sum_{i=0}^{k-1} |c_i| \right),$$

pour $1-(1-\alpha')^{s-1} \leqq |z| \leqq 1-(1-\alpha')^s$, ce qui fournit une inégalité de la forme (51).

Théorème II'. — *Dans les conditions du Théorème II, $f(z)$ est majorée par*

$$\rho(k, p, d) \left(A + \sum_{i=0}^{k-1} |c_i| \right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^{\frac{3}{4}}} z^n, \tag{63}$$

$\rho(k, p, d)$ ne dépendant que de k, p, et d.

En effet, dans la démonstration du théorème précédent, on a vu que si l'on avait

$$M(r, f) > CA,$$

C ne dépendant que de k, p, et d, l'équation (50) aurait plus de m racines dans $|z| < 1$. Prenons dans le Théorème I, $S = CA$. $f(z)$ est donc majorée par

$$\lambda(k) \left(CA + \sum_{i=0}^{k-1} |c_i| \right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^{\frac{3}{4}}} z^n,$$

car, dans le cas contraire, on aurait

$$M(r, f) > CA,$$

et l'équation (50) aurait plus de m racines dans $|z| < 1$. $f(z)$ est donc majorée par (63).

11. Le Théorème II permet d'établir le suivant:

Théorème III. — *$\Pi(f, f', \dots, f^{(k)})$ et $P(f, f', \dots, f^{(p)})$ étant les polynomes définis dans le Théorème II, la famille des fonctions $f(z)$ holomorphes dans un domaine (D), où, pour chaque fonction $f(z)$ de la famille, l'équation*

$$e^f [\Pi(f, f', \dots, f^{(k)}) + P(f, f', \dots, f^{(p)})] = 1 \tag{64}$$

n'a que m racines au plus, m étant un entier positif donné, est quasi-normale d'ordre $k - 1$ au plus dans ce domaine.

Considérons un point z_0 dans (D) et décrivons un cercle (γ) ayant pour centre z_0 et pour rayon δ, et intérieur au domaine (D). En appliquant le Théorème II à la fonction $f(z_0 + \delta z)$, on a, dans (γ),

$$(65) \qquad |f(z)| < \left(A' + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\delta^i |f^{(i)}(z_0)|}{i!}\right) \Omega\left(\frac{|z - z_0|}{\delta}, k, p, d\right),$$

$$A' = 1 + m + \left|\log \frac{|a_0|}{\delta^\mu}\right| + \sigma \sum_{j=1}^{\sigma} \frac{1}{\delta^{\mu_j}} \left|\frac{a_j}{a_0}\right|^2,$$

μ et μ_j ne dépendant que des formes de Π et de P.

Soit $B(z_0, f)$ le maximum des nombres

$$\frac{|f^{(i)}(z_0)|}{i!} \qquad (i = 0, 1, \ldots, k - 1),$$

et z_0 étant fixe, soient $B(z_0, f_n)$ les nombres correspondants pour une suite quelconque de fonctions $f_n(z)$, contenue dans la famille $f(z)$. Supposons d'abord que les nombres $B(z_0, f_n)$ soient bornés par un nombre K, quel que soit n. Dans ce cas. les fonctions $f_n(z)$ sont bornées dans leur ensemble dans tout domaine complètement intérieur à (D). En effet, d'après (65), les formules de CAUCHY donnent, dans le cercle $|z - z_0| \leqq \delta/2$, l'inégalité

$$1 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{|f^{(i)}(z)|}{i!} < \Lambda\left(1 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{|f^{(i)}(z_0)|}{i!}\right),$$

où Λ est indépendant de $f(z)$ et de z_0. Considérons un autre point z'_0 dans (D), et joignons z_0 à z'_0 par une courbe (Γ), une ligne polygonale par exemple, intérieure à (D). Désignons par δ, la plus courte distance d'un point arbitraire sur (Γ), à la frontière de (D). ζ étant un point sur (Γ), on a

$$(66) \qquad 1 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{|f_n^{(i)}(z)|}{i!} < \Lambda\left(1 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{|f_n^{(i)}(\zeta)|}{i!}\right),$$

pour $|z - \zeta| \leqq \delta/2$. Prenons sur (Γ), s points $\zeta_l (l = 1, 2, \ldots, s)$, $\zeta_1 = z_0$, $\zeta_s = z'_0$, tels que $|\zeta_{l+1} - \zeta_l| < \delta/2$ $(l = 1, 2, \ldots s - 1)$. En appliquant (66) successivement aux points ζ_l, on trouve que

$$1 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{|f_n^{(i)}(z)|}{i!} < \Lambda\left(1 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{|f_n^{(i)}(z_0)|}{i!}\right),$$

pour $|z - z_0| \leqq \delta/2$,

$$1 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{|f_n^{(i)}(z)|}{i!} < A^2 \left(1 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{|f_n^{(i)}(z_0)|}{i!}\right),$$

pour $|z - z_2| \leqq \delta/2$, et ainsi de suite,

$$(67) \qquad 1 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{|f_n(z)|}{i!} < A^l \left(1 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{|f_n^{(i)}(z_0)|}{i!}\right),$$

pour $|z - z_0'| \leqq \delta/2$. Puisque par hypothèse, $|f_n^{(i)}(z_0)|/i!$ est inférieur à K, on voit que les fonctions $f_n(z)$ sont bornées dans leur ensemble pour $|z - z_0'| \leqq \delta/2$. Comme z_0' est arbitrairement choisi, on sait dans ce cas, que les fonctions $f_n(z)$ sont bornées dans leur ensemble dans l'intérieur de (D). On peut extraire de $f_n(z)$, une autre suite convergeant uniformément dans l'intérieur de (D), vers une fonction holomorphe, d'après un théorème bien connu de M. Montel.

Supposons maintenant que les nombres $B(z_0, f_n)$ ne soient pas bornés. Compte tenu du cas qui vient d'être traité, il suffit évidemment de considérer l'hypothèse, où

$$\lim_{n \to \infty} B(z_0, f_n) = \infty.$$

Considérons la suite de fonctions,

$$\varphi_n(z) = \frac{f_n(z)}{B(z_0, f_n)}.$$

Eu égard à (67), ces fonctions sont bornées dans leur ensemble dans l'intérieur de (D). On peut extraire de $\varphi_n(z)$, une autre suite que nous désignons encore par $\varphi_n(z)$, convergeant uniformément dans l'intérieur de (D), vers une fonction holomorphe $\varphi(z)$. On constate aisément que $\varphi(z)$ n'est pas identiquement nulle. En effet, si $B(z_0, f_n) = |f_n(z_0)|$, ceci est évident. En général, pour au moins une suite partielle $\varphi_{n'}(z)$ de $\varphi_n(z)$, on a $B(z_0, f_{n'}) = |f_{n'}^{(h)}(z_0)|/h!$ $(h \leqq k-1)$. Si $\varphi(z) \equiv 0$, $\varphi_{n'}^{(h)}(z)$ tend vers o, ce qui est évidemment impossible, car $|\varphi_{n'}^{(h)}(z_0)| = h!$.

Il est ainsi manifeste que, dans (D), les seuls points irréguliers de la suite $f_n(z)$ sont les zéros de $\varphi(z)$. Si $\varphi(z)$ ne s'annule pas dans (D), $f_n(z)$ tend uniformément vers l'infini dans l'intérieur de (D). Supposons que $\varphi(z)$ ait des zéros dans (D). Dans ce cas, on peut montrer que $\varphi(z)$ est un polynome de degré $k-1$ au plus. Il suffit de montrer que $\varphi^{(k)}(z) \equiv 0$. Supposons que $\varphi^{(k)}(z) \not\equiv 0$. Soit z_0 un zéro de $\varphi(z)$ intérieur à (D); décrivons deux cercles σ_1, σ_2 ayant z_0 pour centre commun, et intérieurs à (D). Soit (S) la couronne ainsi formée. On suppose que (S) ne contienne pas de zéros de $\varphi^{(i)}(z)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$. Considérons la suite de fonctions

$$G_n(z) = e^{B_n\varphi_n}[\Pi(B_n\varphi_n, B_n\varphi_n', \ldots, B_n\varphi_n^{(k)}) + P(B_n\varphi_n, B_n\varphi_n', \ldots, B_n\varphi_n^{(p)})],$$

où $B_n = B(z_0, f_n)$, déduites du premier membre de l'équation (64), en y remplaçant f par $B_n\varphi_n$. Par hypothèse, $G_n(z)$ ne prend que m fois au plus, la valeur un dans (S). D'autre part, le degré de Π étant supérieur à celui de P, il est évident que $G_n(z)$ ne prend pas la valeur zéro dans (S) dès que n dépasse un certain rang. On sait que dans ce cas, la suite $G_n(z)$ est normale dans (S) [7, *a*]. Mais, considérons un cercle σ situé dans (S), et concentrique à σ_1. $\varphi(z)$ s'annulant en z_0, sa partie réelle $R\varphi(z)$ prend des valeurs positives et des valeurs négatives sur $\sigma : R\varphi(z') > 0$, $R\varphi(z'') < 0$. Dès que n dépasse un certain rang, on a $R\varphi_n(z') > R\varphi(z')/2$, $R\varphi_n(z'') < R\varphi(z'')/2$. On voit que $G_n(z') \twoheadrightarrow \infty$, et $G(z'') \twoheadrightarrow 0$, et par conséquent, la suite $G_n(z)$ n'est par normale dans (S). Nous avons donc une contradiction et il s'ensuit que $\varphi(z)$ est un polynome de degré $k - 1$ au plus.

Ainsi, dans tous les cas, on peut extraire d'une suite quelconque contenue dans la famille $f(z)$, une autre suite convergeant uniformément dans l'intérieur de (D), sauf en $k - 1$ points au plus. Le théorème est démontré.

Remarque. — Dans la démonstration, on a supposé implicitement que le domaine (D) ne contient pas le point à l'infini. Si (D) contient le point à l'infini, il est évident que la famille $f(z)$ est d'ordre k au plus.

12. Appliquons ces résultats à l'étude du problème de M. Montel. Considérons une fonction $F(z)$ holomorphe dans $|z| < 1$, ne s'annulant pas dans ce cercle et soit $T(F, F', \ldots, F^{(\nu)})$ un polynome homogène de degré s en $F, F', \ldots, F^{(\nu)}$, ayant des coefficients constants. Supposons que l'équation

$$T(F, F', \ldots, F^{(\nu)}) = 1$$

n'ait que m racines au plus dans $|z| < 1$. En posant $F = e^f$, le polynome T prend la forme

$$e^{sf}\Psi(f', \ldots, f^{(\nu)}),$$

Ψ étant un polynome en $f', \ldots, f^{(\nu)}$, ayant des coefficients constants. Soient $\Pi(f', \ldots, f^{(k)})$ et $P(f', \ldots, f^{(p)})$ définis par les mêmes conditions que dans le Théorème II. Nous dirons que le polynome T vérifie la condition $H(k, p, d)$, si l'on a

$$\Psi(f', \ldots, f^{(\nu)}) \equiv \Pi(f', \ldots, f^{(k)}) + P(f', \ldots, f^{(p)}).$$

Dans ce cas, on peut appliquer les Théorèmes II et II' à la fonction sf. On a donc les propositions suivantes:

Théorème IV. — *Soient* $T(F, F', \ldots, F^{(\nu)})$ *un polynome homogène de degré* s

en F, F', $\ldots$, $F^{(\nu)}$, *vérifiant la condition* $H(k, p, d)$, *et* m *un entier positif donné. Posons*

$$sA = 1 + m + \left|\log \frac{|a_0|}{s^d}\right| + \sigma s^{2d} \sum_{j=1}^{\sigma} \left|\frac{a_j}{a_0}\right|^2 .$$

Si $F(z)$ *est holomorphe et ne s'annule pas dans* $|z| < 1$, *si l'équation*

$$T(F, F', \ldots, F^{(\nu)}) = 1$$

n'a que m *racines au plus dans* $|z| < 1$, *et si* $\log F(z)$ *est une branche quelconque du logarithme de* $F(z)$,

$$\log F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

on a

$$|\log F(z)| < \left(A + \sum_{i=0}^{k-1} |c_i|\right) \Omega(|z|, k, p, d),$$

pour $|z| < 1$. $\Omega(|z|, k, p, d)$ *désigne une fonction indépendante de* $\log F(z)$.

THÉORÈME IV′. — *Dans les conditions du Théorème IV,* $\log F(z)$ *est majorée par*

$$\rho(k, p, d)\left(A + \sum_{i=0}^{k-1} |c_i|\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^{\frac{3}{4}}} z^n,$$

$\rho(k, p, d)$ *ne dépendant que de* k, p *et* d.

En se rapportant à l'égalité (49) (n° 10), on voit que l'on a les corollaires suivants :

COROLLAIRE 1. — *Soit* $F(z)$ *une fonction holomorphe dans* $|z| < 1$, *ne prenant pas la valeur zéro et dont la dérivée* $F^{(\nu)}(z)$ $(\nu \geqq 0)$ *d'ordre* ν *ne prend pas la valeur un.* $\log F(z)$ *étant une branche quelconque du logarithme de* $F(z)$, *on a, pour* $|z| < 1$,

$$|\log F(z)| < (1 + |\log F(0)|)\,\Omega(|z|, \nu).$$

$\Omega(|z|, \nu)$ *désigne une fonction indépendante de* $\log F(z)$.

COROLLAIRE 1′. — *Dans les conditions du Corollaire 1,* $\log F(z)$ *est majorée par*

$$\rho_\nu (1 + |\log F(0)|) \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^{\frac{3}{4}}} z^n,$$

ρ_ν *ne dépendant que de* ν.

Ces résultats fournissent donc à la fois, une limitation du module de $F(z)$, et une limitation de son argument.

13. L'application du Théorème III, nous donne la proposition suivante :

THÉORÈME V. — *$T(F, F', \ldots, F^{(\nu)})$ étant le polynome défini dans le Théorème IV, et m un entier positif donné, si une famille de fonctions $F(z)$ holomorphes dans un domaine (D) fini et simplement connexe, ne s'annulent pas dans ce domaine, et si pour chaque fonction $F(z)$ de la famille, l'équation*

$$T(F, F', \ldots, F^{(\nu)}) = 1$$

n'a que m racines au plus dans (D), la famille $\log F(z)$ *est quasi-normale d'ordre $k-1$ au plus dans (D),* $\log F(z)$ *étant une branche quelconque du logarithme de $F(z)$.*

Si $k = 1$, la famille $\log F(z)$ est normale et on voit que la famille $F(z)$ est aussi normale. Ce cas est déjà traité par M. VALIRON [11, *e*]. Mais si $k > 1$, les circonstances sont différentes. Considérons par exemple, la famille des fonctions holomorphes $F(z)$ dans un domaine (D), ne s'y annulant pas et telles que l'équation

$$(FF'' - F'^2)^n + aF^{2n-m}F'^m + bF^{2n} = 1$$

n'ait pas de racines. n, $m (n > m)$ sont des entiers positifs, et a, b des constantes. En posant $F = e^f$, cette équation prend la forme

$$e^{2nf}(f''^n + af'^m + b) = 1. \tag{68}$$

On a ici $k = 2$.

Considérons l'équation différentielle

$$f''^n + af'^m + b = 0. \tag{69}$$

Si $a = 0$, cette équation admet les solutions

$$f = (-b)^{\frac{1}{n}} \frac{z^2}{2} + cz + c'. \tag{70}$$

Supposons $a \neq 0$, et écrivons l'équation sous la forme

$$u' = (-a)^{\frac{1}{n}} \left(u^m + \frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}},$$

en posant $u = f'$. Les branches de la fonction

$$\left(u^m + \frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$$

sont holomorphes dans le cercle

$$|u - \lambda| \leqq \frac{|\lambda|}{2}, \qquad |\lambda| > 2\left|\frac{b}{a}\right|^{\frac{1}{m}}.$$

Cherchons l'intégrale $u_\lambda(z)$ de cette équation, prenant la valeur λ au point z_0. On voit aisément que le rayon d'holomorphie de cette intégrale peut être aussi grand que l'on veut, pourvu que $|\lambda|$ soit assez grand. En effet, d'après la théorie de calcul des limites, on voit que $u_\lambda(z)$ est holomorphe dans le cercle

$$|z - z_0| < R\left(1 - e^{-\frac{|\lambda|^{1-\frac{m}{n}}}{4eR|a|^{1/n}}}\right),$$

R étant arbitraire (voir par exemple, GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique,* t. II, 5^e^ édition), ce qui démontre notre assertion, puisque $m < n$.

Considérons un domaine fini (D) et prenons un point z_0 dans ce domaine. La famille

$$F_\lambda(z) = e^{\int_{z_0}^{z} u_\lambda(z)dz}$$

appartient à la famille $F(z)$, dès que $|\lambda|$ est assez grand. Mais cette famille n'est pas normale en z_0, car $F_\lambda(z_0) = 1$ est bornée, et $F'_\lambda(z_0) = \lambda$ n'est pas bornée, lorsque $|\lambda|$ croît. Même si l'on supprime de la famille F, les fonctions e^f, f étant une solution de l'équation (69), il reste une famille non normale dans (D). Pour le voir, il suffit de considérer les fonctions

$$e^{\int_{z_0}^{z} u_\lambda(z)dz + \frac{(z-z_0)^2}{A_\lambda}},$$

A_λ, nombre positif. On constate sans peine, que si A_λ croît assez rapidement avec $|\lambda|$, le premier membre de (68), relatif à ces fonctions, est en module inférieur à un, dans (D). Pour les mêmes raisons que ci-dessus, cette famille est non normale en z_0. Pour le cas. où $a = 0$, on voit d'une manière analogue, que la famille $F(z)$ est non normale, moyennant l'introduction des fonctions (70).

La famille $F(z)$ est donc non normale dans (D), si (D) est fini, par suite elle n'est pas quasi-normale dans (D), puisque $F(z)$ ne prend pas la valeur zéro. Nous avons ainsi des familles de fonctions, ni normales, ni quasi-normales, mais qui d'après les résultats précédents, vérifient des inégalités analogues à ce qui est fourni par le théorème de SCHOTTKY.

Cette méthode permet de traiter des cas plus généraux, mais le problème n'est pas encore épuisé.

14. Dans certains cas, lorsque (D) est le plan complet privé du point à l'infini, la famille $F(z)$ est normale dans (D). Considérons par exemple le cas, où $n \geqq 3$, $m \geqq 1$ $(n > m)$, $ab \neq 0$. D'après le théorème de BOREL, les seules fonctions de la famille $F(z)$ sont les fonctions entières e^f, où f vérifie l'équation (69). En posant $u = f'$, on a

$$u'(z)^n + a\,u(z)^m + b \equiv 0.$$

Cette relation est vérifiée par les constantes

$$u(z) = \left(-\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Supposons maintenant que $a\,u(z)^m + b \not\equiv 0$, et considérons d'abord le cas où l'on aurait

$$a\,u(z_0)^m + b = 0,$$

pour un point z_0. Ce cas est impossible. En effet, on a

$$u'(z)[n\,u'(z)^{n-2}u''(z) + m\,a\,u(z)^{m-1}] \equiv 0.$$

Puisque $u'(z) \not\equiv 0$, et $u'(z_0) = 0$, on voit que $a = 0$ si $m = 1$, et $b = 0$ si $m > 1$, contrairement à l'hypothèse. Donc $a\,u(z)^m + b$ ne s'annule pas, et l'on a

$$a\,u(z)^m + b = e^{P(z)}, \qquad u'(z)^n = -e^{P(z)},$$

d'où on déduit aisément la relation

$$(-1)^m (m\,a)^{mn} \left(\frac{e^{P(z)} - b}{a}\right)^{n(m-1)} \equiv P'(z)^{mn} e^{m(n-1)P(z)},$$

identité de BOREL, qui est impossible. Les seules fonctions de la famille $F(z)$ sont donc les fonctions

$$\lambda\, e^{\left(-\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}} z}$$

qui forment une famille normale.

15. M. VALIRON a traité les familles de fonctions holomorphes ne prenant pas la valeur zéro et dont une dérivée est bornée en module par un nombre donné, aux points où la fonction prend la valeur un [11, *e*, *f*]. Il a donné des propositions, qui comme il a indiqué, peuvent se rattacher à une théorie générale de M. AHLFORS [1, *c*]. On peut traiter les problèmes de ce genre d'une manière analogue à celle employée pour le problème de M. MONTEL. Considérons une fonction

$F(z)$ holomorphe dans un certain domaine, ne prenant pas la valeur zéro et dont la dérivée $F^{(\nu)}(z)$ d'ordre ν est bornée en module par un nombre donné L, aux points où $F(z)$ prend la valeur un. En particulier, si $\nu = 1$, $L = 0$, $F(z)$ est une fonction sans zéros et $F(z) - 1$ n'a que des zéros multiples. Si l'on pose $F = e^f$, on voit, eu égard à (49) (n° 10), que f possède la propriété suivante: Aux points où $f(z)$ prend une quelconque des valeurs $2i\pi\tau$, τ, entier arbitraire, on a

$$|f'^{\nu} + P_\nu(f', f'', \ldots, f^{(\nu)})| < L. \tag{71}$$

Nous sommes donc conduits à considérer les fonctions $f(z)$ ayant une telle propriété.

Théorème VI. — *Soient* $\Pi(f, f', \ldots, f^{(k)})$ *et* $P(f, f', \ldots, f^{(p)})$ *les polynomes déjà considérés dans le Théorème II,* M, L *des nombres positifs, et* v_n $(n = 0, 1, \ldots, \infty)$, *une suite de nombres donnés vérifiant les conditions*

$$\lim_{n \to \infty} |v_n| = \infty, \qquad |v_{n+1}| > |v_n|, \qquad |v_{n+1}| - |v_n| \leqq M \quad (n = 0, 1, \ldots, \infty).$$

Posons

$$B = 1 + |v_0| + M + \left(\frac{L}{|a_0|}\right)^{\frac{1}{d}} + \sigma \sum_{j=1}^{\sigma} \left|\frac{a_j}{a_0}\right|^2.$$

Si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

est holomorphe dans $|z| < 1$, *et si aux points de* $|z| < 1$, *sauf au plus en* $k - 1$ *points dépendant de* v_n, *où* $f(z)$ *prend une quelconque des valeurs* v_n, *on a*

$$|\Pi(f, f', \ldots, f^{(k)}) + P(f, f', \ldots, f^{(p)})| < L,$$

alors

$$|f(z)| < \left(B + \sum_{i=0}^{k-1} |c_i|\right) \Omega(|z|, k, p, d),$$

pour $|z| < 1$. $\Omega(|z|, k, p, d)$ *désigne une fonction indépendante de* $f(z)$.

D'après le Théorème I, où l'on prend $S = 1$, ou bien $f(z)$ est majorée par

$$\lambda(k)\left(1 + \sum_{i=0}^{k-1} |c_i|\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^{\frac{3}{4}}} z^n, \tag{72}$$

ou bien on peut trouver k domaines $D_i(f, \omega)$ vérifiant les conditions de ce théorème. Bornons nous à ce cas. $f(z)$ représente $D_i(f, \omega)$ sur la couronne fendue

$$\frac{1}{4} M(r, f) < |Z| < \frac{1}{2} M(r, f), \qquad |\arg Z - \omega| < \pi.$$

D'après les hypothèses, il est évident que si

$$\frac{1}{4} M(r, f) > |v_0|, \qquad \frac{1}{4} M(r, f) > M,$$

cette couronne comprend au moins un des points v_n. En choisissant convenablement ω, on peut supposer que ce point ne se place pas sur la droite $\arg Z = \omega + \pi$. Soit v_{n_0} ce point. $f(z)$ prend la valeur v_{n_0} dans chacun des domaines $D_i(f, \omega)$, donc d'après l'hypothèse, pour au moins un point z_0 dans l'un des domaines $D_i(f, \omega)$, on a

$$|\Pi_0 + P_0| < L,$$

Π_0 et P_0 désignant les valeurs de Π et de P, en z_0. Écrivons cette inégalité sous la forme

$$(73) \qquad |\Pi_0| \left| 1 + \frac{P_0}{\Pi_0} \right| < L.$$

D'après les propriétés 1°, 2°, 3°, du Théorème I, on voit aisément que si

$$M(r, f) > K_1 + K_2 \sigma \sum_{j=1}^{\pi} \left| \frac{a_j}{a_0} \right|^2,$$

K_1, et K_2 ne dépendant que de k, p, et d, on a

$$\left| \frac{P_0}{\Pi_0} \right| < \frac{1}{2},$$

puis on a une inégalité au sens contraire à (73), si

$$M(r, f) > K \left(\frac{L}{|a_0|} \right)^{\frac{1}{d}},$$

K ne dépendant que de k. Il s'ensuit donc que

$$M(r, f) < CB,$$

C ne dépendant que de k, p, et d, et B étant le nombre défini dans l'énoncé du théorème. Puisque $r > \alpha(k) = \alpha$, on a à fortiori,

$$M(\alpha, f) < CB,$$

et eu égard à (72), on a dans tous les cas,

$$M(\alpha, f) < C_1\left(B + \sum_{i=0}^{k-1} |c_i|\right),$$

C_1 ne dépendant que de k, p, et d. À partir de cette inégalité, on complète la démonstration du théorème, en procédant de proche en proche comme dans la démonstration du Théorème II.

THÉORÈME VI'. — *Dans les conditions du Théorème VI, $f(z)$ est majorée par*

$$\varpi(k, p, d)\left(B + \sum_{i=0}^{k-1} |c_i|\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^{\frac{3}{4}}} z^n,$$

$\varpi(k, p, d)$ ne dépendant que de k, p, et d.

Pour établir ce théorème, il suffit d'appliquer le Théorème I à la fonction $f(z)$, en y prenant $S = CB$, où C est un nombre ne dépendant que de k, p, et d, obtenu dans la démonstration du théorème précédent.

16. À partir du Théorème VI, on peut établir le suivant:

THÉORÈME VII. — $\Pi(f, f', \ldots, f^{(k)})$, $P(f, f', \ldots, f^{(p)})$, M, L, *et* v_n $(n = 0, 1, \ldots, \infty)$, *étant définis comme dans le Théorème VI, la famille des fonctions $f(z)$ holomorphes dans un domaine (D), dont chaque fonction $f(z)$ possède la propriété qu'aux points de (D), sauf au plus en $k - 1$ points dépendant de v_n, où $f(z)$ prend une quelconque des valeurs v_n, on a*

$$|\Pi(f, f', \ldots, f^{(k)}) + P(f, f', \ldots, f^{(p)})| < L,$$

est quasi-normale d'ordre $k - 1$ au plus dans (D).

Soient z_0 un point de (D) et (γ) un cercle ayant pour centre z_0 et pour rayon δ et intérieur à (D). D'après le Théorème VI, on a dans (γ),

$$(74)\qquad \left\{\begin{aligned} &|f(z)| < \left(B' + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\delta^i |f^{(i)}(z_0)|}{i!}\right) \Omega\left(\frac{|z - z_0|}{\delta}, k, p, d\right), \\ &B' = 1 + |v_0| + M + \left(\frac{\delta^\mu L}{|a_0|}\right)^{\frac{1}{d}} + \sigma \sum_{j=1}^{\sigma} \frac{1}{\delta^{\mu_j}} \left|\frac{a_j}{a_0}\right|^2, \end{aligned}\right.$$

μ, μ_j ne dépendant que des formes de Π et de P.

Désignons par $C(z_0, f)$ le maximum des nombres

$$\frac{|f^{(i)}(z_0)|}{i!} \qquad (i = 0, 1, \ldots, k - 1),$$

et considérons une suite quelconque de fonctions $f_n(z)$, contenue dans la famille $f(z)$. À partir de (74), on constate comme dans la démonstration du Théorème III, que si les nombres $C(z_0, f_n)$, z_0 étant fixé, sont bornés, les fonctions $f_n(z)$ sont bornées dans leur ensemble dans l'intérieur de (D) et que si $C(z_0, f_n) \twoheadrightarrow \infty$, les fonctions

$$\varphi_n(z) = \frac{f_n(z)}{C(z_0, f_n)}$$

sont bornées dans leur ensemble dans l'intérieur de (D). Dans le premier cas, on peut extraire de $f_n(z)$ une suite convergeant uniformément dans l'intérieur de (D), vers une fonction holomorphe. Dans le deuxième cas, on peut extraire de $\varphi_n(z)$, une suite que nous désignons encore par $\varphi_n(z)$ convergeant uniformément vers une fonction holomorphe $\varphi(z)$ distincte de la constante zéro. Les seuls points irréguliers de $f_n(z)$ sont les zéros de $\varphi(z)$. Il suffit donc de montrer que $\varphi(z)$ n'a que $k-1$ zéros distincts au plus dans (D). Ceci est immédiat, si $\varphi^{(k)}(z) \equiv 0$. Supposons que $\varphi^{(k)}(z) \not\equiv 0$ et que $\varphi(z)$ s'annule en k points distincts z_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$, intérieurs à (D). Décrivons pour chacun des points z_j, deux petits cercles σ'_j, σ''_j ayant z_j pour centre commun, σ'_j intérieur à σ''_j et σ''_j intérieur à (D). Soient (S_j) les couronnes ainsi formées. Nous supposons que les cercles σ''_j soient extérieurs les uns aux autres et que les fonctions $\varphi^{(i)}(z)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$ ne s'annulent pas dans σ''_j et sur sa circonférence, sauf en z_j. Lorsque z décrit σ''_j; $Z = \varphi(z)$ décrit une courbe extérieure à un cercle $|Z| \leqq \rho''$, et en supposant que σ'_j soit assez petit, la courbe décrite par $Z = \varphi(z)$, lorsque z décrit σ'_j, est intérieure à un cercle $|Z| < \rho'$, $(\rho' < \rho'')$, ρ', ρ'' étant indépendants de j. Il est visible que le domaine décrit par $Z = \varphi(z)$, lorsque z parcourt (S_j), comprend la couronne

$$\rho' < |Z| < \rho''.$$

Comme $\varphi_n(z)$ tend uniformément vers $\varphi(z)$, on voit que le domaine correspondant décrit par $Z = \varphi_n(z)$ comprend aussi cette couronne, dès que n dépasse un certain rang. On peut supposer que n soit suffissament grand pour que l'on ait dans (S_j), $|\varphi_n^{(i)}(z)| > a$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ et $|\varphi_n^{(i)}(z)| < b$ $(i = 0, 1, \ldots, p)$, a, b étant des nombres positifs. Lorsque z parcourt (S_j), le domaine décrit par $f_n(z) = C(z_0, f_n)$ $\varphi_n(z)$, comprend la couronne

$$C(z_0, f_n)\rho' < |Z| < C(z_0, f_n)\rho''.$$

Par suite, dès que n dépasse un certain rang, $f_n(z)$ prend des valeurs v_n de la suite donnée, en des points ζ_j intérieurs à (S_j). Par hypothèse, pour un des points ζ_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$, on a

$$|H(f_n, f'_n, \ldots, f_n^{(k)}) + P(f_n, f'_n, \ldots, f_n^{(p)})| < L,$$

ce qui est évidemment impossible, lorsque n croît indéfiniement, car le degré de Π est supérieur à celui de P, et on a $|f_n^{(i)}(\zeta_j)| > C(z_0, f_n)a$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$, et $|f_n^{(i)}(\zeta_j)| < C(z_0, f_n)b$ $(i = 0, 1, \ldots, p)$. Le théorème est établi.

17. Considérons une fonction $F(z)$ holomorphe dans $|z| < 1$, ne s'annulant pas dans ce cercle, et ayant la propriété qu'aux points de $|z| < 1$, sauf peut-être en $k-1$ points, où $F(z)$ prend la valeur un, on a

$$|T(F', F'', \ldots, F^{(\nu)})| < L,$$

L étant un nombre positif donné, et T un polynome de degré s en $F', F'', \ldots, F^{(\nu)}$, avec des coefficients constants. En posant $F = e^f$, T prend la forme

$$\sum_{j=0}^{s} e^{jf}\,\Psi_j(f', f'', \ldots, f^{(\nu)}),$$

où Ψ_j sont des polynomes en $f', f'', \ldots, f^{(\nu)}$. Nous dirons que T vérifie la condition $K(k, p, d)$, si l'on a

$$\sum_{j=0}^{s} \Psi_j(f', f'', \ldots, f^{(\nu)}) \equiv \Pi(f', \ldots, f^{(k)}) + P(f', \ldots, f^{(p)}),$$

Π et P étant définis dans le Théorème II. Dans ces conditions, on peut appliquer les Théorèmes VI et VI', à la fonction f, avec $v_n = 2i\pi n$, et $M = 2\pi$.

THÉORÈME VIII. — *Soient $T(F', F'', \ldots, F^{(\nu)})$ un polynome en $F', F'', \ldots, F^{(\nu)}$ vérifiant la condition $K(k, p, d)$, et L un nombre positif donné. Posons*

$$B = 1 + \left(\frac{L}{|a_0|}\right)^{\frac{1}{d}} + \sigma \sum_{j=1}^{\sigma} \left|\frac{a_j}{a_0}\right|^2.$$

Si $F(z)$ est holomorphe et ne s'annule pas dans $|z| < 1$, et si aux points de $|z| < 1$, sauf peut-être en $k-1$ points, où $F(z)$ prend la valeur un, on a

$$|T(F', F'', \ldots, F^{(\nu)})| < L,$$

$\log F(z)$ *étant une branche quelconque du logarithme de $F(z)$,*

$$\log F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

on a

$$|\log F(z)| < \left(B + \sum_{i=0}^{k-1} |c_i|\right) \Omega(|z|, k, p, d),$$

pour $|z| < 1$. $\Omega(|z|, k, p, d)$ désigne une fonction indépendante de $\log F(z)$.

THÉORÈME VIII'. — *Dans les conditions du Théorème VIII,* $\log F(z)$ *est majorée par*

$$\varpi(k,\ p,\ d)\Big(B + \sum_{i=0}^{k-1} |c_i|\Big) \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^{\frac{3}{4}}} z^n,$$

$\varpi(k,\ p,\ d)$ *ne dépendant que de* k, p, *et* d.

En considérant (71) (n° 15), on voit que l'on a les corollaires suivants:

COROLLAIRE I. — *Soit* $F(z)$ *une fonction holomorphe dans* $|z| < 1$, *ne prenant pas la valeur zéro et dont la dérivée* $F^{(\nu)}(z)$ *d'ordre* $\nu\ (\nu \geqq 1)$ *est bornée en module par un nombre positif donné* L, *aux points situés dans* $|z| < 1$, *ou* $F(z)$ *prend la valeur un.* $\log F(z)$ *étant une branche quelconque du logarithme de* $F(z)$, *on a, pour* $|z| < 1$,

$$|\log F(z)| < [1 + L^{\frac{1}{\nu}} + |\log F(0)|]\,\Omega(|z|,\ \nu).$$

$\Omega(|z|,\ \nu)$ *désigne une fonction indépendante de* $\log F(z)$.

COROLLAIRE I'. — *Dans les conditions du Corollaire I,* $\log F(z)$ *est majorée par*

$$\varpi_\nu\big(1 + L^{\frac{1}{\nu}} + |\log F(0)|\big) \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^{\frac{3}{4}}} z^n,$$

ϖ_ν *ne dépendant que de* ν.

18. L'application du Théorème VII, nous donne le suivant:

THÉORÈME IX. — $T(F',\ F'',\ \ldots,\ F^{(\nu)})$ *étant le polynome défini dans le Théorème VIII, et* L *un nombre positif donné, si une famille de fonctions* $F(z)$ *holomorphes dans un domaine* (D) *fini et simplement connexe, ne s'annulent pas dans ce domaine, et si chaque fonction* $F(z)$ *de la famille possède la propriété qu'aux points de* (D), *sauf peut-être en* $k - 1$ *points, où* $F(z)$ *prend la valeur un, on a*

$$|T(F',\ F'',\ \ldots,\ F^{(\nu)})| < L,$$

la famille $\log F(z)$ *est quasi-normale d'ordre* $k - 1$ *au plus dans* (D), $\log F(z)$ *étant une branche quelconque du logarithme de* $F(z)$.

Si $k = 1$, la famille $\log F(z)$ ainsi que la famille $F(z)$ sont normales dans (D) et nous sommes dans un cas déjà traité par M. VALIRON [11, *e*, *f*]. Si $k > 1$, les exemples considérés dans le n° 13, montrent que la famille $F(z)$ peut être ni normale, ni quasi-normale dans (D).

CHAPITRE III.

Étude de cas particuliers.

19. Considérons dans le cercle $|z| < 1$, $\nu + 1$ fonctions holomorphes données $a_i(z)$ $(i = 0, 1, \ldots, \nu)$, où $a_0(z)$ ne s'annule pas dans ce cercle, et soit $F(z)$ une fonction holomorphe ne s'annulant pas dans $|z| < 1$, où l'équation

$$a_0(z)F^{(\nu)}(z) + a_1(z)F^{(\nu-1)}(z) + \cdots + a_{\nu-1}(z)F'(z) + a_\nu(z)F(z) = 1$$

n'a pas de racines. Nous nous proposons de chercher une limitation de $|F(z)|$. Ce problème peut être traité par les méthodes employées dans le chapitre précédent, comme l'a montré M. VALIRON [11, *e*]. Nous allons étudier ce problème par une méthode donnée par M. MIRANDA [6], qui permet de parvenir à une limitation de $|F(z)|$ plus précise, et nous améliorons cette limitation de $|F(z)|$, par les méthodes données par M. MILLOUX [5].

20. Rappelons d'abord quelques formules de M. NEVANLINNA [8]. $F(z)$ étant une fonction holomorphe dans $|z| < 1$, $M(r, F)$ son module maximum pour $|z| = r$, et $m(r, F)$ sa fonction caractéristique, on a pour $0 < r < R < 1$,

$$\log|F(re^{i\theta})| \leqq \frac{R+r}{R-r}m(R, F) - \frac{R-r}{R+r}m\left(R, \frac{1}{F}\right), \tag{75}$$

d'où il résulte en particulier que

$$\log M(r, F) \leqq \frac{R+r}{R-r}m(R, F). \tag{76}$$

Si $F(z)$ ne s'annule pas dans $|z| < 1$, on a

$$m\left(r, \frac{F^{(p)}}{F}\right) \leqq A_p + B_p \log\frac{1}{R-r} + C_p \overset{+}{\log} V(R, F), \tag{77}$$

A_p, B_p, C_p ne dépendant que de p, où

$$\left\{\begin{aligned} &V(R, F) = m(R, F) + m\left(R, \frac{1}{F}\right), \\ &V(R, F) = 2m(R, F) - \log|F(0)| = 2m\left(R, \frac{1}{F}\right) + \log|F(0)|. \end{aligned}\right. \tag{78}$$

Ces formules se déduisent de théorèmes de M. NEVANLINNA. Dans la suite, nous avons besoin d'un théorème de M. Borel, précisé par M. Bureau, sous la forme suivante [3]:

Si $U(r)$ est une fonction réelle positive non décroissante pour $0 < r < 1$ et si

$$U(r) \leqq \sigma + \sigma_1 \log \frac{1}{R-r} + \sigma_2 \overset{+}{\log}\, U(R),$$

avec

$$r_0 < r < R < 1, \qquad \sigma \geqq 0, \qquad \sigma_1 \geqq 2\sigma_2 > 8,$$

on a

$$U(r) \leqq \sigma(\sigma_2 + 1) + \sigma_1(\sigma_2 + 3) \log \frac{1}{R-r},$$

pour

$$1 > R > r > r_0, \qquad r > 1 - \frac{1}{\sigma_2}.$$

Nous appelerons ce théorème, lemme de Bureau.

21. Nous allons considérer, avec M. Miranda, plusieurs cas préliminaires, et démontrer les lemmes suivants:

Lemme 1. — *Soient dans le cercle $|z| < 1$, $\nu + 1$ $(\nu \geqq 0)$ fonctions holomorphes données $a_i(z)$ $(i = 0, 1, \ldots, \nu)$, où $a_0(z)$ ne s'annule pas, et $F(z)$ une fonction holomorphe ne s'annulant pas dans ce cercle. Si dans $|z| < 1$,*

$$\left|\sum_{i=0}^{\nu} a_i(z) F^{(\nu-i)}(z)\right| \leqq 1,$$

on a pour $0 < r < R < 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$,

$$(79)\quad \left|\log|F(re^{i\theta})|\right| < \frac{1}{R-r}\left[c_1\left|\log|F(0)|\right| + c_2 \overset{+}{\log} M\left(R, \frac{1}{a_0}\right) + c_3 \sum_{i=0}^{\nu} M\left(R, \frac{a_i}{a_0}\right) \log \frac{2}{R-r}\right],$$

c_1, c_2, c_3 ne dépendant que de ν.

Considérons l'équation différentielle

$$\sum_{i=0}^{\nu} a_i(z) u^{(\nu-i)} = \Phi(z), \qquad \Phi(z) \equiv \sum_{i=0}^{\nu} a_i(z) F^{(\nu-i)}(z),$$

et soient $u_j(z)$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ le système fondamental d'intégrales de l'équation sans second membre, vérifiant les conditions initiales $u_j^{(j-1)}(0) = 1$, et $u_j^{(h)}(0) = 0$, si $h \neq j - 1$ $(h = 0, 1, \ldots, \nu - 1)$. Soient $\Delta(z)$ le déterminant de Wronski des $u_j(z)$, et $\Delta_j(z)$ le mineur de $u_j^{(\nu-1)}(z)$ dans $\Delta(z)$. Posons

$$\psi(z) = \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j(z) u_j(z), \qquad \lambda_j(z) = \int_0^z \frac{\Phi(z)\Delta_j(z)}{a_0(z)\Delta(z)}\, dz.$$

On a

$$F(z) = \psi(z) + \sum_{j=1}^{\nu} d_j u_j(z), \qquad d_j = F^{(j-1)}(0) - \psi^{(j-1)}(0),$$

(voir par exemple GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique* t. II, 5e édition). On déduit de cette relation, que

$$(80) \qquad \begin{cases} m(r, F) \leqq \overset{+}{\log}|F(0)| + \sum_{p=1}^{\nu-1} \overset{+}{\log}\left|\dfrac{F^{(p)}(0)}{F(0)}\right| + \sum_{p=1}^{\nu-1} \overset{+}{\log}|\psi^{(p)}(0)| \\ \qquad + m(r, \psi) + 2\sum_{j=1}^{\nu} m(r, u_j) + \log 3\nu^2. \end{cases}$$

On a d'après (77),

$$\overset{+}{\log}\left|\frac{F^{(p)}(0)}{F(0)}\right| \leqq A_p + B_p \log\frac{1}{R-r} + C_p V(R, F).$$

En supposant que $r \geqq 1/2$, on a

$$\overset{+}{\log}|\psi^{(p)}(0)| \leqq \overset{+}{\log} M(r, \psi) + \log 2^p p!\,.$$

D'autre part, comme par hypothèse, $|\Phi(z)| \leqq 1$, on voit sans peine que, $E(r)$ étant le plus grand des nombres

$$\overset{+}{\log} M\left(r, \frac{1}{a_0}\right), \qquad \overset{+}{\log} M\left(r, \frac{1}{\Delta}\right), \qquad \overset{+}{\log} M(r, u_j^{(h)}), \quad (j=1, 2, \ldots, \nu;\ h=0, 1, \ldots, \nu-1),$$

$\overset{+}{\log} M(r, \psi)$ ainsi que les trois derniers termes dans (80) sont inférieurs à $CE(r) + C'$, C et C' ne dépendant que de ν. Donc, eu égard à (80),

$$m(r, F) < \overset{+}{\log}|F(0)| + \alpha_1 + \alpha_2 E(r) + \alpha_3 \log\frac{1}{R-r} + \alpha_4 \overset{+}{\log} V(R, F),$$

pour $1/2 \leqq r < R < 1$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ne dépendant que de ν [3]). Il suit de ceci et de (78), que

$$V(r, F) < \big|\log|F(0)|\big| + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 E(r) + 2\alpha_3 \log\frac{1}{R-r} + 2\alpha_4 \overset{+}{\log} V(R, F).$$

---

[3]) Nous désignerons par $\alpha, \alpha', \ldots, \beta, \beta', \ldots$ des nombres ne dépendant que de ν.

À partir de cette inégalité et en appliquant le lemme de BUREAU, on trouve que

$$(81)\qquad V(r,\ F) < \alpha'_1 + \alpha'_2 \left|\log |F(0)|\right| + \alpha'_3 E(R) + \alpha'_4 \log \frac{1}{R-r},$$

pour $r_0 < r < R < 1$, r_0 ne dépendant que de ν. Ceci fournit des bornes de $m(r,\ F)$ et de $m\left(r,\ \frac{1}{F}\right)$. En remplaçant dans (81), r par $r + \frac{1}{2}(R - r)$ et dans (76), R par la même valeur, on obtient des bornes de $\log M(r,\ F)$, et de $\log M\left(r,\ \frac{1}{F}\right)$. Il en résulte que

$$(82)\qquad \left|\log |F(re^{i\theta})|\right| < \frac{1}{R-r}\left[\alpha''_1 + \alpha''_2 \left|\log |F(0)|\right| + \alpha''_3 E(R) + \alpha''_4 \log \frac{1}{R-r}\right],$$

pour $r_0 < r < R < 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$.

La fonction $E(r)$ peut être limitée au moyen des fonctions $a_i(z)$. D'après les conditions initiales que vérifient les intégrales $u_j(z)$, on a d'abord

$$\Delta(z) = e^{-\int_0^z \frac{a_1(z)}{a_0(z)}dz},$$

$$\overset{+}{\log} M\left(r,\ \frac{1}{\Delta}\right) < M\left(r,\ \frac{a_1}{a_0}\right).$$

D'autre part, on sait que les fonctions $u_j^{(h)}(z)$ admettent une fonction majorante. En posant

$$C(r) = \sum_{i=0}^{\nu} M\left(r,\ \frac{a_i}{a_0}\right),$$

on a

$$M(r,\ u_j^{(h)}) \leqq 1 - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu}\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-\nu R C(R)},$$

$$\overset{+}{\log} M(r,\ u_j^{(h)}) < \nu\, C(R) \log \frac{1}{R-r} + \log 2.$$

Ces inégalités fournissent de suite une limitation de $E(r)$. Il est ainsi aisé de voir, eu égard à (82), que (79) est au moins vraie pour $r_0 < r < R < 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$. Pour compléter la démonstration, posons $z = R\zeta$, et soit $G(\zeta)$ la fonction correspondant à $F(z)$. D'après ce qui vient être établi, $G(\zeta)$ vérifie une inégalité (I) analogue à (79), pour $r_0 < r' < R' < 1$, $0 \leqq \theta' < 2\pi$. Dans (I), on peut faire $R' = 1$ et en modifiant les constantes c_1, c_2, c_3, (I) est encore valable pour $0 < r' < 1$, $0 \leqq \theta' < 2\pi$.

En prenant en particulier $r' = r/R$, on voit que (79) est vraie pour $0 < r < R < 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$, ce qui complète la démonstration du Lemme 1.

LEMME 2. — *Soient dans le cercle* $|z| < 1$, $\nu + 1$ $(\nu \geqq 0)$ *fonctions holomorphes données* $a_i(z)$ $(i = 0, 1, \ldots, \nu)$, *où* $a_0(z)$ *ne s'annule pas, et* $F(z)$ *une fonction holomorphe ne s'annulant pas dans ce cercle. Si dans* $|z| < 1$,

$$\left|\sum_{i=0}^{\nu} a_i(z) F^{(\nu-i)}(z)\right| \geqq 1$$

on a pour $0 < r < R < 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$,

$$(83)\quad \left|\log|F(re^{i\theta})|\right| < \frac{1}{R-r}\left[c_1\left|\log|F(0)|\right| + c_2 \overset{+}{\log} M(R, a_0) + c_3 \sum_{i=0}^{\nu} M\left(R, \frac{a_i}{a_0}\right) \log\frac{2}{R-r}\right],$$

c_1, c_2, c_3 *ne dépendant que de* ν.

$\Phi(z)$ étant définie dans la démonstration du lemme précédent, on a

$$m\left(r, \frac{1}{F}\right) \leqq m\left(r, \frac{\Phi}{F}\right),$$

et, eu égard à (77) et à (78), on trouve que

$$V(r, F) < \log|F(0)| + \beta_1 + \beta_2 E'(r) + \beta_3 \log\frac{1}{R-r} + \beta_4 \overset{+}{\log} V(R, F),$$

où

$$E'(r) = \sum_{i=0}^{\nu} m(r, a_i).$$

En appliquant le lemme de BUREAU, et en observant que

$$m(r, a_i) \leqq \overset{+}{\log} M(r, a_0) + \overset{+}{\log} M\left(r, \frac{a_i}{a_0}\right),$$

on voit comme dans la démonstration du lemme précédent que (83) est vérifiée pour $r_0 < r < R < 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$. La démonstration se complète en considérant la fonction $F(R\zeta)$, la seule différence étant que, ici, dans l'inégalité que vérifie la fonction $F(R\zeta)$, on a un terme $c_2 \nu \log\frac{1}{R}$; ce terme peut se grouper avec le dernier terme de (83), en observant que $\log\frac{1}{R} < \log\frac{1}{R-r}$.

LEMME 3. — *Soient dans le cercle* $|z| < 1$, $\nu + 1$ $(\nu \geqq 0)$ *fonctions holomorphes données* $a_i(z)$ $(i = 0, 1, \ldots, \nu)$, *où* $a_0(z)$ *ne s'annule pas, et* $F(z)$ *une fonction ho-*

lomorphe ne s'annulant pas dans ce cercle. Posons

$$A(r) = \overset{+}{\log} M(r,\ a_0) + \overset{+}{\log} M\left(r,\ \frac{1}{a_0}\right), \qquad A'(r) = 1 + \sum_{i=1}^{\nu} M\left(r,\ \frac{a_i}{a_0}\right).$$

Si dans $|z| < 1$,

$$\left|\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z) - 1}\right| \leqq 1, \qquad \Phi(z) \equiv \sum_{i=0}^{\nu} a_i(z) F^{(\nu-i)}(z),$$

on a pour $0 < r < R < 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$,

$$(84) \qquad \left|\log|F(re^{i\theta})|\right| < \frac{1}{R-r}\left[c_1\left|\log|F(0)|\right| + c_2 A(R) + c_3 A'(R) \log\frac{2}{R-r}\right],$$

c_1, c_2, c_3 *ne dépendant que de* ν.

Si $|\Phi(z)| \geqq 1$, pour $|z| < R$, il suffit d'appliquer le Lemme 2 à la fonction $F(R\zeta)$, et (84) se déduit de (83). Au contraire, supposons que l'on ait $|\Phi(z_0)| < 1$, $|z_0| < R$. Alors dans $|z| < R$,

$$|\Phi(z) - 1| < e^2 |\Phi(z_0) - 1|,$$
$$|\Phi(z)| < 1 + 2e^2,$$

et il suffit d'appliquer le Lemme 1 à la fonction $F(R\zeta)/(1 + 2e^2)$.

22. Établissons maintenant le théorème suivant qui est une généralisation d'un théorème de M. Valiron [11, *e*]:

Théorème X. — *Soient dans le cercle* $|z| < 1$, $\nu + 1$ $(\nu \geqq 0)$ *fonctions holomorphes données* $a_i(z)$ $(i = 0, 1, \ldots, \nu)$, *où* $a_0(z)$ *ne s'annule pas, et* $F(z)$ *une fonction holomorphe ne s'annulant pas dans ce cercle. Posons*

$$A(r) = \overset{+}{\log} M(r,\ a_0) + \overset{+}{\log} M\left(r,\ \frac{1}{a_0}\right), \qquad A'(r) = 1 + \sum_{i=1}^{\nu} M\left(r,\ \frac{a_i}{a_0}\right).$$

Si dans $|z| < 1$, *l'équation*

$$\sum_{i=0}^{\nu} a_i(z) F^{(\nu-i)}(z) = 1$$

n'a pas de racines, on a pour $0 < r < R < 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$,

$$(85) \qquad \left|\log|F(re^{i\theta})|\right| < \frac{1}{(R-r)^3}\left[c_1\left|\log|F(0)|\right| + c_2 A(R) + c_3 A'(R) \log\frac{2}{R-r}\right],$$

c_1, c_2, c_3 *ne dépendant que de* ν.

D'après les Lemmes 1 et 3, il est loisible de supposer qu'il existe des points z', z'' dans $|z| < R_1$, $R_1 = r + \frac{1}{4}(R - r)$, tels que

$$|\Phi(z')| > 2, \qquad \left|\frac{\Phi'(z'')}{\Phi(z'') - 1}\right| > 1, \tag{86}$$

$\Phi(z)$ étant définie ci-dessus. Posons

$$R_2 = r + \frac{1}{2}(R - r), \qquad R_3 = r + \frac{3}{4}(R - r).$$

On a d'après (75) et (86),

$$m\left(R_2, \frac{\Phi - 1}{\Phi'}\right) < \left(\frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1}\right)^2 m\left(R_2, \frac{\Phi'}{\Phi - 1}\right), \tag{87}$$

$$m\left(R_3, \frac{1}{\Phi - 1}\right) < \left(\frac{R_3 + R_1}{R_3 - R_1}\right)^2 m(R_3, \Phi - 1). \tag{88}$$

Considérons avec M. Bureau, l'identité

$$\frac{1}{F} = \frac{\Phi}{F} - \frac{\Phi - 1}{\Phi'}\frac{\Phi'}{F}.$$

On a

$$m\left(r, \frac{1}{F}\right) < m\left(R_2, \frac{\Phi}{F}\right) + m\left(R_2, \frac{\Phi'}{F}\right) + m\left(R_2, \frac{\Phi - 1}{\Phi'}\right) + \log 2. \tag{89}$$

En désignant par $E''(r)$ le plus grand des nombres

$$m(r, a_i), \qquad m(r, a'_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, \nu),$$

on trouve, eu égard à (77), que les deux premiers termes dans le second membre de (89) sont inférieurs à

$$\alpha_1 + \alpha_2 E''(R_2) + \alpha_3 \log\frac{1}{R - R_2} + \alpha_4 \overset{+}{\log} V(R, F) \tag{90}$$

et que

$$m\left(R_2, \frac{\Phi'}{\Phi - 1}\right) \leqq A_1 + A_2 \log\frac{1}{R_3 - R_2} + A_3 \overset{+}{\log} V(R_3, \Phi - 1).$$

En vertu de (87), et de (88), on a

$$(91)\quad \begin{cases} m\left(R_2, \dfrac{\Phi - 1}{\Phi'}\right) < \left(\dfrac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1}\right)^2 \Bigg[A'_1 + A'_2 \log \dfrac{1}{R_3 - R_2} \\ \qquad\qquad + A'_3 \log \dfrac{1}{R_3 - R_1} + A'_4 \overset{+}{\log}\, m(R_3, \Phi)\Bigg], \end{cases}$$

A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 étant numériques. On a

$$(92)\qquad m(R_3, \Phi) \leqq m(R_3, F) + m\left(R_3, \frac{\Phi}{F}\right),$$

où le dernier terme est inférieur à l'expression obtenue en remplaçant dans (90), R_2 par R_3. (89), (90), (91), (92) et (78) donnent l'inégalité

$$V(r, F) < \log|F(0)| + \frac{1}{(R-r)^2}\left[\alpha'_1 + \alpha'_2 E''(R_3) + \alpha'_3 \log \frac{1}{R-r} + \alpha'_4 \overset{+}{\log}\, V(R, F)\right].$$

Les formules de CAUCHY montrent que

$$E''(R_3) < \log \frac{1}{R - R_3} + \sum_{i=0}^{\nu} \overset{+}{\log}\, M(R, a_i),$$

d'où, on a à fortiori,

$$V(r, F) < \log|F(0)| + \frac{1}{(R-r)^2}\left[\alpha''_1 + \alpha''_2 \sum_{i=0}^{\nu} \overset{+}{\log}\, M(R, a_i) + \alpha''_3 \log \frac{1}{R-r} + \alpha''_4 \overset{+}{\log}\, V(R, F)\right].$$

Cette inégalité est établie en supposant que $\Phi(z)$ vérifie dans $|z| < R_1$, les conditions (86). Si ces conditions ne sont pas toutes vérifiées, le Lemme 1, ou le Lemme 3, suivant les cas, nous fournit une limitation de $\left|\log|F(re^{i\theta})|\right|$, par suite une limitation de $V(r, F)$. On voit que dans tous les cas,

$$(93)\quad V(r, F) < \frac{1}{(R-r)^2}\left[\beta_1 \left|\log|F(0)|\right| + \beta_2 A(R) + \beta_3 A'(R) \log \frac{2}{R-r} + \beta_4 \overset{+}{\log}\, V(R, F)\right],$$

pour $0 < r < R < 1$. En prenant le $\overset{+}{\log}$ des deux membres de cette inégalité, on a une inégalité de la forme

$$\overset{+}{\log}\, V(r, F) < \varphi(R) + 3 \log \frac{1}{R-r} + \overset{+}{\log}\left[\overset{+}{\log}\, V(R, F)\right].$$

L'application du lemme de BUREAU à la fonction $\overset{+}{\log} V(r, F)$, nous donne

$$\overset{+}{\log} V(r, F) < 6\varphi(R) + 80 \log \frac{1}{R - r},$$

pour $4/5 < r < R < 1$. En donnant à r dans cette inégalité, la valeur $R' = r + \frac{R-r}{2}$, et à R dans (93), la même valeur, et en substituant la borne ainsi obtenue de $\overset{+}{\log} V(R', F)$, dans (93), on trouve que

$$V(r, F) < \frac{1}{(R - r)^2}\left[\beta_1' \left|\log |F(0)|\right| + \beta_2' A(R) + \beta_3' A'(R) \log \frac{2}{R - r}\right],$$

pour $4/5 < r < R < 1$. Cette inégalité et (76) montrent que (85) est au moins vraie pour $4/5 < r < R < 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$. La démonstration est complétée, en considérant la fonction $F(R\zeta)$. Le théorème est établi.

23. On peut passer de ce théorème à un énoncé analogue à la forme classique du théorème de SCHOTTKY. En effet, si $|F(0)| \geqq 1$, il découle de (85) que

$$(94) \quad \log |F(re^{i\theta})| < \frac{1}{(R - r)^3}\left[c_1 \overset{+}{\log} |F(0)| + c_2 A(R) + c_3 A'(R) \log \frac{2}{R - r}\right].$$

Supposons que $|F(0)| < 1$, et soit μ un rayon quelconque du cercle $|z| = r$. Si $|F(z)|$ n'est pas toujours inférieur à 1 sur μ, alors en traçant μ à partir de l'origine, on arrive à un premier point z_0 où $|F(z_0)| = 1$. En appliquant (94) à la fonction $F[z_0 + \zeta(R - |z_0|)]$, on voit que cette inégalité subsiste lorsque $|F(0)| < 1$. On a donc le théorème suivant:

THÉORÈME X'. — *Dans les conditions du Théorème X, on a pour* $0 < r < R < 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$,

$$(95) \quad \log |F(re^{i\theta})| < \frac{1}{(R - r)^3}\left[c_1 \overset{+}{\log} |F(0)| + c_2 A(R) + c_3 A'(R) \log \frac{2}{R - r}\right],$$

c_1, c_2, c_3 *ne dépendant que de* ν.

Observons que $1/F(z)$ vérifie une inégalité analogue.

24. À partir de ce théorème, on peut établir la proposition suivante qui est une généralisation d'un théorème de M. MIRANDA [6]:

THÉORÈME XI. — *Soient dans un domaine* (D), $\nu + 1$ $(\nu \geqq 0)$ *fonctions holomorphes données* $a_i(z)$ $(i = 0, 1, \ldots, \nu)$, *non toutes identiquement nulles et* $u(z)$, $v(z)$

deux fonctions données holomorphes dans ce domaine, telles que

$$\sum_{i=0}^{\nu} a_i(z)\, u^{(\nu-i)}(z) \not\equiv v(z).$$

Une famille de fonctions $F(z)$ holomorphes dans (D), où $F(z) - u(z)$ ne s'annule pas et où l'équation

$$\sum_{i=0}^{\nu} a_i(z)\, F^{(\nu-i)}(z) = v(z)$$

n'a pas de racines, est normale dans (D).

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $a_0(z) \not\equiv 0$. Posons

$$G(z) = F(z) - u(z).$$

Il suffit de montrer que la famille $G(z)$ est quasi-normale dans (D), car $G(z)$ ne s'annule pas. Soit z_0 un point quelconque de (D), distinct d'un zéro de $a_0(z)$ et d'un zéro de

$$\varphi(z) = v(z) - \sum_{i=0}^{\nu} a_i(z)\, u^{(\nu-i)}(z).$$

Au voisinage de z_0, $a_0(z)$ et $\varphi(z)$ ne s'annulent pas et l'équation

$$\sum_{i=0}^{\nu} \frac{a_i(z)}{\varphi(z)}\, G^{(\nu-i)}(z) = 1$$

n'a pas de racines. On sait que dans ce cas, on peut établir à partir du Théorème X′, que la famille $G(z)$ est normale en z_0 [11, *e*]. Donc la famille $G(z)$ est quasi-normale dans (D).

25. Les méthodes de M. Milloux nous permettent d'améliorer la limitation de $|F(z)|$, obtenue plus haut. M. Milloux appelle pseudo-distance de deux points z', z'' dans $|z| < 1$, la quantité

$$(z', z'') = \left| \frac{z'' - z'}{1 - z''\bar{z}'} \right|.$$

Si l'un des points z', et z'' coïncide avec l'origine, la pseudo-distance se réduit à la distance euclidienne. Une propriété de (z', z'') est qu'elle ne change pas, lorsqu'on fait une transformation homographique du cercle unité sur lui-même. z' étant fixé, le lieu des points intérieurs au cercle unité, dont la pseudo-distance à z' est égale à une constante ρ, est un cercle; z' s'appelle son centre non euclidien et ρ son pseudo-rayon. Rappelons d'autre part, un théorème de M. Milloux, précisé par M. Schmidt [10], sous la forme suivante:

Soit $F(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité, et de module inférieur à 1. On suppose le module de $F(z)$ inférieur à m sur un arc de courbe issu de l'origine et gagnant la frontière du cercle. Alors dans le cercle $|z| = r$, on a l'inégalité

$$\log |F(z)| < \frac{1}{\pi}(1 - r) \log m.$$

Cela posé, considérons l'inégalité (95). En y posant $r = 1/2$ et $R = 2/3$, on a

$$\log |F(z)| < c_1' \overset{+}{\log} |F(0)| + c_2' A\left(\frac{2}{3}\right) + c_3' A'\left(\frac{2}{3}\right), \tag{96}$$

pour $|z| \leqq 1/2$. Soit z_0 un point dans $|z| < 1$, et soit (c) le cercle de centre non euclidien z_0 et de pseudo-rayon $1/2$. Nous allons chercher d'abord une limitation de $|F(z)|$ dans (c). En faisant la transformation

$$z = \frac{\zeta + z_0}{1 + \zeta \bar{z}_0},$$

(c) se transforme en $|\zeta| = 1/2$, $F(z)$ en $G(\zeta)$, et l'expression

$$\sum_{i=0}^{\nu} a_i(z) F^{(\nu-i)}(z)$$

en

$$\sum_{i=0}^{\nu} b_i(\zeta) G^{(\nu-i)}(\zeta).$$

Pour obtenir $b_i(\zeta)$, il suffit d'observer que ces deux expressions sont identiques, quelle que soit la fonction $F(z)$. En posant successivement

$$F(z) = \left(\frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}\right)^j = \zeta^j \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu - 1),$$

et en faisant les calculs, on constate que $b_{\nu-j}(\zeta)$ est une expression de la forme

$$b_{\nu-j} = \frac{\lambda_{j1} a_{\nu-1} + \lambda_{j2} a_{\nu-2} + \cdots + \lambda_{j\nu} a_0}{(1 - |z_0|^2)^\nu} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu - 1),$$

où les fonctions λ sont inférieures en module à des nombres ne dépendant que de ν. On a d'autre part,

$$b_\nu = a_\nu, \qquad b_0 = \frac{(1 + \zeta \bar{z}_0)^{2\nu}}{(1 - |z_0|^2)^\nu} a_0.$$

Appliquons (96) à $G(\zeta)$. En supposant que les fonctions $a_i(z)$ soient holomorphes pour $|z| \leqq 1$, et en observant que dans $|\zeta| \leqq 2/3$, $|1 + \zeta \bar{z}_0|$ est compris entre des limites numériques, on trouve que

$$\log |G(\zeta)| < c''_1 \overset{+}{\log} |G(0)| + c''_2 \left[A(1) + \nu \log \frac{1}{1 - |z_0|} \right] + c''_3 A'(1),$$

pour $|\zeta| \leqq 1/2$, c'est à dire que, dans (c),

$$(97) \qquad \log |F(z)| < c''_1 \overset{+}{\log} |F(z_0)| + c''_2 \left[A(1) + \nu \log \frac{1}{1 - |z_0|} \right] + c''_3 A'(1),$$

c''_1, c''_2, c''_3 ne dépendant que de ν.

Soit r un nombre compris entre $1/2$ et 1, et soit M le maximum de $|F(z)|$ pour $|z| = r$. $|F(z)|$ atteint son maximum en au moins un point z' sur $|z| = r$. Suivant la méthode de M. Milloux, considérons le plus grand cercle de centre non euclidien z' à l'intérieur duquel on a

$$\log |\Psi(z)| < -\Omega, \qquad F(z)\Psi(z) = 1,$$

Ω étant un nombre positif convenablement choisi, et considérons sur ce cercle, un point z_0 où $\log |\Psi(z)|$ soit égal à $-\Omega$. Comme $|z_0|$ intervient dans (97), il importe de connaitre une borne supérieure de $|z_0|$. En faisant au besoin une rotation, nous supposons que $z' = r$. Nous choisissons pour Ω, la quantité obtenue dans le second membre de (96), lorsqu'on y remplace $A\left(\frac{2}{3}\right)$ et $A'\left(\frac{2}{3}\right)$ par $A(1)$ et $A'(1)$:

$$\Omega = c'_1 \overset{+}{\log} |F(0)| + c'_2 A(1) + c'_3 A'(1).$$

On a $\log |\Psi(z)| > -\Omega$ dans $|z| \leqq 1/2$. Si $\log |\Psi(r)| \geqq -\Omega$, on a déjà une limitation de $\log |F(z)|$ dans $|z| \leqq r$; supposons donc que $\log |\Psi(r)| < -\Omega$. Il existe, par suite, des points dans $|z| \leqq r$, où $\log |\Psi(z)| = -\Omega$. Soit δ le minimum de la pseudo-distance d'un point quelconque de cet ensemble de points, au point r. Pour au moins un point z_0 de cet ensemble, on a $(z_0, r) = \delta$ et $\log |\Psi(z_0)| = -\Omega$. Évidemment

$$\delta < \frac{r - \frac{1}{2}}{1 - \frac{r}{2}},$$

d'où

$$1 - \delta > \frac{3}{2}(1 - r).$$

Considérons le cercle (σ) de centre non euclidien r et de pseudo-rayon δ. Il peut arriver qu'il existe dans (σ), des points où $\log|\Psi(z)| = -\Omega$. Dans ce cas, soit δ' la pseudo-distance minimum de cet ensemble au point r et soit (σ') le cercle de centre non euclidien r et de pseudo-rayon δ'. Dans l'intérieur du cercle (σ'), on a donc toujours $\log|\Psi(z)| < -\Omega$, et sur sa circonférence, on a au moins un point z'_0 tel que $\log|\Psi(z'_0)| = -\Omega$. Cherchons une borne supérieure de $|z'_0|$. Le cercle (σ') coupe l'axe réel en un point x à la droite de r. On a $|z'_0| \leqq x$. Or,

$$\frac{x-r}{1-xr} < \frac{r-\frac{1}{2}}{1-\frac{r}{2}},$$

ce qui nous donne

$$1 - x > \frac{3}{4}(1-r)^2.$$

Donc, on a toujours un cercle (σ) de centre non euclidien r, et de pseudo-rayon δ, tel que dans l'intérieur de (σ),

$$\log|\Psi(z)| < -\Omega, \tag{98}$$

en un point z_0 sur la circonférence de (σ),

$$\log|\Psi(z_0)| = -\Omega, \tag{99}$$

et l'on a

$$1-\delta > \frac{3}{2}(1-r), \qquad 1-|z_0| > \frac{3}{4}(1-r)^2. \tag{100}$$

Si $\delta \leqq 1/2$, (97) fournit une limitation de $\log|F(z)|$ dans $|z| \leqq r$. Supposons que $\delta > 1/2$. La transformation

$$z = \frac{\zeta + r}{1 + \zeta r}$$

transforme le cercle (σ) en $|\zeta| = \delta$, et $\Psi(z)$ en $\Psi_1(\zeta)$. $|\Psi_1(\zeta)|$ étant égal à $1/M$ à l'origine, et ne s'annulant pas dans $|\zeta| < 1$, il existe un arc de courbe issu de l'origine et gagnant la frontière du cercle, sur lequel $|\Psi_1(\zeta)|$ est inférieur à $1/M$. Eu égard à (98) on peut appliquer le théorème de M. Milloux à la fonction $\Psi_1(\delta\zeta')e^{\Omega}$ avec $m = e^{\Omega}/M$. En y prenant $r = \lambda$, on a

$$\log|\Psi_1(\zeta)| < -\left[1 - \frac{1-\lambda}{\pi}\right]\Omega - \frac{1-\lambda}{\pi}\log M < -\frac{1-\lambda}{\pi}\log M,$$

pour $|\zeta| \leqq \lambda\delta$. Soient ζ_0 l'homologue de z_0, et ζ_1 le point le plus proche de ζ_0, sur $|\zeta| = \lambda\delta$. En choisissant λ tel que la pseudo-distance (ζ_0, ζ_1) soit égale à $1/2$, alors $1 - \lambda > 1 - \delta$, et on a eu égard à (100),

$$\log|\Psi_1(\zeta)| < -\frac{3(1-r)}{2\pi}\log M.$$

z_1 étant l'homologue de ζ_1, on a en particulier

$$\log|F(z_1)| > \frac{3(1-r)}{2\pi}\log M. \tag{101}$$

D'autre part, la pseudo-distance (z_0, z_1) étant égale à $1/2$, on a d'après (97), (99) et (100),

$$\log|F(z_1)| < c_1''' \overset{+}{\log}|F(0)| + c_2'''\left[A(1) + \nu\log\frac{1}{1-r}\right] + c_3''' A'(1). \tag{102}$$

Comparant (101) et (102), il en résulte que

$$\log|F(z)| < \frac{1}{1-r}\left[c_1 \overset{+}{\log}|F(0)| + c_2\left\{A(1) + \nu\log\frac{1}{1-r}\right\} + c_3 A'(1)\right],$$

pour $|z| \leqq r$, c_1, c_2, c_3 ne dépendant que de ν. On a supposé que les fonctions $a_\nu(z)$ soient holomorphes pour $|z| \leqq 1$. Pour passer au cas général, il suffit d'appliquer ce résultat à la fonction $F(R\zeta)$. On voit que l'on a en général,

$$\log|F(re^{i\theta})| < \frac{1}{R-r}\left[c_1 \overset{+}{\log}|F(0)| + c_2\left\{A(R) + \nu\log\frac{1}{R-r}\right\} + c_3 A'(R)\right],$$

pour $0 < r < R < 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$. D'une manière analogue, on voit que l'on a

$$\log\frac{1}{|F(re^{i\theta})|} < \frac{1}{R-r}\left[c_1 \overset{+}{\log}\frac{1}{|F(0)|} + c_2\left\{A(R) + \nu\log\frac{1}{R-r}\right\} + c_3 A'(R)\right],$$

pour $0 < r < R < 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$. On a donc enfin le théorème suivant:

THÉORÈME XII. — *Dans les conditions du Théorème X, on a pour* $0 < r < R < 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$,

$$\left|\log|F(re^{i\theta})|\right| < \frac{1}{R-r}\left[c_1\left|\log|F(0)|\right| + c_2\left\{A(R) + \nu\log\frac{1}{R-r}\right\} + c_3 A'(R)\right],$$

c_1, c_2, c_3 *ne dépendant que de* ν.

THÉORÈME XII'. — *Dans les conditions du Théorème X, on a pour* $0 < r < R < 1$,

$0 \leqq \theta < 2\pi,$

$$\log |F(re^{i\theta})| < \frac{1}{R-r}\left[c_1 \overset{+}{\log} |F(0)| + c_2\left\{A(R) + \nu \log \frac{1}{R-r}\right\} + c_3 A'(R)\right],$$

c_1, c_2, c_3 ne dépendant que de ν.

En particulier si $\nu = 0$, $a_0(z) \equiv 1$, on retrouve à des constantes numériques près, le théorème de SCHOTTKY-LANDAU [4].

COROLLAIRE 1. — *Une fonction $F(z)$ holomorphe dans $|z| < 1$, ne prenant pas la valeur zéro et dont la dérivée $F^{(\nu)}(z)$ d'ordre ν ne prend pas la valeur un, vérifie l'inégalité*

$$\left|\log |F(re^{i\theta})|\right| < \frac{1}{1-r}\left(c_0 + c_1\left|\log |F(0)|\right| + c_2 \log \frac{1}{1-r}\right),$$

pour $0 < r < 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$, c_0, c_1, c_2 ne dépendant que de ν.

COROLLAIRE 1'. — *Dans les conditions du Corollaire 1, on a*

$$\log |F(re^{i\theta})| < \frac{1}{1-r}\left(c_0 + c_1 \overset{+}{\log} |F(0)| + c_2 \log \frac{1}{1-r}\right),$$

pour $0 < r < 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$, c_0, c_1, c_2 ne dépendant que de ν [4]).

26. Soient $a_i(z)$ $(i = 0, 1, \ldots, \nu)$ des fonctions données holomorphes dans le cercle $|z| < 1$, où $a_0(z)$ ne s'annule pas, et soit L un nombre positif donné. Considérons une fonction $F(z)$ holomorphe dans $|z| < 1$, ne s'y annulant pas et ayant la propriété qu'aux points situés dans $|z| < 1$, où $F(z)$ prend la valeur un, on a

$$|a_0(z)F^{(\nu)}(z) + a_1(z)F^{(\nu-1)}(z) + \cdots + a_{\nu-1}(z)F'(z) + a_\nu(z)| < L.$$

Les méthodes de M. MILLOUX permettent aussi d'obtenir une limitation assez précise de $|F(z)|$. Pour le montrer, nous allons d'abord établir par les méthodes employées dans le chapitre précédent, la proposition suivante:

THÉORÈME XIII. — *Soient données dans le cercle $|z| < 1$, $\nu + 1$ $(\nu \geqq 1)$ fonctions holomorphes $a_i(z)$ $(i = 0, 1, \ldots, \nu)$, $a_0(z)$ ne s'annulant pas, et soit L un nombre positif donné. Posons*

$$B(r) = 1 + L^{\frac{1}{\nu}} M\left(r, \frac{1}{a_0}\right)^{\frac{1}{\nu}} + \sum_{i=1}^{\nu} M\left(r, \frac{a_i}{a_0}\right)^2.$$

4) M. MILLOUX a donné récemment des théorèmes analogues, sous des conditions plus larges (Comptes Rendus, 206, 1938, p. 1080-1082).

Si $F(z)$ est holomorphe et ne s'annule pas dans $|z| < 1$, et si aux points situés dans $|z| < 1$, où $F(z)$ prend la valeur un, on a

$$\left|\sum_{i=0}^{\nu-1} a_i(z) F^{(\nu-i)}(z) + a_\nu(z)\right| < L, \tag{103}$$

alors, pour $0 < r < R < 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$, on a

$$\left|\log |F(re^{i\theta})|\right| < \left[\left|\log |F(0)|\right| + B(R)\right] \Omega\left(\frac{r}{R}, \nu\right).$$

$\Omega\left(\frac{r}{R}, \nu\right)$ *désigne une fonction indépendante de $F(z)$.*

Ce théorème s'établit d'une manière analogue à celle employée dans les cas traités aux n° 15 et 17. En posant $F = e^f$ et en faisant les calculs, on voit que (103) entraine la condition suivante: Aux points de $|z| < 1$, où $f(z)$ prend une quelconque des valeurs $2i\pi\tau$, τ étant un entier arbitraire, on a

$$|a_0(z)f'(z)^\nu + P[f'(z), f''(z), \ldots, f^{(\nu)}(z)]| < L,$$

P désigne un polynome de degré inférieur à ν, en $f'(z)$, $f''(z)$, $\ldots$, $f^{(\nu)}(z)$, dont les coefficients sont des combinaisons linéaires de $a_i(z)$ avec des coefficients constants. Supposons d'abord que les fonctions $a_i(z)$ soient holomorphes pour $|z| \leqq 1$. En appliquant le Théorème I, pour $k = 1$, à la fonction $f(z)$, on voit comme dans la démonstration du Théorème VI, que

$$M(\alpha, f) < C[|f(0)| + B(1)],$$

α étant le nombre fourni par le Théorème I, C un nombre ne dépendant que de ν, et $B(1)$, la valeur de la fonction $B(r)$ pour $r=1$. Si l'on prend $f(z)=f_1(z)+\log F(0)$, où $f_1(0) = 0$, et où $\log F(0)$ est la détermination réduite, on a donc,

$$\left|\log |F(z)|\right| < C'\left[\left|\log |F(0)|\right| + B(1)\right],$$

pour $|z| \leqq \alpha$. En appliquant ceci, de proche en proche, aux fonctions, $F[z_0 + z(1-\alpha)]$, $|z_0| = \alpha$; $F[z_1 + z(1-\alpha_1)]$, $|z_1| = \alpha_1 = 1 - (1-\alpha)^2$; etc., on trouve que

$$\left|\log |F(z)|\right| < \left[\left|\log |F(0)|\right| + B(1)\right] \Omega(|z|, \nu),$$

pour $|z| < 1$. Enfin on passe au cas où les fonctions $a_i(z)$ sont holomorphes pour $|z| < 1$, en appliquant ce résultat à la fonction $F(R\zeta)$.

Théorème XIII'. — *Dans les conditions du Théorème XIII, on a pour $0<r<R<1$,*

$0 \leqq \theta < 2\pi$,

$$\log |F(re^{i\theta})| < [\overset{+}{\log} |F(0)| + B(R)]\,\Omega\left(\frac{r}{R}, \nu\right).$$

$\Omega\left(\frac{r}{R}, \nu\right)$ *désigne une fonction indépendante de* $F(z)$.

Ceci s'établit de la même manière que ci-dessus. La fonction $1/F(z)$ vérifie une inégalité analogue.

27. Ce théorème fournit un critère de famille normale qui est une généralisation d'un théorème de M. VALIRON [11, *e*, *f*]:

THÉORÈME XIV. — *Soient données dans un domaine* (D), $\nu + 1$ $(\nu \geqq 1)$ *fonctions holomorphes* $a_i(z)$ $(i = 0, 1, \ldots, \nu)$, $a_0(z) \not\equiv 0$, *et soient* L *un nombre positif donné, et* $u(z)$, $v(z)$ *deux fonctions données holomorphes dans ce domaine, telles que* $u(z) \not\equiv v(z)$. *Considérons une famille de fonctions* $F(z)$ *holomorphes dans* (D), *telles que* $F(z) - u(z)$ *ne s'y annulent pas, et telles qu'aux points de* (D), *où* $F(z) = v(z)$, *on ait*

$$\left|\sum_{i=0}^{\nu-1} a_i(z) F^{(\nu-i)}(z) + a_\nu(z)\right| < L.$$

Dans ces conditions, la famille $F(z)$ *est normale dans* (D).

Posons

$$G(z) = \frac{F(z) - u(z)}{v(z) - u(z)},$$

et soit z_0 un point quelconque de (D), distinct d'un zéro de $a_0(z)$, et d'un zéro de $u(z) - v(z)$. Au voisinage de z_0, $G(z)$ est holomorphe, ne s'annule pas, et a la propriété qu'aux points où $G(z)$ prend la valeur un, on a

$$\left|a_0(z)[v(z) - u(z)]\,G^{(\nu)}(z) + \sum_{i=1}^{\nu-1} b_i(z)\,G^{(\nu-i)}(z) + b_\nu(z)\right| < L,$$

où $b_i(z)$, $b_\nu(z)$ sont des fonctions holomorphes données. D'après le Théorème XIII', on voit que la famille $G(z)$ est normale en z_0. Par suite, la famille $F(z) - u(z)$ est aussi normale en z_0. Donc la famille $F(z) - u(z)$ ainsi que la famille $F(z)$ sont normales partout dans (D).

28. À partir du Théorème XIII', on peut améliorer la limitation de $|F(z)|$ par la méthode de M. MILLOUX, sans aucun changement dans la démonstration. Mais observons que dans ce cas, le terme $\nu \log \frac{1}{R - r}$ n'entre pas dans le résultat final. On voit que l'on a les théorèmes suivants:

THÉORÈME XV. — *Dans les conditions du Théorème XIII, on a pour* $0 < r < R < 1$,

$0 \leqq \theta < 2\pi$,

$$\left|\log|F(re^{i\theta})|\right| < \frac{1}{R-r}\left[c_1\left|\log|F(0)|\right| + c_2 B(R)\right],$$

c_1, c_2 ne dépendant que de ν.

THÉORÈME XV'. — *Dans les conditions du Théorème XIII, on a pour $0<r<R<1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$,*

$$\log|F(re^{i\theta})| < \frac{1}{R-r}[c_1 \overset{+}{\log}|F(0)| + c_2 B(R)],$$

c_1, c_2 ne dépendant que de ν.

COROLLAIRE 1. — *Une fonction $F(z)$ holomorphe dans $|z| < 1$, ne prenant pas la valeur zéro et dont la dérivée $F^{(\nu)}(z)$ d'ordre $\nu(\nu \geqq 1)$ est bornée en module par un nombre positif donné L, aux points situés dans $|z| < 1$, ou $F(z)$ prend la valeur un, vérifie l'inégalité*

$$\left|\log|F(re^{i\theta})|\right| < \frac{1}{1-r}\left[c_0 + c_1\left|\log|F(0)|\right| + c_2 L^{\frac{1}{\nu}}\right],$$

pour $0 < r < 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$, c_0, c_1, c_2 ne dépendant que de ν.

COROLLAIRE 1'. — *Dans les conditions du Corollaire 1, on a*

$$\log|F(re^{i\theta})| < \frac{1}{1-r}[c_0 + c_1 \overset{+}{\log}|F(0)| + c_2 L^{\frac{1}{\nu}}],$$

pour $0 < r < 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$, c_0, c_1, c_2 ne dépendant que de ν.

En particulier pour $\nu = 1$, $L = 0$, on obtient des inégalités que vérifie une fonction $F(z)$ holomorphe dans $|z| < 1$, sans zéros et telle que $F(z) - 1$ n'ait que des zéros multiples. Ces inégalités sont entièrement analogues à celles qui sont fournies par le théorème de SCHOTTKY-LANDAU.

CHAPITRE IV.

Le domaine riemannien couvert par les valeurs d'une fonction holomorphe.

29. Le Théorème I permet d'obtenir certaines extensions de théorèmes de M. BLOCH [2, *a*, *b*] et de M. VALIRON [11, *d*]. En prenant dans ce théorème $S = 4M$, M étant un nombre positif donné, on voit que l'on a l'énoncé suivant:

THÉORÈME XVI. — *Si* $Z=f(z)$ *est une fonction holomorphe dans le cercle* $|z|<1$,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

et si correspondant à toute couronne (Γ) *de centre origine, et d'épaisseur supérieure à* M, *il existe un nombre* $\omega(\Gamma)$ *tel que la fonction inverse de* $f(z)$, *restreinte au cercle* $|z|<1$, *ne possède que* $k-1$ *branches au plus, holomorphes dans* (Γ) *fendue suivant* $\arg Z=\omega(\Gamma)$, $f(z)$ *est majorée par*

$$\mu_k\left(M+\sum_{i=0}^{k-1}|c_i|\right)\sum_{n=0}^{\infty} e^{n^{\frac{3}{4}}} z^n,$$

μ_k *ne dépendant que de* k.

Ce théorème est une généralisation d'un théorème de M. VALIRON [11, *d*].

On déduit de ceci le théorème suivant qui comprend un énoncé de M. BLOCH [2, *b*].

THÉORÈME XVII. — *Si* $Z=f(z)$ *est une fonction holomorphe dans le cercle* $|z|<R$,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \qquad c_k\neq 0,$$

et si R *est plus grand que les nombres*

$$\mu'_k\left(\frac{M}{|c_k|}\right)^{\frac{1}{k}}, \qquad \mu'_k\left(\frac{|c_i|}{|c_k|}\right)^{\frac{1}{k-i}} \qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1),$$

μ'_k *ne dépendant que de* k, *on peut trouver une couronne de centre origine, et d'épaisseur supérieure à* M, *telle que* ω *étant un nombre arbitraire, la fonction inverse de* $f(z)$, *restreinte au cercle* $|z|<R$, *possède au moins* k *branches holomorphes dans cette couronne fendue suivant* $\arg Z=\omega$.

M. VALIRON a donné une proposition analogue plus précise [11, *c*].

L'énoncé XVII découle de XVI. En effet, $f(Rz)$ étant holomorphe dans $|z|<1$, d'après le Théorème XVI, dès que R vérifie la condition

$$R^k|c_k|>\mu_k\left(M+\sum_{i=0}^{k-1}R^i|c_i|\right)e^{k^{\frac{3}{4}}},$$

on peut trouver une couronne vérifiant les conditions énoncées dans le théorème. Cette inégalité est évidemment réalisée, si R vérifie la condition donnée dans le Théorème XVII.

THÉORÈME XVIII. — *Soit* $Z = f(z)$ *une famille de fonctions holomorphes dans un domaine* (D). (Γ) *étant une couronne arbitraire de centre origine, et d'épaisseur supérieure à un nombre positif donné* M *et* $f(z)$ *étant une fonction quelconque de la famille, supposons qu'il existe un nombre* $\omega(\Gamma, f)$ *tel que la fonction inverse de* $f(z)$, *restreinte au domaine* (D) *ne possède que* $k - 1$ *branches au plus holomorphes dans* (Γ) *fendue suivant* $\arg Z = \omega(\Gamma, f)$. *Dans ces conditions, la famille* $f(z)$ *est quasi-normale d'ordre* $k - 1$ *au plus dans* (D).

Soient $f(z)$ une fonction de la famille et (γ) un cercle intérieur à (D), ayant z_0 pour centre et δ pour rayon. La fonction $f(z_0 + \delta z)$ holomorphe dans $|z| < 1$, vérifie les conditions du Théorème XVI. On a donc dans le cercle (γ),

$$|f(z)| < \mu_k \left(M + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\delta^i |f^{(i)}(z_0)|}{i!} \right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^{\frac{3}{4}}} \frac{|z - z_0|^n}{\delta^n} .$$

À partir de cette inégalité, on peut évidemment procéder comme dans la démonstration du Théorème III. On voit que, z_0 étant fixé, $C(z_0, f)$ désignant le maximum des nombres

$$\frac{|f^{(i)}(z_0)|}{i!} \qquad (i = 0, 1, \ldots, k - 1),$$

et $f_n(z)$ étant une suite quelconque de fonctions de la famille $f(z)$, ou bien les nombres $C(z_0, f_n)$ sont bornés, et alors la suite $f_n(z)$ est bornée dans l'intérieur de (D), ou bien $\lim\limits_{n \to \infty} C(z_0, f_n) \to \infty$. Dans ce cas, on peut extraire de la suite

$$\varphi_n(z) = \frac{f_n(z)}{C(z_0, f_n)} ,$$

une autre suite que nous désignons encore par $\varphi_n(z)$, qui converge uniformément dans l'intérieur de (D), vers une fonction holomorphe $\varphi(z)$ non identiquement nulle. Il nous reste à montrer que $\varphi(z)$ n'a que $k - 1$ zéros au plus dans (D).

Supposons que $\varphi(z)$ possède k zéros z_j $(j = 1, 2, \ldots, h)$, intérieurs à (D), z_j étant d'ordre m_j, et $\sum\limits_{j=1}^{h} m_j = k$. Dès que ρ_j est assez petit, on peut écrire dans le cercle $|z - z_j| \leqq \rho_j$,

$$\varphi(z) = a_j (z - z_j)^{m_j} \{1 + \psi_j(z)\}, \qquad a_j \neq 0, \qquad |\psi_j(z)| < \frac{1}{30} .$$

Choisissons les nombres ρ_j $(j = 1, 2, \ldots, h)$ tels que sur chacun des cercles $|z - z_j| = \rho_j$, le module maximum de $\varphi(z)$ ait la même valeur A. Soit ζ_j un point sur $|z - z_j| = \rho_j$, où l'on a $|\varphi(\zeta_j)| = A$. z_j étant un de ces zéros, on peut supposer, en remplaçant au besoin z par $z_j + z$, que z_j est l'origine. On a donc

$$\varphi(z) = a_j z^{m_j}\{1 + \psi_j(z)\}, \qquad a_j \neq 0, \qquad |\psi_j(z)| < \frac{1}{30},$$

pour $|z| \leqq \rho_j$, et $|\varphi(\zeta_j)| = A$. Considérons la couronne

$$(S_j) \qquad e^{-2}\rho_j \leqq |z| \leqq \rho_j$$

dans laquelle on a

$$\varphi(z) = \left(\frac{z}{\zeta_j}\right)^{m_j} \varphi(\zeta_j)\{1 + \lambda_j(z)\}, \qquad |\lambda_j(z)| < \frac{1}{14}.$$

Nous sommes donc dans un cas exactement analogue à celui considéré dans la deuxième partie de la démonstration du Théorème I. On voit que la fonction inverse de $\varphi(z)$, restreinte à $e^{-2}\rho_j < |z| < \rho_j$, possède m_j branches holomorphes dans la couronne

$$(\Sigma) \qquad \frac{1}{4}A < |Z| < \frac{1}{2}A,$$

fendue suivant $\arg Z = \omega$, ω étant arbitraire. Dans (S_j), on peut écrire

$$\varphi_n(z) = \left(\frac{z}{\zeta_j}\right)^{m_j} \varphi(\zeta_j)\{1 + \lambda_j(z, n)\}.$$

Puisque $\varphi_n(z)$ tend uniformément vers $\varphi(z)$, il est évident que

$$|\lambda_j(z, n)| < \frac{1}{10},$$

dès que n dépasse un certain rang. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, la fonction inverse de $\varphi_n(z)$, restreinte à $e^{-2}\rho_j < |z| < \rho_j$, possède m_j branches holomorphes dans (Σ) fendue suivant $\arg Z = \omega$, ω arbitraire. En considérant tous les points z_j $(j = 1, 2, \ldots, h)$, il s'ensuit que dès que n dépasse un certain rang, la fonction inverse de $\varphi_n(z)$, resteinte à (D), possède au moins k branches holomorphes dans (Σ) fendue suivant $\arg Z = \omega$, ω arbitraire. Par suite, la fonction inverse de $f_n(z)$, restreinte à (D), possède au moins k branches holomorphes dans la couronne

$$\frac{1}{4}C(z_0, f_n)A < |Z| < \frac{1}{2}C(z_0, f_n)A,$$

fendue suivant $\arg Z = \omega$, ω arbitraire. Ceci est évidemment contraire à l'hypothèse, car $\lim\limits_{n \to \infty} C(z_0, f_n) = \infty$. Donc $\varphi(z)$ n'a que $k - 1$ zéros au plus intérieurs à (D) et le théorème est établi.

Ce théorème est une généralisation d'un théorème de M. VALIRON [11, *d*], et il comprend un énoncé de M. BLOCH [2, *b*].

30. On peut étendre ces résultats dans le sens du Théorème II, ou du Théorème VI. On a les théorèmes suivants:

THÉORÈME XIX. — *Soient* $\Pi(f, f', \ldots, f^{(k)})$ *et* $P(f, f', \ldots, f^{(p)})$ *les polynomes définis dans le Théorème II, et M, m entier, des nombres positifs donnés. Posons*

$$A = 1 + m + M + \left|\log |a_0|\right| + \sigma \sum_{j=1}^{\sigma} \left|\frac{a_j}{a_0}\right|^2.$$

Soit

$$Z = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

une fonction holomorphe dans $|z| < 1$. *Supposons que à toute couronne* (Γ) *de centre origine et d'épaisseur supérieure à M, corresponde un nombre* $\omega(\Gamma)$ *tel que pour toute branche de la fonction inverse de* $f(z)$, *restreinte à* $|z| < 1$, *holomorphe dans* (Γ) *fendue suivant* $\arg Z = \omega(\Gamma)$, *sauf peut-être pour* $k - 1$ *branches, l'équation*

$$e^f[\Pi(f, f', \ldots, f^{(k)}) + P(f, f', \ldots, f^{(p)})] = 1 \tag{104}$$

n'ait que m racines au plus dans le domaine décrit par cette branche. Alors $f(z)$ *est majorée par*

$$\rho(k, p, d)\left(A + \sum_{i=0}^{k-1} |c_i|\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^{\frac{3}{4}}} z^n,$$

$\rho(k, p, d)$ *ne dépendant que de k, p, et d.*

Prenons dans le Théorème I, $S = CA$, A désignant toujours le nombre défini dans le Théorème XIX, et C étant un nombre qui ne dépend que de k, p, et d, et qui sera bientôt déterminé. Si $f(z)$ n'est pas majorée par

$$\lambda(k)\left(S + \sum_{i=0}^{k-1} |c_i|\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^{\frac{3}{4}}} z^n, \tag{105}$$

la fonction inverse de $f(z)$, restreinte à $|z| < 1$, possède k branches holomorphes dans la couronne

$$\frac{1}{4} M(r, f) < |Z| < \frac{1}{2} M(r, f), \qquad M(r, f) > S, \tag{Γ}$$

fendue suivant $\arg Z = \omega$, ω arbitraire. Dès que $C > 4$, l'épaisseur de cette couronne est supérieure à M. Soit $\omega(\Gamma)$ le nombre correspondant qui existe par hypothèse. Il peut arriver que $\omega(\Gamma)$ ait une des valeurs $\pm \frac{\pi}{2}$. En tous cas, on voit aisément que si

$$M(r, f) > 16(m+1)\pi,$$

la couronne (Γ) fendue suivant $\arg Z = \omega(\Gamma)$ comprend au moins $m+1$ points $2i\pi\tau$ correspondant aux valeurs τ_l $(l = 1, 2, \ldots, m+1)$, τ_l entiers; sur les frontières des domaines $E_i[f, \omega(\Gamma)]$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ décrits par les branches $z = g_i[Z|\omega(\Gamma)]$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ correspondantes de la fonction inverse de $f(z)$, on a

$$|f(z) - 2i\pi\tau| > \frac{1}{16} M(r, f),$$

pour chacune des valeurs τ_l. On peut évidemment procéder comme dans la démonstration du Théorème II, et on voit que si

$$M(r, f) > C' \left[1 + m + \left|\log|a_0|\right| + \sigma \sum_{j=1}^{\sigma} \left| \frac{a_j}{a_0} \right|^2 \right],$$

C' ne dépendant que de k, p, et d, l'équation (104) a plus de m racines dans chacun des domaines $E_i[f, \omega(\Gamma)]$, contrairement à l'hypothèse. Donc, si l'on prend $C = 4 + C'$, $f(z)$ est majorée par (105), ce qui établit le Théorème XIX.

THÉORÈME XX. — *$\Pi(f, f', \ldots, f^{(k)})$, $P(f, f', \ldots, f^{(p)})$, M, et m étant définis comme dans le Théorème XIX, soit $Z = f(z)$ une famille de fonctions holomorphes dans un domaine (D), et jouissant de la propriété suivante. Si (Γ) est une couronne de centre origine, et d'épaisseur supérieure à M, et si $f(z)$ est une fonction de la famille, il existe un nombre $\omega(\Gamma, f)$ tel que pour toute branche de la fonction inverse de $f(z)$, restreinte à (D), holomorphe dans (Γ) fendue suivant $\arg Z = \omega(\Gamma, f)$, sauf peut être pour $k-1$ branches, l'équation*

$$e^f[\Pi(f, f', \ldots, f^{(k)}) + P(f, f', \ldots, f^{(p)})] = 1 \tag{106}$$

n'ait que m racines au plus dans le domaine décrit par cette branche. Alors la famille $f(z)$ est quasi-normale d'ordre $k-1$ au plus dans (D).

Soient $f(z)$ une fonction de la famille et (γ) un cercle intérieur à (D), ayant pour centre z_0 et pour rayon δ. En appliquant le Théorème XIX, à la fonction $f(z_0 + \delta z)$, on voit que l'on a dans (γ),

$$|f(z)| < \rho(k, p, d)\left(A' + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\delta^i |f^{(i)}(z_0)|}{i!}\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^{\frac{3}{4}}} \frac{|z - z_0|^n}{\delta^n},$$

$$A' = 1 + m + M + \left|\log \frac{|a_0|}{\delta^\mu}\right| + \sigma \sum_{j=1}^{\sigma} \frac{1}{\delta^{\mu_j}} \left|\frac{a_j}{a_0}\right|^2,$$

μ et ν_j ne dépendant que des formes de Π et de P. On peut procéder, a partir de cette inégalité, comme dans la démonstration du Théorème III, et on voit qu'il ne nous reste qu'à démontrer ceci: $f_n(z)$ étant une suite de fonctions de la famille $f(z)$,

$$f_n(z) = C(z_0, f_n)\varphi_n(z), \qquad \lim_{n \to \infty} C(z_0, f_n) = \infty,$$

si $\varphi_n(z)$ tend uniformément vers une fonction holomorphe $\varphi(z) \not\equiv 0$, dans l'intérieur de (D), alors $\varphi(z)$ n'a que $k - 1$ zéros au plus dans (D).

Si $\varphi^{(k)}(z) \equiv 0$, ceci est évident. Supposons que $\varphi^{(k)}(z) \not\equiv 0$, et que $\varphi(z)$ ait k zéros z_j $(j = 1, 2, \ldots, h)$ dans (D), z_j étant d'ordre m_j et $\sum_{j=1}^{h} m_j = k$. Dans la démonstration du Théorème XVIII, on a vu que dès que n dépasse un certain rang, la fonction inverse de $\varphi_n(z)$ possède m_j branches holomorphes dans la couronne

$$\frac{1}{4} A < |Z| < \frac{1}{2} A,$$

fendue suivant $\arg Z = \omega$, ω arbitraire, en outre les domaines $E_{ij}(\varphi_n, \omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, m_j)$ décrits par ces branches sont situés dans la couronne

$$e^{-2}\rho_j < |z - z_j| < \rho_j.$$

On peut évidemment choisir ρ_j pour que dans cette couronne, on ait $|\varphi_n^{(l)}(z)| > a$ $(l = 0, 1, \ldots, k)$, $|\varphi_n^{(l)}(z)| < b$ $(l = 0, 1, \ldots, k+1)$, et $|\varphi_n^{(l)}(z)| < b'$ $(l = 0, 1, \ldots, p)$, dès que n dépasse un certain rang, a, b, b' étant des nombres positifs.

Soit z_0 un point du domaine $E_{ij}(\varphi_n, \omega)$, et soit $\log \varphi_n^{(l)}(z)$ $(l \leqq k)$, la branche du logarithme de $\varphi_n^{(l)}(z)$, qui admet en z_0, la détermination réduite. On voit sans peine que dans $E_{ij}(\varphi_n, \omega)$, $|\log \varphi_n^{(l)}(z)|$ est inférieur à un nombre positif B indépendant de n, l, i, j, et ω, pourvu que n dépasse un certain rang. En effet, cette branche est donnée par

$$\log \varphi_n^{(l)}(z_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{\varphi_n^{(l+1)}(z)}{\varphi_n^{(l)}(z)}\, dz,$$

et dans cette intégrale, on peut choisir pour le chemin d'intégration, un arc de courbe d'une longueur inférieure à un nombre positif fixe, décrit par la branche correspondante $z = \varphi_n^{-1}(Z \mid \omega)$ de la fonction inverse de $\varphi_n(z)$.

La fonction inverse de $f_n(z)$, restreinte à (D), possède donc au moins k branches holomorphes dans la couronne

$$\frac{1}{4} C(z_0, f_n) A < |Z| < \frac{1}{2} C(z_0, f_n) A, \tag{107}$$

fendue suivant $\arg Z = \omega$, ω arbitraire, et dans les domaines $E_i(f_n, \omega)$ décrits par ces branches, on a $|f_n^{(l)}(z)| > C(z_0, f_n)a$ $(l = 0, 1, \ldots, k)$, $|f_n^{(l)}(z)| < C(z_0, f_n)b'$ $(l = 0, 1, \ldots, p)$, et

$$|\log f_n^{(l)}(z)| < \log C(z_0, f_n) + B \qquad (l = 0, 1, \ldots, k),$$

$\log f_n^{(l)}(z)$ étant une branche du logarithme de $f_n^{(l)}(z)$, et n étant pris suffisamment grand. Lorsque z décrit la frontière de $E_i(f_n, \omega)$, $f_n(z)$ décrit celle de la couronne fendue (107).

À partir de ces résultats, on peut évidemment procéder comme dans la démonstration du Théorème II. On voit que dès que n dépasse un certain rang, l'équation (106) pour $f_n(z)$ a plus de m racines dans chacun des domaines $E_i(f_n, \omega)$, ce qui est contraire à l'hypothèse, dès que $C(z_0, f_n)A > 4M$. Le Théorème XX est établi.

31. D'une manière analogue, on voit que l'on a les théorèmes suivants:

Théorème. XXI. — *Soient* $\Pi(f, f', \ldots, f^{(k)})$ *et* $P(f, f', \ldots, f^{(p)})$ *les polynomes définis dans le Théorème II, et M, L des nombres positifs donnés. Posons*

$$B = 1 + M + \left(\frac{L}{|a_0|}\right)^{\frac{1}{d}} + \sigma \sum_{j=1}^{\sigma} \left|\frac{a_j}{a_0}\right|^2.$$

Soit

$$Z = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

une fonction holomorphe dans $|z| < 1$. *Supposons que à toute couronne* (Γ) *de centre origine et d'épaisseur supérieure à M, corresponde un nombre* $\omega(\Gamma)$ *tel que pour toute branche de la fonction inverse de* $f(z)$, *restreinte à* $|z| < 1$, *holomorphe dans* (Γ) *fendue suivant* $\arg Z = \omega(\Gamma)$, *sauf peut-être pour* $k - 1$ *branches, on ait*

$$|\Pi(f, f', \ldots, f^{(k)}) + P(f, f', \ldots, f^{(p)})| < L,$$

en un point du domaine décrit par cette branche. Alors $f(z)$ *est majorée par*

$$\varpi(k, p, d)\left(B + \sum_{i=0}^{k-1} |c_i|\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^{\frac{3}{4}}} z^n,$$

$\varpi(k, p, d)$ *ne dépendant que de k, p, et d.*

Théorème XXII. — $\Pi(f, f', \ldots, f^{(k)})$, $P(f, f', \ldots, f^{(p)})$, *M, et L étant définis comme dans le Théorème XXI, soit* $Z = f(z)$ *une famille de fonctions holomorphes dans un domaine (D), et jouissant de la propriété suivante. Si* (Γ) *est une couronne de centre origine et d'épaisseur supérieure à M, et si* $f(z)$ *est une fonction de la famille, il existe un nombre* $\omega(\Gamma, f)$ *tel que pour toute branche de la fonction inverse de* $f(z)$, *restreinte à (D), holomorphe dans* (Γ) *fendue suivant* $\arg Z = \omega(\Gamma, f)$, *sauf peut-être pour* $k - 1$ *branches, on ait*

$$|\Pi(f, f', \ldots, f^{(k)}) + P(f, f', \ldots, f^{(p)})| < L,$$

en un point du domaine décrit par cette branche. Alors la famille $f(z)$ *est quasi-normale d'ordre* $k - 1$ *au plus dans* (D).

Remarque. — Dans les Théorèmes XIX, et XXI, on peut faire varier les coefficients a_0 et a_j $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ de Π et de P avec la couronne (Γ), pourvu que les nombres A et B restent respectivement inférieurs à des nombres positifs donnés A_1 et B_1. Dans ce cas, $f(z)$ est majorée par la série obtenue en remplaçant respectivement A et B par A_1 et B_1 dans la série correspondante. Sous les mêmes conditions, on peut faire varier les coefficients a_0 et a_j $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ dans les Théorèmes XX et XXII, avec la couronne (Γ) et avec la fonction $f(z)$.

32. Ces résultats fournissent des énoncés sur les fonctions $F(z)$ considérées dans les n° 12 et 17. Nous nous bornons à donner les théorèmes suivants:

Théorème XXIII. — *Soient* $F(z)$ *une fonction holomorphe dans* $|z| < 1$, *ne prenant pas la valeur zéro,* $\log F(z)$ *une branche du logarithme de* $F(z)$, $F^{(\nu)}(z)$ $(\nu \geqq 1)$, *la dérivée d'ordre* ν *de* $F(z)$, *et M, m entier des nombres positifs donnés. Si à toute couronne* (Γ) *de centre origine et d'épaisseur supérieure à M, correspond un nombre* $\omega(\Gamma)$ *tel que pour tout domaine (D) situé dans* $|z| < 1$, *et représenté conformément par* $\log F(z)$ *sur* (Γ) *fendue suivant* $\arg Z = \omega(\Gamma)$, $F^{(\nu)}(z)$ *ne prenne que m fois au plus la valeur un dans (D),* $\log F(z)$ *est majorée par*

$$\rho_\nu\left(1 + m + M + |\log F(0)|\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^{\frac{3}{4}}} z^n,$$

ρ_ν *ne dépendant que de* ν.

Théorème XXIV. — *Soient* $F(z)$ *une fonction holomorphe dans* $|z| < 1$, *ne prenant pas la valeur zéro,* $\log F(z)$ *une branche du logarithme de* $F(z)$, $F^{(\nu)}(z)$ $(\nu \geqq 1)$ *la dérivée d'ordre* ν *de* $F(z)$, *et M, L des nombres positifs donnés. Si à toute couronne* (Γ) *de centre origine et d'épaisseur supérieure à M, correspond un nombre* $\omega(\Gamma)$ *tel que pour tout domaine (D) situé dans* $|z| < 1$, *et représenté conformément par* $\log F(z)$ *sur* (Γ) *fendue suivant* $\arg Z = \omega(\Gamma)$, *on ait* $|F^{(\nu)}(z)| < L$, *en un point dans (D), ou* $|F(z)| \geqq 1$, $\log F(z)$ *est majorée par*

$$\varpi_\nu\left(1 + M + L^{\frac{1}{\nu}} + |\log F(0)|\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^{\frac{3}{4}}} z^n,$$

ϖ_ν *ne dépendant que de* ν.

On a aussi des critères correspondants de famille normale.

DEUXIÈME PARTIE.

FAMILLES DE FONCTIONS MÉROMORPHES.

CHAPITRE I.

Critères de famille quasi-normale.

1. Dans ses travaux [1, *a*, *b*, *c*], M. AHLFORS a étudié les domaines dans lesquels une fonction méromorphe prend des valeurs appartenant à une région donnée. $Z = f(z)$ étant une fonction méromorphe dans un cercle $|z| \leqq R$, E une région fermée, finie ou non, dans le plan Z, et Δ les domaines dans $|z| < R$, où $f(z)$ prend des valeurs appartenant à E, M. AHLFORS a classé les domaines Δ en deux espèces différentes: les domaines Δ qui se ferment dans $|z| < R$, et les domaines Δ qui s'étendent jusqu'à la circonférence $|z| = R$. Un domaine Δ se fermant dans $|z| < R$, est un domaine dont tous les points et dont tous les points de la frontière sont des points intérieurs à $|z| < R$. Un domaine Δ qui s'étend jusqu'à la circonférence $|z| = R$ a au moins un point frontière sur $|z| = R$. Dans un domaine Δ se fermant dans $|z| < R$, les points intérieurs et les points frontières correspondent à ceux de E, et $f(z)$ prend chaque valeur située dans E, le même nombre fini de fois. Si ce nombre est égal à un, Δ est un domaine d'univalence de $f(z)$, correspondant à E. Ces notions s'étendent aux fonctions méromorphes dans un domaine (D). Nous dirons que $f(z)$ a p domaines Δ se fermant dans (D), correspondant à E, s'il existe $p' \leqq p$ domaines Δ_i se fermant dans (D), tels que $f(z)$ prenne dans Δ_i, n_i fois chaque valeur située dans E, et $\sum_{i=1}^{p'} n_i = p$. Σ étant la projection stéréographique de E sur la sphère de RIEMANN (S) de centre $Z = 0$, et de rayon 1, nous dirons que $f(z)$ a p domaines se fermant dans (D), correspondant à Σ, si ceci a lieu pour E.

2. Considérons dans un domaine (D), une famille de fonctions méromorphes $f(z)$ et soient E_1, E_2, E_3 trois régions simplement connexes et extérieures les unes aux autres, dans le plan Z. Supposons que chaque fonction $f(z)$ de la famille ait au plus p_i domaines se fermant dans (D), correspondant à E_i $(i = 1, 2, 3)$, les p_i étant des entiers positifs. M. AHLFORS a montré que si $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, la famille $f(z)$ est normale dans (D) [1, *c*]. À partir de ce théorème, on constate sans peine que la famille $f(z)$ considérée est quasi-normale dans (D). En effet, $f_n(z)$ étant une suite quelconque contenue dans la famille $f(z)$, le procédé habituel des extractions successives, permet d'extraire de la suite $f_n(z)$, une autre suite qui n'admet que $s \leqq p_1+p_2+p_3$ points de JULIA, dans (D). La famille $f(z)$ est ainsi quasi-normale d'ordre $p_1+p_2+p_3$ au plus dans (D). Les considérations ci-dessous permettent en outre de préciser la valeur de cet ordre. D'une manière analogue, on voit que E_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ étant six régions simplement connexes extérieures les unes aux autres dans le plan Z, et $f(z)$ une famille de fonctions méromorphes dans un domaine (D), si chaque fonction $f(z)$ de la famille n'a que p_i domaines d'univalence au plus dans (D), correspondant à E_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, la famille $f(z)$ est quasi-normale dans (D). Son ordre ne dépasse pas la somme des nombres p_i. Ceci s'établit à partir d'un théorème qui est une conséquence d'une proposition de M. AHLFORS [1, c].

3. Nous allons considérer les fonctions $f(z)$, méromorphes dans un domaine (D), et qui vérifient la condition suivante: ρ étant un nombre positif, pour tout cercle Σ_ρ de rayon ρ sur la sphère de RIEMANN (S), $f(z)$ n'a que q domaines au plus se fermant dans (D), correspondant à Σ_ρ. Ces fonctions ressemblent aux fonctions méromorphes q-valentes. On peut établir la proposition suivante:

THÉORÈME I. — *Soient $Z = f(z)$ une famille de fonctions méromorphes dans un domaine (D), q un entier positif, et ρ le plus petit des nombres $(\pi/3) - \varepsilon$ et $(\pi/q) - \varepsilon$ (ε arbitrairement petit). Si pour tout cercle Σ_ρ de rayon ρ sur (S), chaque fonction $f(z)$ de la famille a q domaines au plus se fermant dans (D) et correspondant à Σ_ρ, la famille $f(z)$ est quasi-normale d'ordre q au plus dans (D).*

Puisque $\rho \leqq (\pi/3) - \varepsilon$, on peut évidemment décrire sur (S), d'une infinité de manière, trois cercles Σ_1, Σ_2, Σ_3 de rayon ρ, extérieurs les uns aux autres. Il suit de l'hypothèse et de ce qui vient être considéré, que la famille $f(z)$ est quasi-normale d'ordre $3q$ au plus dans (D). D'une suite quelconque contenue dans la famille $f(z)$, on peut extraire une autre suite $f_n(z)$ convergeant uniformément dans l'intérieur de (D), vers une fonction méromorphe $F(z)$ sauf en $s \leqq 3q$ points irréguliers. Pour préciser la valeur de s, montrons d'abord que la fonction limite $F(z)$ est méromorphe dans (D). Soit z_0 un des points irréguliers. D'après une proposition de M. AHLFORS [1, a], si $F(z)$ admettait au point z_0, une singularité essentielle, $F(z)$ aurait une infinité de domaines Δ se fermant au voisinage de z_0, correspondant à un au moins des cercles Σ_1, Σ_2, Σ_3. Soit Σ_1 par exemple, ce cercle et soient E_1 la région correspondante dans le plan Z, et Δ_j $(j = 1, 2, \ldots, h)$ $k(k > q)$ domaines se fermant au voisinage de z_0, correspondant à E_1. $F(z)$ prend dans Δ_j, n_j fois chaque valeur située dans E_1, et $\sum_{j=1}^{h} n_j = k$. Entourons Δ_j par une courbe Γ_j voisine de Δ_j, et ne passant pas par les points des domaines correspondant à E_1 et à $F(z)$, et par les pôles de $F(z)$. $f_n(z)$ convergeant uniformément vers $F(z)$, dès que n dépasse un certain rang, les courbes décrites par $F(z)$ et par $f_n(z)$, lorsque z parcourt Γ_j, sont à une distance de E_1, supérieure à un nombre positif. Considérons un point α dans E_1.

L'intégrale de CAUCHY

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_j}\frac{f'_n(z)}{f_n(z)-\alpha}\,dz$$

montre que $f_n(z)$ prend dans Δ_j, n_j fois la valeur α, dès que n est suffisamment grand. Comme $f_n(z)$ ne prend pas sur Γ_j, de valeurs situées dans E_1, elle a n_j domaines se fermant dans le domaine intérieur à Γ_j, et correspondant à E_1. En passant de Δ_1 à Δ_h, il s'ensuit que $f_n(z)$ a plus de q domaines se fermant au voisinage de z_0, correspondant à E_1, ce qui est contraire à l'hypothèse. $F(z)$ est donc méromorphe dans (D). Elle peut se réduire, en particulier, à une constante finie ou infinie.

Nous allons montrer que $s \leqq q$. Supposons que l'on ait $s \geqq q+1$ et soient z_i, $q+1$ points irréguliers de la suite $f_n(z)$. Soient α_i la valeur de la fonction limite $F(z)$, en z_i, et α'_i l'image de α_i sur (S). On voit aisément que l'on peut décrire un cercle Σ_ρ de rayon ρ, sur (S), extérieur aux points α'_i $(i = 1, 2, \ldots, q+1)$. On peut le constater par exemple, de la manière suivante: Sans restreindre la généralité, supposons que α'_1 soit le centre de projection. Traçons sur (S), un demi-grand cercle (α'_1, α'_2) passant par α'_1, α'_2, puis un demi-grand cercle (α'_1, α'_3) passant par α'_1, α'_3 et ainsi de suite, pour chacun des points $\alpha'_2, \ldots, \alpha'_{q+1}$. Il est évident que l'on peut décrire un cercle Σ_ρ dans une au moins des régions limitées par ces demi-grand cercles. Par suite, Σ_ρ est extérieur aux points α'_i. Dès que n dépasse un certain rang, les images sur (S) des courbes décrites par $F(z)$ et par $f_n(z)$, lorsque z parcourt un cercle σ_i assez petit autour de z_i, sont voisines de α'_i et extérieures à Σ_ρ. Or, $f_n(z)$ prend dans σ_i, des valeurs situées dans Σ_ρ, il s'ensuit que $f_n(z)$ a des domaines se fermant dans σ_i, correspondant à Σ_ρ. En passant de z_1 à z_{q+1}, on voit que $f_n(z)$ a plus de q domaines se fermant dans (D), correspondant à Σ_ρ, contrairement à l'hypothèse. Donc $s \leqq q$, et le théorème est démontré.

4. Moyennant une certaine condition, on peut prendre $\rho = (\pi/3) - \varepsilon$ dans le Théorème I. Pour l'établir, nous démontrerons ce lemme:

LEMME 1. — *Si $f_n(z)$ est une suite exceptionnelle d'*OSTROWSKI *de fonctions méromorphes exceptionnelle en un point a* [5]) *et si $f_n(z)$ converge uniformément autour de a vers une fonction méromorphe en a, distincte d'une constante, chaque fonction $f_n(z)$ prend dans $|z-a| < \varepsilon$, toute valeur, dès que $n > n(\varepsilon)$.*

On suppose que la valeur α de la fonction limite $f(z)$ en a, est finie. Si cette valeur est infinie, il suffit de considérer la suite $1/f_n(z)$. Décrivons un cercle c concentrique et intérieur au cercle $|z-a| = \varepsilon$, et assez voisin de a, pour que $f(z)$ ne prenne pas la valeur α, sauf en a, et n'ait pas de pôles, dans c et sur sa circonfé-

---

5) [9]. OSTROWSKI.

rence. Dès que $n > n_0(\varepsilon)$, l'intégrale de CAUCHY

$$\frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f'_n(z)}{f_n(z)-\alpha}\,dz$$

montre que le nombre des zéros de $f_n(z)-\alpha$ dans c, est égal à la somme du nombre des pôles de $f_n(z)$ dans c et de l'ordre de a par rapport à $f(z)-\alpha$. Donc $f_n(z)-\alpha$ a au moins deux zéros dans c. En supposant que $n_0(\varepsilon)$ soit assez grand, les courbes décrites par $f(z)$ et par $f_n(z)$, lorsque z parcourt la circonférence de c, sont extérieures à un petit cercle $|Z-\alpha| \leqq \eta$. Par suite, $f_n(z)$ prend dans c au moins deux fois, chaque valeur située dans $|Z-\alpha| \leqq \eta$. Décrivons maintenant un cercle c' concentrique à c, et assez voisin de a, pour que la courbe décrite par $f(z)$, lorsque z parcourt c', soit intérieure au cercle $|Z-\alpha| < \eta$. Dès que $n > n'_0(\varepsilon)$, $f_n(z)$ possède la même propriété. Or, $f_n(z)$ étant une suite exceptionnelle d'OSTROWSKI en a, on peut supposer que $n'_0(\varepsilon)$ soit suffisamment grand pour que $f_n(z)$ ait au moins un pôle dans c'. Par conséquent, $f_n(z)$ prend dans c', au moins une fois chaque valeur extérieure à $|Z-\alpha| \leqq \eta$. En désignant par $n(\varepsilon)$ le plus grand des nombres $n_0(\varepsilon)$ et $n'_0(\varepsilon)$, il s'ensuit que $f_n(z)$ prend dans $|z-a| < \varepsilon$, toute valeur, dès que $n > n(\varepsilon)$.

Nous dirons qu'une fonction $f(z)$ méromorphe dans un domaine (D), vérifie la condition (C_q) dans (D), s'il y a au plus q domaines complètement intérieurs à (D), tels que dans chacun de ces domaines, $f(z)$ prenne toute valeur.

THÉORÈME I'. — *Soient $Z=f(z)$ une famille de fonctions méromorphes dans un domaine (D), et y vérifiant la condition (C_q). Si pour tout cercle de rayon $(\pi/3)-\varepsilon$ sur (S), chaque fonction $f(z)$ de la famille a q domaines au plus se fermant dan (D) et correspondant à ce cercle, la famille $f(z)$ est quasi-normale d'ordre q au plus dans (D).*

D'une suite quelconque de fonctions, contenue dans la famille $f(z)$, on peut extraire, comme dans la démonstration du théorème précédent, une autre suite $f_n(z)$ convergeant uniformément vers une fonction $F(z)$ méromorphe dans (D), sauf en s points irréguliers dans ce domaine. Quitte à considérer une suite partielle de $f_n(z)$, on suppose que la suite $f_n(z)$ est exceptionnelle au sens d'OSTROWSKI, en chacun de ses points irréguliers. Si la fonction limite $F(z)$ est une constante, les considérations utilisées dans la démonstration du théorème précédent montrent de suite que $s \leqq q$. Si $F(z)$ est distincte d'une constante, il découle du Lemme 1, et de l'hypothèse, que $s \leqq q$. Le théorème est établi.

5. Considérons dans un domaine (D), les fonctions méromorphes $f(z)$ ayant la propriété suivante: Σ_ρ étant un cercle arbitraire de rayon ρ, tracé sur (S), $f(z)$ n'a dans (D) que q domaines d'univalence au plus, correspondant à Σ_ρ. Pour obtenir un théorème analogue au Théorème I, nous avons besoin des lemmes suivants:

LEMME 2. — *Soient $Z=f(z)$ une fonction méromorphe dans un domaine (D), E une* *région simplement connexe dans le plan Z, et* E_1, E_2 *deux régions simplement connexes appartenant à E, extérieures l'une à l'autre. Si* Δ *est un domaine simplement connexe correspondant à E et se fermant dans (D), et si* m_1, m_2 *désignent respectivement le nombre des domaines d'univalence de* $f(z)$ *situés dans* Δ, *et correspondant à* E_1, E_2, *on a* $m_1 + m_2 \geqq 2$.

Considérons avec M. AHLFORS, la région simplement connexe E_{12} formée par E_1, E_2, et par une bande joignant E_1, E_2; cette bande b_{12}, située dans E, va d'un arc e_1 pris sur la frontière de E_1 à un arc e_2 pris sur celle de E_2. Soit Δ_{12} un domaine situé dans Δ, et correspondant à E_{12}. Si Δ_{12} est un domaine d'univalence, on a évidemment $m_1 + m_2 \geqq 2$. Dans le cas général, supposons que $m_1 + m_2 \leqq 1$, et montrons dans ce cas, que Δ_{12} serait multiplement connexe. En effet, désignons par Δ_1, Δ'_1, Δ''_1, ..., et Δ_2, Δ'_2, Δ''_2, ..., les domaines distincts situés dans Δ_{12} et correspondant respectivement à E_1, et à E_2, par β_{12} les domaines correspondant à b_{12}, et par ε_1, ε_2 les arcs correspondant à e_1, e_2. Par hypothèse, parmi les domaines Δ_1, Δ'_1, ..., et Δ_2, Δ'_2, ..., il y a au plus un domaine d'univalence. Soit Δ_1 par exemple, un tel domaine. Si un tel domaine n'existe pas, la démonstration se fait d'une manière analogue. Sur Δ_1, on a un arc ε_1. En sortant par cet arc, on entre dans un domaine β_{12}. β_{12} s'étend jusqu'à un arc ε_2 de la frontière d'un des domaines Δ_2, Δ'_2, ... Soit Δ_2 ce domaine. Puisque Δ_2 n'est pas un domaine d'univalence, sur sa frontière, on a un autre arc ε_2. En sortant par cet arc, on entre dans un domaine β_{12} qui s'étend jusqu'à un arc ε_1 de la frontière d'un des domaines Δ_1, Δ'_1, ... Ce domaine n'est pas Δ_1. Soit Δ'_1 ce domaine. Sur sa frontière, on a un autre arc ε_1. En sortant par cet arc, on entre dans un domaine β_{12} qui s'étend jusqu'à un arc ε_2 de la frontière d'un des domaines Δ_2, Δ'_2, ... Si ce domaine est Δ_2, Δ_{12} est évidemment multiplement connexe. Supposons que ce domaine soit Δ'_2. En sortant par un autre arc ε_2 de sa frontière, on entre dans un domaine β_{12} qui s'étend jusqu'à un arc ε_1 de la frontière d'un des domaines Δ'_1, Δ''_1, ... Si ce domaine est Δ'_1, Δ_{12} est multiplement connexe. Supposons que ce domaine soit Δ''_1, et ainsi de suite. Ainsi, pour que Δ_{12} ne soit pas multiplement connexe, il faut que l'on ait chaque fois, un domaine $\Delta_1^{(i)}$, ou un domaine $\Delta_2^{(j)}$, distinct des précédents. Or, le nombre des domaines Δ_1, Δ'_1, ..., et Δ_2, Δ'_2, ... est fini, il s'ensuit que Δ_{12} est multiplement connexe. Mais ceci est contraire aux hypothèses. En effet, dans un domaine limité par un contour intérieur de Δ_{12}, $f(z)$ prend toute valeur extérieure à E_{12}, par suite des valeurs extérieures à E. Δ_{12} appartient à Δ et Δ est supposé simplement connexe; $f(z)$ prend donc dans Δ des valeurs extérieures à E, ce qui est absurde. On a donc $m_1 + m_2 \geqq 2$.

LEMME 3. — *Soit* $Z = f_n(z)$ *une suite de fonctions méromorphes qui est une suite exceptionnelle d'*OSTROWSKI *en un point a, et qui converge uniformément autour de a vers une fonction méromorphe en a, et soient* E_i $(i = 1, 2, \ldots, h;\ h \geqq 4)$ *h régions simplement connexes extérieures les unes aux autres dans le plan Z. Si* $m_i(n)$ *désigne le* *nombre des domaines d'univalence de* $f_n(z)$ *voisins de* a, *et correspondant à* E_i, *on a* $\sum_{i=1}^{h} m_i(n) \geqq h - 1$, *dès que* n *dépasse un certain rang.*

Supposons d'abord que $h = 4$, et distinguons deux cas suivant que la valeur α, en a, de la fonction limite $f(z)$ de $f_n(z)$ est extérieure aux régions E_1, E_2, E_3, E_4, ou appartient à l'une des ces régions. Considérons le premier cas. Dècrivons autour de a, un petit cercle c assez voisin de a, pour que sur c, les valeurs de $f(z)$ et de $f_n(z)$, n suffisamment grand, soient voisines de α, et extérieures aux E_1, E_2, E_3, E_4. Joignons E_1, E_2 par une bande b_{12} et E_3, E_4 par une bande b_{34}, telles que les régions E_{12}, E_{34} ainsi formées soient simplement connexes, extérieures l'une à l'autre, et extérieures à α. Dès que n dépasse un certain rang, $f_n(z)$ a des domaines Δ_{12}, Δ_{34} correspondant à E_{12}, E_{34}, se fermant dans c. Soit Δ_{12} un de ces domaines. Si Δ_{12} est simplement connexe, on a dans ce domaine $m_1(n) + m_2(n) \geqq 2$, d'après le Lemme 2. Si Δ_{12} est multiplement connexe, il y a un Δ_{34} se fermant dans un domaine limité par un contour intérieur de Δ_{12}. Si Δ_{34} est simplement connexe, on a dans ce domaine $m_3(n) + m_4(n) \geqq 2$. Si Δ_{34} est multiplement connexe, on a un Δ_{12} se fermant dans un domaine limité par un contour intérieur de Δ_{34}. Comme le nombre des domaines Δ_{12} et Δ_{34} est fini, on obtient de cette manière, un Δ_{12} ou un Δ_{34} qui est simplement connexe. Soit Δ_{12} ce domaine, par exemple; on a $m_1(n) + m_2(n) \geqq 2$, dans Δ_{12}. Il existe au moins un Δ_{34} se fermant dans le domaine (d) limité par le contour de Δ_{12}, et par le cercle c. Si Δ_{34} est simplement connexe, on a $m_3(n) + m_4(n) \geqq 2$, dans Δ_{34}. Par suite $\sum_{i=1}^{4} m_i(n) \geqq 4$ dans c. Supposons que Δ_{34} soit multiplement connexe, et distinguons deux cas: Il peut arriver que tous les points intérieurs au contour extérieur de Δ_{34} soient dans (d). Alors on voit de la même manière que ci-dessus, que $\sum_{i=1}^{4} m_i(n) \geqq 4$. Il peut arriver que Δ_{12} soit dans un domaine limité par un contour intérieur de Δ_{34}. Dans ce cas, on a un Δ_{12} se fermant dans le domaine (d') limité par le contour extérieur de Δ_{34} et par c. Si Δ_{12} est simplement connexe, on a $\sum_{i=1}^{4} m_i(n) \geqq 4$. Si Δ_{12} est multiplement connexe, on distingue encore deux cas, suivant que tous les points intérieurs au contour extérieur de Δ_{12} sont dans (d'), ou que Δ_{34} est dans un domaine limité par un contour intérieur de Δ_{12}. Dans le premier cas, on a $\sum_{i=1}^{4} m_i(n) \geqq 4$. Dans le deuxième cas, nous continuons de la même manière. Le nombre des domaines Δ_{12} et Δ_{34} étant fini, on voit que l'on a $\sum_{i=1}^{4} m_i(n) \geqq 4$ dans c.

Considérons maintenant le deuxième cas, où la valeur α de la fonction limite $f(z)$, en a, appartient à l'une des régions E_1, E_2, E_3, E_4. Soit E_4 par exemple, cette région. Dès que n dépasse un certain rang, les valeurs de $f_n(z)$ correspondant aux points du cercle c, sont voisines de α, et extérieures aux E_{12} et E_3. $f_n(z)$ a au moins un domaine Δ_{12} se fermant dans c. On voit de la même manière que ci-dessus, que $f_n(z)$ a un domaine simplement connexe Δ_{12} ou un domaine simplement connexe Δ_{34} se fermant dans c. Distinguons deux cas:

1°. Supposons que ce domaine soit Δ_{12}. Dans Δ_{12}, on a $m_1(n)+m_2(n)\geqq 2$. Soit (d) le domaine limité par le contour de Δ_{12} et par c. Si $f_n(z)$ prend dans (d), des valeurs de E_{12}, on a un domaine Δ'_{12} se fermant dans (d). Si Δ'_{12} est simplement connexe, on a $\sum_{i=1}^{4} m_i(n)\geqq 4$. Si Δ'_{12} est multiplement connexe, nous distinguons deux cas comme ci-dessus, suivant que tous les points intérieurs au contour extérieur de Δ'_{12}, sont dans (d), ou que le domaine Δ_{12} est dans un domaine limité par un contour intérieur de Δ'_{12}. Dans le premier cas, on a $\sum_{i=1}^{4} m_i(n)\geqq 4$. Dans le deuxième cas; nous considérons le domaine (d') limité par le contour extérieur de Δ'_{12}, et par c. En procédant ainsi de proche en proche, il est évident que nous arrivons soit à l'inégalité $\sum_{i=1}^{4} m_i(n)\geqq 4$, soit à un domaine $(d^{(j)})$ limité par une courbe γ correspondant à la frontière de E_{12}, et par c, dans lequel $f_n(z)$ ne preud pas de valeurs de E_{12}. Dans $(d^{(j)})$, on a au moins un domaine Δ_3 correspondant à E_3 et se fermant dans $(d^{(j)})$. Si Δ_3 est un domaine d'univalence, on a $\sum_{i=1}^{4} m_i(n)\geqq 3$. Supposons que Δ_3 ne soit pas un domaine d'univalence. Joignons E_3 à E_1 par une bande b_{31} extérieure aux E_4, E_2 et aux b_{12}, b_{34}. b_{31} va d'un arc e'_3 pris sur la frontière de E_3, à un arc e'_1 pris sur celle de E_1. Sur la frontière de Δ_3, on a au moins deux arcs ε'_3 correspondant à e'_3. En sortant par ces arcs, on entre dans des domaines β_{31} correspondant à b_{31}. Les domaines β_{31} ne peuvent se fermer dans $(d^{(j)})$, car $f_n(z)$ ne prend pas de valeurs de E_{12} dans $(d^{(j)})$. D'autre part, sur c, $f_n(z)$ prend des valeurs voisines de α appartenant à E_4, donc les domaines β_{31} s'étendent tous jusqu'à la courbe γ. On a donc au moins un domaine (d_{31}), dans $(d^{(j)})$, limité par une partie de la frontière de Δ_3, par deux courbes correspondant à la frontière de b_{31}, et par une partie de la courbe γ. Dans (d_{31}), on a au moins un domaine Δ_4 correspondant à E_4 et se fermant dans (d_{31}). Si Δ_4 est un domaine d'univalence, on a $\sum_{i=1}^{4} m_i(n)\geqq 3$. Dans le cas contraire, joignons E_4 à E_2 par une bande b_{42} extérieure aux E_3, E_1 et aux b_{12}, b_{34}, b_{31}. b_{42} va d'un arc e'_4 pris sur la frontière de E_4 à un arc pris sur celle de E_2. Sur la frontière de Δ_4, on a au moins deux arcs ε'_4 correspondant à e'_4. En sortant par ces arcs, on entre dans des domaines β_{42} correspondant à b_{42}. Les domaines β_{42} s'étendent jusqu'à la partie de la frontière de (d_{31}) sur γ. On a donc au moins un domaine (d_{42}) dans (d_{31}), limité par une partie de la frontière de Δ_4, par deux courbes correspondant à la frontière de b_{42} et par une partie de γ. Dans (d_{42}), on a au moins un Δ_3 se fermant dans ce domaine. Si Δ_3 est un domaine d'univalence, on a $\sum_{i=1}^{4} m_i(n) \geqq 3$. Dans le cas contraire, nous continuons de la même manière. En procédant ainsi de suite, on voit que l'on a $\sum_{i=1}^{4} m_i(n) \geqq 3$, dans c.

2° Supposons maintenant que $f_n(z)$ ait un domaine simplement connexe Δ_{34} se fermant dans c. On a $m_3(n) + m_4(n) \geqq 2$, dans Δ_{34}. Dans le domaine (d) limité par le contour de Δ_{34}, et par c, on a au moins un domaine Δ_{12} se fermant dans ce domaine. Si Δ_{12} est simplement connexe, on a $\sum_{i=1}^{4} m_i(n) \geqq 4$. Si Δ_{12} est multiplement connexe, on distingue deux cas suivant que tous les points intérieurs au contour extérieur de Δ_{12} sont dans (d), ou que Δ_{34} est dans un domaine limité par un contour intérieur de Δ_{12}. Dans le premier cas, on a $\sum_{i=1}^{4} m_i(n) \geqq 4$. Dans le deuxième cas, il suffit de procéder comme dans 1°, et on a $\sum_{i=1}^{4} m_i(n) \geqq 3$.

Le lemme est ainsi établi, pour $h = 4$. Pour compléter la démonstration, supposons que le lemme soit établi pour $h = h$, et montrons qu'il est encore vrai pour $h = h + 1$. En effet, soient $E_1, E_2, \ldots, E_h, E_{h+1}$, $h + 1$ régions simplement connexes, extérieures les unes aux autres dans le plan Z. Par hypothèse, on a $\sum_{i=1}^{h} m_i(n) \geqq h - 1$. Donc, si $m_{h+1}(n)$ n'est pas nul, on a $\sum_{i=1}^{h+1} m_i(n) \geqq h$. Supposons que $m_{h+1}(n) = 0$. Si $m_i(n) \geqq 1$ pour $i = 1, 2, \ldots, h$, on a encore $\sum_{i=1}^{h+1} m_i(n) \geqq h$. Supposons que $m_h(n)$ par exemple, soit nul. Considérons les quatre régions E_{h-2}, E_{h-1}, E_h, E_{h+1}. D'après ce qui vient être démontré, on a $m_{h-2}(n) + m_{h-1}(n) \geqq 3$. Par suite, l'un au moins des nombres $m_{h-2}(n)$ et $m_{h-1}(n)$ est $\geqq 2$. Soit $m_{h-1}(n)$ ce nombre, et considérons les régions $E_1, E_2, \ldots, E_{h-2}, E_h, E_{h+1}$. Par hypothèse, on a $\sum_{i=1}^{h-2} m_i(n) \geqq h - 1$, donc $\sum_{i=1}^{h+1} m_i(n) = \sum_{i=1}^{h-1} m_i(n) \geqq h + 1$. Le lemme est ainsi démontré.

THÉORÈME II. — *Soient $Z = f(z)$ une famille de fonctions méromorphes dans un domaine (D), q un entier positif, et ρ le plus petit des nombres $(\pi/4) - \varepsilon$ et $(\pi/q) - \varepsilon$ (ε arbitrairement petit). Si pour tout cercle Σ_ρ de rayon ρ pris sur (S), chaque fonction $f(z)$ de la famille, a q domaines d'univalence au plus situés dans (D) et correspondant à Σ_ρ, la famille $f(z)$ est quasi-normale d'ordre q au plus dans (D).*

Puisque $\rho \leqq (\pi/4) - \varepsilon$, on peut décrire sur (S), six cercles $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_6$, de rayon ρ, extérieurs les uns aux autres. Pour cela, il suffit de décrire d'abord quatre cercles de rayon ρ, extérieurs les uns aux autres, dont les centres sont sur l'intersection de (S) avec le plan Z, et puis deux cercles de rayon ρ, ayant pour centres les deux pôles de (S). D'après les considérations du n° 2, et d'après l'hypothèse, on peut donc extraire d'une suite quelconque de fonctions, contenue dans la famille $f(z)$, une autre suite $f_n(z)$ convergeant uniformément vers une fonction $F(z)$, dans (D), privé de $s \leqq 6q$ points irréguliers. Quitte à considérer une suite partielle de $f_n(z)$, on peut supposer que $f_n(z)$ soit exceptionnelle au sens d'OSTROWSKI, en chacun de ses points irréguliers z_i. D'après M. AHLFORS, si $F(z)$ admettait en z_i, une singularité essentielle, $F(z)$ aurait une infinité de domaines d'univalence, au voisinage de z_i, et correspondant à l'un au moins des cercles $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_6$. À partir de ceci, on constate, comme dans la démonstration du Théorème I, que la fonction limite $F(z)$ est méromorphe dans (D). Montrons que $s \leqq q$. Supposons d'abord que $q \leqq 4$. D'après le Lemme 3, dès que n dépasse un certain rang, le nombre des domaines d'univalence de $f_n(z)$, au voisinage de z_i, et correspondant aux cercles $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_6$, est supérieur ou égal à 5. Donc, par hypothèse, $5s \leqq 6q$, $s \leqq q + \frac{q}{5}$, c'est-à-dire que $s \leqq q$. Supposons maintenant que $q > 4$. Puisque $\rho \leqq (\pi/q) - \varepsilon$, on peut décrire sur (S), $q + 2$ cercles de rayon ρ, extérieurs les uns aux autres. D'après le Lemme 3, le nombre des domaines d'univalence de $f_n(z)$, voisins de z_i, et correspondant à ces cercles, n'est pas inférieur à $q + 1$. Par suite $(q+1)s \leqq q(q+2)$, $s \leqq q + \frac{q}{q+1}$, donc $s \leqq q$. Le théorème est démontré.

6. Moyennant la condition (C_q), on peut préciser ce théorème, sous la forme suivante :

THÉORÈME II'. — *Soient $Z = f(z)$ une famille de fonctions méromorphes dans un domaine (D), et y vérifiant la condition (C_q). Si pour tout cercle de rayon $(\pi/4) - \varepsilon$ pris sur (S), chaque fonction de la famille a q domaines d'univalence au plus dans (D), et correspondant à ce cercle, la famille $f(z)$ est quasi-normale d'ordre q au plus dans (D).*

Considérons la suite $f_n(z)$ obtenue dans la démonstration du théorème précédent. Supposons d'abord que la fonction limite $F(z)$ de $f_n(z)$, soit une constante α. L'image sphérique de α est extérieure à au moins cinq des cercles $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_6$, considérés ci-dessus. Soient $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ quatre de ces cercles. Dans la première partie de la démonstration du Lemme 3, on a vu que $f_n(z)$ a au moins quatre domaines d'univalence, voisins d'un point irrégulier, et correspondant à $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$, dès que n dépasse un certain rang. Donc, si s désigne le nombre des points irréguliers de la suite $f_n(z)$, on a par hypothèse, $4s \leqq 4q$, $s \leqq q$. Si $F(z)$ est distincte d'une constante, on a $s \leqq q$, d'après le Lemme 1, et d'après l'hypothèse. Donc dans tous les cas, $s \leqq q$.

Chapitre II.

Généralisations de thécrèmes de M. Ahlfors.

7. Les méthodes de la théorie des familles normales permettent d'obtenir des généralisations de théorèmes de M. Ahlfors [1, c]. Mais les résultats obtenus sont moins précis que les théorèmes correspondants de M. Ahlfors, dans ce sens que les formes explicites des nombres R, Ω, et Ω' trouvés ci-dessous, resteront inconnues.

Théorème III. — *Soient E_1, E_2, E_3 trois régions simplement connexes, extérieures les unes aux autres dans le plan Z, p_1, p_2, p_3 $(p_1 \leqq p_2 \leqq p_3)$ trois entiers positifs, et $a_0, a_1, \ldots, a_s$ $(s \geqq p_2 + 1)$, $s+1$ nombres tels qu'il n'existe pas de fonction rationnelle, quotient de deux polynomes de degré p_2 au plus, ayant à l'origine un développement de la forme*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_s z^s + \cdots. \tag{1}$$

Il existe un nombre

$$R = R(E_1, E_2, E_3, p_1, p_2, p_3, a_0, a_1, \ldots, a_s, s)$$

tel que toute fonction $Z = f(z)$ méromorphe dans $|z| \leqq R$, et ayant à l'origine un développement de la forme (1), ait au moins $p_1 + 1$ domaines se fermant dans $|z| < R$, correspondant à E_1, ou $p_2 + 1$ domaines se fermant dans $|z| < R$ correspondant à E_2, ou $p_3 + 1$ domaines se fermant dans $|z| < R$, correspondant à E_3.

Supposons que le nombre R n'existe pas. Alors il existe une suite de fonctions $f_n(z)$ vérifiant les conditions suivantes: $f_n(z)$ est méromorphe pour $|z| \leqq n$, admet à l'origine un développement de la forme (1), et possède p_i domaines au plus, se fermant dans $|z| < n$, et correspondant à E_i $(i = 1, 2, 3)$. D'après les considérations du n° 2, cette suite de fonctions est quasi-normale d'ordre $p_1 + p_2 + p_3$ au plus dans $|z| < n$. Le procédé des extractions successives et du passage à la suite diagonale, nous permet d'extraire de la suite $f_n(z)$ une autre suite que nous désignons encore par $f_n(z)$, convergeant uniformément vers une fonction $f(z)$, dans tout domaine fini, sauf en un nombre fini de points irréguliers. $f(z)$ est méromorphe en tout point à distance finie. $f(z)$ ne peut être la constante infinie. En effet, soit c un petit cercle ayant l'origine pour centre et ne passant par les points irréguliers de la suite $f_n(z)$. Si $f(z)$ est la constante infinie, dès que n dépasse un certain rang, le théorème de Rouché montre que $f_n(z)$ a au moins $s+1$ zéros dans c. Soit M un nombre assez grand pour que au moins deux des régions E_1, E_2, E_3 soient contenues dans $|Z| < M$, et supposons que n soit suffisamment grand pour que $|f_n(z)| > M$ sur c. $f_n(z)$ a donc au moins $s+1$ domaines se fermant dans c, correspondant à chacune de ces deux régions. Mais pour au moins l'une de ces régions, $f_n(z)$ possède p_2 domaines au plus, se fermant dans $|z| < n$, et correspondant à cette région. Nous avons donc une contradiction. De la même manière que dans la démonstration du Théorème I, on voit que $f(z)$ n'admet pas au point ∞, une singularité essentielle.

Il en résulte que $f(z)$ est une fonction rationnelle $R(z)$. Supposons d'abord que $R(z)$ soit distincte d'une constante. Soit $|z| < A$ un cercle quelconque. Nous allons montrer que dès que n dépasse un certain rang, $f_n(z)$ a au plus p_2 pôles dans $|z| < A$. Si la valeur à l'infini de $R(z)$, est finie, ceci est immédiat, car dans ce cas, si $f_n(z)$ a plus de p_2 pôles dans $|z| < A$, et si n dépasse un certain rang, $f_n(z)$ aurait plus de p_2 domaines se fermant dans $|z| < n$, et correspondant à chacune de deux au moins des régions E_i $(i = 1, 2, 3)$. Si la valeur de $R(z)$ à l'infini, est infinie, $R(z)$ a plus de zéros que pôles. Soit $|z| < A'$, $A' > A$, un cercle contenant tous les zéros et les pôles à distance finie, de $R(z)$ et ne passant pas par les points irréguliers. Dès que n dépasse un certain rang, la différence entre le nombre des zéros de $f_n(z)$ et le nombre des pôles de $f_n(z)$, dans $|z| < A'$, est égal à cette différence pour $R(z)$. Par suite, si $f_n(z)$ a plus de p_2 pôles dans $|z| < A$, elle a plus de p_2 zéros dans $|z| < A'$. Comme la valeur de $R(z)$ à l'infini, est infinie, on voit que $f_n(z)$ aurait encore plus de p_2 domaines se fermant dans $|z| < n$, et correspondant à chacune de deux au moins des régions E_i $(i = 1, 2, 3)$. D'une manière analogue, on voit que $f_n(z)$ a au plus p_2 zéros dans $|z| < A$, dès que n dépasse un certain rang.

Sans restreindre la généralité, nous pouvons donc supposer que $f_n(z)$ a k zéros et k' pôles, $k \leqq p_2$, $k' \leqq p_2$, voisins des zéros et des pôles de $R(z)$ et des points irréguliers, et que $f_n(z)$ n'a pas d'autres zéros et pôles que ces points dans $|z| < A$, dès que n dépasse un certain rang. Soient $a_i(n)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ et $b_j(n)$ $(j = 1, 2, \ldots, k')$ respectivement ces zéros et pôles de $f_n(z)$. Formons les polynomes

$$P_n(z) = [z - a_1(n)][z - a_2(n)] \ldots [z - a_k(n)],$$

et

$$Q_n(z) = [z - b_1(n)][z - b_2(n)] \ldots [z - b_{k'}(n)].$$

$P_n(z)$ et $Q_n(z)$ tendent uniformément vers deux polynomes $P(z)$ et $Q(z)$, de degré au plus égal à p_2, lorsque n croît indéfiniment. La suite de fonctions

$$\frac{Q_n(z)}{P_n(z)} f_n(z)$$

qui n'ont pas de zéros et de pôles dans $|z| < A$, tend uniformément vers une fonction entière dans tout domaine fini, et cette fonction entière n'a pas de zéros. Comme $f_n(z)$ tend vers une fonction rationnelle, cette fonction entière est donc une constante C. Par suite, $Q_n(z) f_n(z)$ tend uniformément vers $CP(z)$. À l'origine, en passant à la limite, on a

$$Q(0)f(0) = CP(0)$$
$$Q'(0)f(0) + Q(0)f'(0) = CP'(0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

où $f^{(j)}(0) = j!\, a_j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, s)$. Si $Q(0) \neq 0$, ces relations montrent que la fonction $P(z)/Q(z)$ admet à l'origine un développement de la forme (1). Si $Q(0) = 0$, supposons que $Q(0) = Q'(0) = \cdots = Q^{(\lambda-1)}(0) = 0$, $Q^{(\lambda)}(0) \neq 0$, alors

$$P(0) = P'(0) = \cdots = P^{(\lambda-1)}(0) = 0.$$

Dans ce cas, on voit à partir de la $(\lambda + 1)^{\text{ième}}$ de ces relations que $P(z)/Q(z)$ admet à l'origine un développement de la forme (1). Nous avons donc une contradiction.

Supposons maintenant que $R(z)$ soit une constante C. Dans ce cas, on peut encore former la suite $Q_t(z)f_n(z)$ qui converge uniformément vers $C\,Q(z)$, ce qui nous conduit à une contradiction. Ainsi, nous avons dans tous les cas, une contradiction. Par suite le nombre R existe.

THÉORÈME IV. — *Soient E_1, E_2, E_3 trois régions simplement connexes, extérieures les unes aux autres dans le plan Z, p_1, p_2, p_3 $(p_1 \leqq p_2 \leqq p_3)$ trois entiers positifs, et a_0, a_1, $\ldots$, a_{p_2}, $p_2 + 1$ nombres. Il existe des nombres Ω, Ω' ne dépendant que de E_1, E_2, E_3, p_1, p_2, p_3, a_0, a_1, $\ldots$, a_{p_2}, et r, tels que*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{p_2} z^{p_2} + \cdots$$

étant une fonction méromorphe dans $|z| < 1$, et ayant p_i domaines au plus, se fermant dans $|z| < 1$, et correspondant à E_i $(i = 1, 2, 3)$, et $T(r, f)$ étant sa fonction caractéristique, on ait pour $r < 1$,

$$T(r, f) < \Omega + \Omega' \log \frac{r}{|\zeta|},$$

ou $|\zeta|$ désigne le minimum des modules des pôles de $f(z)$, dans $|z| < r$.

Si les nombres Ω, Ω' n'existent pas, il existe une suite de fonctions $f_n(z)$ vérifiant les conditions énoncées dans le théorème, telles que

$$T(r, f_n) > n\left(1 + \log \frac{r}{|\zeta_n|}\right), \tag{2}$$

$|\zeta_n|$ étant la valeur correspondante de $|\zeta|$, pour $f_n(z)$. Nous extrayons de la suite $f_n(z)$, une autre suite que nous désignons encore par $f_n(z)$, convergeant uniformément vers une fonction méromorphe $f(z)$, dans $|z| < 1$, sauf en un nombre fini de points irréguliers z_1. On constate aisément que $f(z)$ est distincte de la constante infinie. Soit $|z| = r'$, $r < r' < 2r$, voisin de $|z| = r$, et ne passant pas par les points irréguliers, et par les pôles de $f(z)$. Le nombre des pôles de $f_n(z)$ dans $|z| < r'$ est borné. En effet, soient z_i les points irréguliers de $f_n(z)$ dans $|z| < r'$, et α_i les valeurs correspondantes de $f(z)$, en ces points. Décrivons autour des points z_i, des cercles c_i assez petits pour que $f(z)$ n'ait pas de pôles sur ces cercles. Dès que n dépasse un certain rang, les valeurs de $f(z)$, ainsi que celles de $f_n(z)$, correspondant aux points sur c_i, sont voisines de α_i, et extérieures à deux au moins des régions E_1, E_2, E_3. Évidemment, il suffit de montrer que le nombre des pôles de $f_n(z)$ est borné dans les cercles c_1. Soit c_i un de ces cercles et supposons que ce nombre est non borné dans c_i. Si la valeur α_i de $f(z)$, en z_i, est finie, on voit aisément que $f_n(z)$ aurait plus de p_2 domaines se fermant dans c_i, et correspondant à chacune de deux au moins des régions E_1, E_2, E_3. Si α_i est infinie, le nombre des zéros de $f_n(z)$ dans c_i, serait aussi non borné, et $f_n(z)$ aurait encore plus de p_2 domaines se fermant dans c_i et correspondant à chacune de deux au moins des régions E_1, E_2, E_3. Il s'ensuit que le nombre des pôles de $f_n(z)$ dans $|z| \leqq r'$, est borné. On a donc

$$N(r', f_n) < C' \log \frac{r'}{|\zeta_n|}.$$

Dès que n dépasse un certain rang, on a

$$m(r', f_n) < C.$$

Par suite,

$$T(r', f_n) < C + C' \log \frac{r'}{|\zeta_n|}.$$

$T(r, f_n)$ étant non décroissante et $r < r' < 2r$, on a à fortiori

$$T(r, f_n) < C'' \left(1 + \log \frac{r}{|\zeta_n|}\right),$$

inégalité incompatible avec (2). Les nombres Ω, Ω' existent donc.

Paris, mai 1938.

CHI-TAI CHUANG.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. AHLFORS (L.). — *a) Sur une généralisation du théorème de* PICARD [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. 194 (1932), p. 245-247]; *b) Sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. 194 (1932), p. 1145-1147]; *c) Sur les domaines dans lesquels une fonction méromorphe prend des valeurs appartenant à une région donnée* [Acta Societatis Scientiarum Fennicae (Nova series), 2 (1933), nº 2, p. 1-17].

2. BLOCH (A.). — *a) Les théorèmes de* M. VALIRON *sur les fonctions entières et la théorie de l'uniformisation* [Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, t. 17 (1925), p. 1-22]; *b) Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle-unité* [Mémorial des Sc. math., fasc. 20 (1926)].

3. BUREAU (F.). — *Mémoire sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé* [Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liége, t. 17 (1932)].

4. LANDAU (E.). — *Ueber den* PICARD*schen Satz* [Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, t. 51 (1906)].

5. MILLOUX (H.). — *Sur la théorie des fonctions méromorphes dans le cercle unité* [Annales de l'École Normale, 3ᵉ série, t. 64 (1937), p. 151-229].

6. MIRANDA (C.). — *Sur un nouveau critère de normalité pour les familles de fonctions holomorphes* [Bulletin de la Société Mathématique t. 63 (1935), p. 185-196].

7. MONTEL (P.). — *a) Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications* (Paris 1927); *b) Le rôle des familles normales* [L'Enseignement Mathématique, t. 33 (1934)].

8. NEVANLINNA (R.). — *Le théorème de* PICARD-BOREL *et la théorie des fonctions méromorphes* (Paris, 1929).

9. OSTROWSKI (A.). — *Ueber Folgen analytischer Funktionen und einige Verscharfungen des* PICARD*schen Satzes* [Math. Zeitschrift, t. 24 (1925)].

10. SCHMIDT (E.). — *Über den* MILLOUX*schen Satz* [Sitz. der Preuss. Ak. der Wiss. Phys. Math. klasse, 25 (1932)].

11. VALIRON (G.). — *a) Recherches sur le théorème de* M. PICARD [Annales de l'École Normale, t. 38 (1921), p. 389-429]; *b) Lectures on the general Theory of integral Functions* [Deighton, Bell and Cº, Cambridge, (1923)]; *c) Familles normales et quasi-normales de Fonctions méromorphes* [Mémorial des Sc. math., fasc. 38 (1929)]; *d) Sur le domaine riemannien couvert par les valeurs d'une fonction holomorphe* [Mathematica, t. 4 (1930), p. 81-108]; *e) Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes et de leurs dérivées* [Actualités Scientifiques et Industrielles, 570 (1937)]; *f) Sur un critère de famille normale* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. 205 (1937), p. 890-892].