

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

PAUL GAUDUCHON

## **Twisteurs et applications harmoniques en dimension 4**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 4 (1985-1986), p. 35-93

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1985-1986\\_\\_4\\_\\_35\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1985-1986__4__35_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1985-1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## TWISTEURS ET APPLICATIONS HARMONIQUES EN DIMENSION 4

par *Paul GAUDUCHON*

Ce texte constitue les notes considérablement d'une conférence donnée à l'Institut Fourier en décembre 85 .

Il se compose de trois parties plus ou moins autonomes .

La première partie développe le cadre géométrique de la théorie des twisteurs dans le cas plat (au sens conforme), c'est-à-dire la théorie générale à l'ordre 1

Elle y est exposée pour ses mérites propres autant que pour ses applications à la géométrie riemannienne développées dans les deux autres parties.

En particulier, nous présentons un cadre commun pour les cas euclidien et minkowskien (et aussi celui d'un univers de signature  $(2,2)$  ), en soulignant les différences substantielles qui distinguent les deux situations dans la relation espace de twisteurs projectifs-univers réel .

La présentation adoptée suit d'assez près le premier chapitre de [W1] en évitant toutefois l'usage de coordonnées .

La théorie des twisteurs, au stade préliminaire qui est présenté ici, consiste pour l'essentiel à établir un codage d'une situation géométrique (la géométrie conforme de l'univers réel) par une autre (la géométrie complexe de l'espace des twisteurs).

En particulier, elle constitue un cadre d'où surgissent spontanément les "petits isomorphismes" entre groupes de Lie de basse dimension (sur ce point, le lecteur pourra aussi se référer à [Sa]).

Dans la seconde partie, nous exposons la construction de l'espace des twisteurs (projectifs) au-dessus d'une variété riemannienne, qui se présente, contrairement au cas minkowskien, comme une extension facile du cas plat développé dans la première partie .

L'exposé est à peu près auto-suffisant . Les démonstrations proposées - différentes de celles de [A-H-S] qui, pour la dimension 4, est le texte

de référence- sont de nature élémentaire et plus ou moins folkloriques, reprises en partie du Séminaire 81-82 de l'École Polytechnique (imprimé à ce jour) , en particulier des Exposés de J.P.Bourguignon .

La troisième partie aborde (enfin) le sujet indiqué par le titre . Elle développe essentiellement les trois points suivants :

a) Traduction holomorphe, via l'espace des twisteurs de la variété-but, des applications harmoniques d'une surface de Riemann dans une variété riemannienne orientée de dimension 4 (théorie des pseudo-immersions superminimales).

b) Existence et construction explicite d'immersions minimales (en fait, superminimales) de toute surface de Riemann compacte dans la sphère  $S^4$  au moyen de la correspondance de Bryant .

c) Théorèmes de non-injectivité des applications harmoniques de la sphère de Riemann  $S^2$  dans  $S^4$  ou dans le plan projectif complexe  $CP^2$ .

Le parti adopté tout au long du texte a été de n'utiliser, dans la mesure du possible, que des techniques de géométrie différentielle élémentaires (connexions, crochets de champs de vecteurs etc...).

Le résultat est un texte long, mais, je l'espère, de lecture aisée.

L'ensemble a beaucoup bénéficié de conversations avec J.Lafontaine et S.Salamon .

Je remercie vivement l'Institut Fourier pour l'hospitalité qu'il m'a offerte à moi-même dans ses murs et à ce texte dans ses Notes de Séminaire.

## §1. TWISTEURS PLATS.

## I. L'UNIVERS COMPLEXE ET SA STRUCTURE CONFORME.

1. Nous considérons un espace vectoriel complexe  $T$  de dimension 4, l'espace des twisteurs.

Par commodité, nous fixons un élément de volume complexe dans  $T$ , i.e. un élément non-nul  $\eta$  de  $\Lambda^4 T$ . Nous noterons  $Sl(T, \eta)$  le groupe des automorphismes  $C$ -linéaires de  $T$  qui préservent  $\eta$ .

A partir de l'espace des twisteurs  $T$  nous fabriquons deux variétés complexes compactes de dimensions respectives 3 et 4, l'espace des twisteurs projectifs  $P(T)$ , noté  $Z$ , et la grassmannienne  $G$  des 2-plans (complexes) de  $T$ , que nous appelons l'univers complexe.

2. Au-dessus de  $G$  nous considérons la suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes

$$(S) \quad 0 \rightarrow E \rightarrow G \times T \rightarrow F \rightarrow 0$$

où  $E$  est le fibré tautologique qui, en  $P \in G$ , admet le 2-plan  $P$  pour fibre, et  $G \times T$  est le fibré trivial de fibre  $T$ ,  $F$  le fibré de fibre  $T/P$  en  $P$ .

Le fibré tangent (holomorphe)  $TG$  de  $G$  s'identifie naturellement au fibré  $\text{Hom}(E, F) \simeq F \otimes E^*$ .

L'isomorphisme peut être explicité comme suit : à  $X \in T_p G$  nous associons l'homomorphisme  $\xi$  de  $P$  dans  $T/P$  :

$$(1) \quad u \in P \rightarrow \dot{u}(0) \in \text{modulo } P,$$

où  $P(\tau)$  est une courbe holomorphe de  $G$  déterminant  $X$  ( $P(0)=P, \dot{P}(0)=X$ ),  $u(\tau)$  un relèvement (holomorphe) quelconque dans  $T$  de  $P(\tau)$ ,  $u(0)=u$ ,  $\dot{u}(0)$  la dérivée, au sens ordinaire, de  $u$  par rapport à  $\tau$ .

Ainsi, pour tout  $P$  de  $G$ , on a l'identification

$$(2) \quad T_p G \simeq \text{Hom}(P, T/P).$$

3. L'univers complexe  $G$  est muni naturellement d'une structure conforme complexe (=holomorphe).

Le cône de lumière correspondant  $Q$  est défini, au point  $P$ , par

$$(3) \quad Q_P = \{X \in T_P G = \text{Hom}(P, T/P) \mid X \text{ est de rang } < 2\} .$$

La forme quadratique holomorphe associée est le déterminant qui prend ses valeurs dans le fibré en droites holomorphe  $\Delta$  de fibre  $\text{Hom}(\Lambda^2 P, \Lambda^2(T/P))$ .

4. Pour caractériser géométriquement ce fibré, nous introduisons une seconde description de l'univers complexe fondée sur l'observation que  $\Lambda^2 P$  peut être considéré comme une droite complexe de l'espace  $\Lambda^2 T$  -que nous noterons  $V$  dans la suite- et détermine entièrement le 2-plan  $P$ .

L'univers complexe  $G$  apparaît ainsi comme la quadrique de l'espace projectif  $P(V)$  déterminée par

$$(4) \quad G = \{[\phi] \in P(V) \mid \phi \wedge \phi = 0\} .$$

où  $\phi$  note un élément de  $V$  et  $[\phi] = \Lambda^2 P$  la droite complexe (=l'élément de  $P(V)$ ) qu'il détermine.

On observe que le produit extérieur  $\phi \wedge \phi$  peut être considéré, via  $\eta$ , comme une forme quadratique scalaire (complexe) sur  $V$ , que nous noterons  $q$ .

Nous désignerons désormais, de façon générique, par  $\phi$  un élément de la droite  $\Lambda^2 P$ , également notée  $[\phi]$ , de  $V$ , identifiée au 2-plan  $P$  de  $T$ .

L'espace tangent  $T_P G$  est maintenant susceptible d'une nouvelle description comme sous-espace (complexe) de  $T_P(P(V))$  :

$$(5) \quad T_P G = \text{Hom}([\phi], H_\phi / [\phi]) \subset \text{Hom}([\phi], V / [\phi]) = T_P(P(V)) ,$$

où  $H_\phi$  est l'hyperplan de  $V$  constitué des 2-formes  $\Psi$  telles que

$$\phi \wedge \Psi = 0 .$$

L'isomorphisme (5) est décrit comme suit : à  $X \in T_P G$  nous associons l'homomorphisme  $\tilde{\gamma}$  de  $[\phi] = \Lambda^2 P$  dans  $H_\phi / [\phi]$  :

$$(6) \quad \phi \in \Lambda^2 P \quad \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \quad \dot{\phi}(0) \text{ modulo } \phi$$

où  $\phi(\tau)$  est un relèvement holomorphe quelconque de  $P(\tau)$  dans  $V = \Lambda^2 T$ ,  $\phi(0) = \phi$ , et  $\dot{\phi}(0)$  sa dérivée en zéro (puisque  $\phi(\tau) \wedge \phi(\tau) = 0$ ,  $\forall \tau$ , la dérivée  $\dot{\phi}(0)$  appartient bien à  $H_\phi$ ).

5. Soit  $N$  le fibré normal  $T(P(V))|_G/TG$  de  $G$  dans  $P(V)$ .

De (5), nous déduisons l'identification

$$(7) \quad N_P = \text{Hom}([\phi], V/H_\phi) .$$

L'espace  $V/H_\phi$  est susceptible de deux identifications naturelles qui renvoient respectivement aux isomorphismes (2) et (5) :

$$(8) \quad V/H_\phi = \Lambda^2(T/P) \quad \Rightarrow \quad N_P = \text{Hom}(\Lambda^2 P, \Lambda^2(T/P)),$$

i.e.  $N$  s'identifie au fibré  $\Delta$  précédemment introduit, et

$$(9) \quad V/H_\phi \stackrel{\text{via } \eta}{=} [\phi]^* \quad \Rightarrow \quad N_P = [\phi]^* \otimes [\phi]^* ,$$

i.e.  $N$  s'identifie naturellement au carré tensoriel du dual de la restriction  $L$  du fibré tautologique de  $P(V)$ .

De (8), nous voyons que la structure conforme complexe de  $G$  est une forme quadratique holomorphe (non-dégénérée) à valeurs dans le fibré normal de  $G$  dans  $P(V)$ .

REMARQUE. La classe de Chern de  $L = \Lambda^2 E$  est le générateur négatif de  $H^2(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ . En particulier,  $N = L^* \otimes L^*$  n'est pas trivial (ni comme fibré vectoriel holomorphe, ni même comme bibré vectoriel complexe) et il n'existe sur  $G$  aucune métrique complexe (=forme quadratique holomorphe scalaire non-dégénérée) compatible avec la structure conforme.

Une telle métrique n'existe que si les fibrés tangent et cotangent sont isomorphes (comme fibrés vectoriels holomorphes).

6. Le passage des isomorphismes (2) et (5) de  $T_P G$  est illustré par le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} X \in T_P G & \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{l} \xi \in \text{Hom}(P, T/P) \\ + \\ \tilde{\xi} \in \text{Hom}([\phi], H_\phi/[\phi]) \end{array} \end{array}$$

avec

$$(10) \quad \tilde{\xi}(\phi) = \xi(u) \wedge v + u \wedge \xi(v)$$

pour  $u$  et  $v$  dans  $T$  tels que  $\phi = u \wedge v$ .

On a donc

$$(11) \quad \check{\xi}(\phi) \wedge \check{\xi}(\phi) = 2\phi \wedge \det(\phi)$$

où le terme de droite est bien défini puisque  $\det \xi(\phi)$  appartient à  $\Lambda^2 T$  modulo  $H_\phi$ .

Ainsi, la structure conforme de  $G$ , vue comme forme quadratique à valeurs dans  $N$  version (9), n'est autre que le produit extérieur  $\check{\xi} \wedge \check{\xi}$  (vu, par (11), comme une forme quadratique sur le fibré  $L$ , via  $\eta$ ).

7. Pour  $\phi$  fixé dans  $\Lambda^2 P$ , l'espace tangent  $T_P G$  s'identifie, par (5), à l'espace quotient  $H_\phi / [\phi]$  et le cône de lumière  $Q_P$  à l'ensemble des éléments de  $H_\phi / [\phi]$  de carré extérieur nul.

Nous réalisons ainsi le cône de lumière  $Q_P$  en  $P$  dans  $G$  par l'isomorphisme

$$Q_P \quad \xrightarrow{\text{via le choix de } \phi \text{ dans } \Lambda^2 P} \quad \check{Q}_P = G \setminus [H_\phi],$$

où  $[H_\phi]$ , l'hyperplan projectif de  $P(V)$  associé à  $H_\phi$ , est l'hyperplan projectif tangent à  $G$  en  $P$ .

Le cône de lumière réalisé en  $G$  est l'ensemble des 2-plans de  $T$  qui rencontrent  $P$ .

Pour  $P' \in \check{Q}_P$ ,  $P' \neq P$ , la droite projective de  $P(V)$  déterminée par  $P$  et  $P'$  est entièrement contenue dans  $\check{Q}_P$  et constitue une géodésique nulle de la structure conforme (ou rayon lumineux complexe).

Chaque rayon lumineux complexe  $\gamma$  de  $G$  est déterminé par un couple  $(x, \Sigma)$  où  $x$  est une droite complexe et  $\Sigma$  un 3-plan complexe de  $T$  contenant  $x$ , ou encore,  $x$  est un point de l'espace des twisteurs projectif  $Z$  et  $\Sigma$  un plan projectif de  $Z$  contenant  $x$ .

Les éléments de  $\gamma$  sont les 2-plans complexes de  $T$  contenant  $x$  et contenus dans  $\Sigma$ , ou encore, puisque les points de  $G$  sont les droites projectives de  $Z$ , les droites projectives passant par  $x$  et contenues dans le plan projectif  $\Sigma$ .

8. Ceci nous ramène à l'espace des twisteurs projectifs  $Z$  que nous avons négligé jusqu'à présent.

L'objectif est de coder la structure conforme complexe de l'univers complexe en termes ne faisant intervenir que la seule structure de variété complexe de l'espace des twisteurs projectifs  $Z$  ainsi que la famille

des droites projectives considérées avec leur seule structure de sous-variétés complexes de  $Z$ .

9. Nous noterons, de façon générique,  $D$  la droite projective de  $Z$  associée au 2-plan  $P$  (qui est lui-même un point de  $G$ ).

Le cône de lumière  $Q_p$ , lu dans  $Z$ , est constitué des droites projectives de  $Z$  qui rencontrent  $D$ .

Pour lire le cône de lumière (infinitésimal)  $Q_p$  dans  $Z$ , il nous faut d'abord lire l'espace tangent  $T_p G$ .

Considérons le fibré normal  $N^D$  de  $D$  dans  $Z$ , i.e. le quotient  $TZ|_D / TD$ , où  $TD$  est le fibré tangent (holomorphe) de  $D$  et  $TZ|_D$  la restriction à  $D$  de  $TZ$ .

PROPOSITION. Il existe un isomorphisme naturel

$$(12) \quad T_p G \cong H^0(D, N^D)$$

où  $H^0(D, N^D)$  note l'espace des sections holomorphes de  $N^D$ . Le cône de lumière  $Q_p$  s'identifie à l'ensemble des sections holomorphes de  $N^D$  qui admettent un zéro sur  $D$ .

Démonstration. Pour  $x \in D$ , on a

$$T_x Z = \text{Hom}(x, T/x) \quad \text{et} \quad T_x D = \text{Hom}(x, P/x)$$

de sorte que

$$N_x^D = \text{Hom}(x, T/P) = T/P \otimes x^* .$$

Si  $L^D$  note le fibré tautologique sur  $D$ , vue comme la droite projective  $P(P)$ , on a donc

$$(13) \quad N^D = T/P \otimes (L^D)^*$$

où  $T/P$  note le fibré trivial de fibre  $T/P$  au-dessus de  $D$ .

Il est bien connu que l'espace des sections holomorphes du dual du fibré tautologique d'un espace projectif complexe  $P(W)$  s'identifie au dual  $W^*$ . Ainsi,

$$H^0(D, N^D) = T/P \otimes H^0(D, (L^D)^*) = T/P \otimes P^* ,$$

qui prouve la première partie de la Proposition (via (2)).

La seconde s'en déduit immédiatement.

Nous avons ainsi respecté les prescriptions formulées plus haut, car  $N^D$  et  $H^0(D, N^D)$  ne dépendent que de la structure de sous-variété complexe de  $D$  dans  $Z$ .

10. Les automorphismes de variété complexe de  $Z$  sont linéaires : chacun est induit par un automorphisme  $C$ -linéaire de  $T$ , que l'on peut choisir dans  $Sl(T, \eta)$ . Ce dernier groupe est un revêtement à 4 feuillets du groupe  $AutZ = PGL(T)$ .

Chaque élément de  $Sl(T, \eta)$  induit un automorphisme  $C$ -linéaire de  $V = \Lambda^2 T$  qui préserve la forme quadratique  $q$ , donc un élément du groupe orthogonal complexe  $O(V, q)$ .

Le quotient  $O(V, q) / \{\pm I\}$ , où  $I$  est l'identité, apparaît comme le groupe des automorphismes de l'univers complexe  $G$  à la fois comme variété complexe et comme variété complexe munie de sa structure conforme complexe. Les deux groupes  $PGL(T)$  et  $O(V, q) / \{\pm I\}$  sont isomorphes et l'homomorphisme

$$(14) \quad \rho: Sl(T, \eta) \xrightarrow{2:1} O(V, q)$$

est un revêtement à deux feuillets, identifiant  $Sl(T, \eta)$  au groupe spinoriel  $Spin(V, q)$ .

En composantes, on a

$$(14)' \quad \rho: Sl(4, C) \xrightarrow{2:1} O(6, C)$$

11. Choisissons un 2-plan  $P_0$  comme origine dans  $G$  et un 2-plan supplémentaire à l'infini  $P_\infty$ .

L'ouvert  $U = G - \hat{Q}_P$ , constitué des 2-plans d'intersection nulle avec  $P_\infty$ , s'identifie à l'espace vectoriel  $Hom(P_0, P_\infty)$  : à  $A \in Hom(P_0, P_\infty)$  est associé le 2-plan  $P_A$  constitué des éléments  $\{u + Au \mid u \in P_0\}$ .

L'espace tangent  $T_P G$  s'identifie lui-même à  $Hom(P_0, P_\infty)$ , et cette identification est liée à l'isomorphisme (2) par

$$(15) \quad P_A \xrightarrow{\sim} P_0 \xrightarrow{\dot{A}(0)} P_\infty \xrightarrow{\sim} T/P_A \quad .$$

Le fibré  $\Delta$  de fibre  $\text{Hom}(\Lambda^2 P_A, \Lambda^2(T/P_A))$  est lui-même identifié, sur l'ouvert  $U$ , au fibré trivial  $U \times \text{Hom}(\Lambda^2 P_0, \Lambda^2 P_\infty)$ , transformant ainsi, sur  $U$ , la structure conforme complexe de  $G$  en la métrique holomorphe plate canonique de  $\text{Hom}(P_0, P_\infty)$  qui, à tout homomorphisme, associe son déterminant.

L'univers complexe  $G$  est donc le compactifié conforme de l'univers plat complexe à 4 dimensions, obtenu en lui adjoignant son cône de lumière à l'infini.

Son groupe d'automorphismes  $O(V, q)/\{\pm I\} = O(6, C)/\{\pm I\}$  est le groupe de Mœbius complexe  $M(4, C)$ .

Au vu de (14)', nous pouvons dire que l'espace des twisteurs (plats)  $T$  est l'espace de représentation  $C$ -linéaire fondamental du revêtement universel (à deux feuillets) du groupe de Mœbius complexe  $M(4, C)$ .

Remarque. Donnons-nous une structure hermitienne (définie positive) sur  $T$ , compatible avec .

La restriction de la forme quadratique  $q$  à l'espace des éléments auto-duaux de  $V = \Lambda^2 T$  (=invariants par l'opérateur  $*$  de Hodge  $C$ -antilinéaire associé) est réelle et définie positive.

De (14)', nous déduisons alors l'homomorphisme de revêtement

$$(16) \quad \text{SU}(4) \xrightarrow{2:1} \text{SO}(6)$$

qui identifie le groupe spécial unitaire  $\text{SU}(4)$  au groupe  $\text{Spin}(6)$ .

12. Nous nous proposons de faire surgir, à l'intérieur de l'univers complexe  $G$ , des formes réelles (compactes) munies, par restriction de la structure conforme complexe de  $G$ , d'une structure conforme réelle de signature  $(2,2)$ ,  $(3,1)$  ou  $(4,0)$ , au moyen d'un enrichissement de la structure de l'espace des twisteurs  $T$ .

Par I.11, chacun de ces espaces est le compactifié conforme de l'espace plat de signature correspondante.

Nous insisterons particulièrement sur le cas euclidien (signature  $(4,0)$ ) qui se prête le plus facilement à généralisation dans le cas non-plat.

Dans le cas des trois signatures, la structure additionnelle de  $T$  aboutit à une structure réelle de  $V = \Lambda^2 T$  pour laquelle la restriction de la forme quadratique  $q$  à l'espace des éléments réels est de signature  $(3,3)$ ,  $(2,4)$  et  $(5,1)$  respectivement.

## II. L'UNIVERS REEL DE SIGNATURE (2,2).

1. Nous considérons, sur l'espace des twisteurs  $T$ , une structure réelle  $\tau$  (=un automorphisme  $C$ -antilinéaire de  $T$  de carré  $+1$ ) telle que l'élément de volume  $\eta$  soit réel, i.e. identifié à un élément  $\eta^R$  de  $\Lambda^4(T^R)$  où  $T^R$  est l'espace des éléments réels de  $T$ .

Cette structure réelle induit une structure réelle sur  $V = \Lambda^2 T$ .

La variété  $G^R$  des éléments réels de  $G$  est la grassmannienne des 2-plans (réels) de  $T^R$ , canoniquement plongée dans  $G$  en identifiant chaque 2-plan  $P^R$  de  $T^R$  avec son complexifié  $P$  dans  $T = T^R \otimes C$ .

Pour l'espace tangent  $T_P G^R$ , nous avons, de même, l'identification

$$(17) \quad T_P G^R = \text{Hom}(P^R, T^R/P^R) \quad \subset \quad T_P G = \text{Hom}(P, T/P) .$$

Par restriction de la structure conforme complexe de  $G$ , nous obtenons, sur  $G^R$ , une structure conforme réelle de signature (2,2), donnée, en coordonnées, par

$$(18) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det \quad ab - cd, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} .$$

Le cône de lumière réel  $Q_P^R$  en  $P$  est l'ensemble des homomorphismes (réels) de  $P^R$  dans  $T^R/P^R$  de rang inférieur à 2.

2. La restriction  $q^R$  de  $q$  au sous-espace  $V^R = \Lambda^2(T^R)$  des éléments réels de  $V$  est une forme quadratique réelle de signature (3,3) : ses éléments propres sont les éléments autoduaux et anti-autoduaux de  $\Lambda^2(T^R)$  pour toute structure euclidienne de  $T^R$  compatible avec  $\eta^R$ .

L'univers réel  $G^R$  est donc une quadrique de l'espace projectif réel  $P(V^R)$  de signature (3,3).

Comme telle, il est difféomorphe au quotient  $S^2 \times S^2 / \{\pm 1\}$ .

3. Pour  $P_0^R$  et  $P_\infty^R$  deux 2-plans supplémentaires de  $T^R$ , nous voyons, comme en I.11, que l'univers réel  $G^R$  est le compactifié conforme de l'espace vectoriel réel  $\text{Hom}_R(P_0^R, P_\infty^R) = G^R - Q_P^R$  pour la métrique plate associée au déterminant.

Le groupe de transformations conformes de  $G^R$ , i.e. le groupe de Moebius  $M(G^R)$ , est le sous-groupe  $O(V^R, q^R) / \{\pm 1\}$  du groupe de Moebius complexe  $O(V, q) / \{\pm 1\}$  (cf. I.11).

De (14), nous déduisons l'homomorphisme de revêtement

$$(18) \quad \rho^R: \text{Sl}(T^R, R) \xrightarrow{2:1} \text{SO}_0(V^R, q^R)$$

où, ici comme dans la suite,  $\text{SO}_0$  désigne la composante connexe de l'identité du groupe orthogonal.

En composantes, cet homomorphisme s'écrit

$$(18)' \quad \rho^R: \text{Sl}(4, R) \xrightarrow{2:1} \text{SO}_0(3, 3) = M_0(2, 2)$$

où  $M_0(2, 2)$  note la composante connexe de l'identité du groupe de Moebius en signature  $(2, 2)$ .

4. L'espace des twisteurs projectifs  $Z$  est lui-même le complexifié de la variété réelle  $Z^R = P(T^R)$ .

Les relations entre  $Z^R$  et  $G^R$  sont le calque réel de celles de  $Z$  et  $G$  : les points de  $G^R$  sont les droites projectives (réelles) de  $Z^R$ , celles-ci se rencontrent si et seulement si les points correspondants de  $G^R$  sont liés par un rayon lumineux etc... .

### III. L'UNIVERS MINKOWSKIEN.

1. Nous partons, cette fois, d'une structure hermitienne  $h$  de signature  $(2, 2)$  sur l'espace des twisteurs  $T$ , compatible avec  $\eta$  ( $\eta = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ , où  $\{e_i\}$  est  $h$ -orthonormée).

La structure hermitienne  $h$  induit, sur l'algèbre extérieure de  $T$ , un opérateur  $*$   $C$ -antilinéaire, défini par

$$(19) \quad \alpha \wedge * \beta = h(\alpha, \beta) \eta, \quad \alpha, \beta \in \Lambda^1 T, i=0, \dots, 4,$$

dont la restriction à  $\Lambda^2 T$  est un anti-automorphisme de carré  $+1$ , donc une structure réelle de  $\Lambda^2 T$ .

L'espace des éléments réels, c'est-à-dire  $*$ -autoduaux, de  $V$  est noté  $V^*$ . La variété  $M$  des points réels de  $G$  est exactement la variété des 2-plans h-isotropes de  $T$  (tels que la restriction de  $h$  soit nulle).

Nous obtenons ainsi, pour l'espace tangent  $T_p M$ , l'identification :

$$(20) \quad T_p M = \text{Hom}_a(P, T/p) \subset T_p G = \text{Hom}(P, T/p),$$

où  $\text{Hom}_a(P, T/p)$  est l'espace vectoriel (réel) des homomorphismes anti-her-

mitien de  $P$  dans  $T/P$ , vérifiant la relation

$$(21) \quad h(Au, v) + h(u, Av) = 0, \quad u, v \in P.$$

(A noter que (21) n'a de sens que pour un 2-plan  $P$   $h$ -isotrope puisque  $A$  prend ses valeurs dans  $T/P$ ).

Par restriction de la structure conforme complexe de  $G$ , nous obtenons, sur  $M$ , une structure conforme réelle de signature (3,1), donnée, en coordonnées, par

$$(22) \quad \begin{pmatrix} ia & z \\ -\bar{z} & ib \end{pmatrix} \xrightarrow{\det} -ab + |z|^2, \quad a, b \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}.$$

Le cône de lumière réel  $Q_P^+$  est constitué des homomorphismes anti-hermitiens de  $P$  dans  $T/P$  de rang inférieur à 2. Son image dans  $P(T_P M)$  est une sphère  $S^2$ .

2. La restriction  $q^+$  de  $q$  à l'espace  $V^+$  des éléments réels de  $V$  (pour la  $*$ -structure réelle) est une forme quadratique réelle de signature égale à celle de la structure hermitienne induite sur  $V = \Lambda^2 T$  par  $h$ , donc (2,4).

L'univers minkowskien est ainsi une quadrique de signature (2,4) dans l'espace projectif réel  $P(V^+)$ . En particulier, il est difféomorphe au quotient  $S^1 \times S^3 / \{\pm 1\}$  (cf. aussi, plus loin III.4).

3. Pour  $P_0$  et  $P_\infty$  deux 2-plans  $h$ -isotropes supplémentaires dans  $T$ , l'univers minkowskien  $M$  est le compactifié conforme de l'espace vectoriel réel  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(P_0, P_\infty) = M - Q_P^+$  muni de la métrique plate associée au déterminant (cf. I.11).

Le groupe de transformations conformes (=groupe de Moebius)  $M(M)$  de  $M$  est le sous-groupe  $O(V^+, q^+) / \{\pm 1\}$  du groupe de Moebius complexe  $O(V, q) / \{\pm 1\}$

Le sous-groupe qui lui correspond dans  $S(T, )$  est celui qui préserve la structure hermitienne  $h$ , soit  $SU(T, h, )$ .

De (14), nous déduisons alors l'homomorphisme de revêtement

$$(23) \quad \rho^+ : SU(T, h, ) \xrightarrow{2:1} SO_0(V^+, q^+)$$

qui se lit, en coordonnées,

$$(23)' \quad \begin{array}{ccc} & 2:1 & \\ \rho^+ : \text{SU}(2,2) & \rightarrow & \text{SO}_0(2,4) = \text{M}(3,1) \\ \cong & & \\ & & \text{Spin}(2,4) \end{array}$$

où  $\text{M}_0(1,3)$  est la composante connexe de l'identité du groupe de Moebius en signature (3,1).

4. Choisissons un 2-plan positif  $\Pi_0$  dans  $T$  ( $h|_{\Pi_0}$  est définie positive) que nous considérons comme un super-observateur  $o$  de l'univers réel  $M$  ( $\Pi_0$  appartient à  $G$  mais non à  $M$ ).

Le 2-plan  $h$ -orthogonal  $\Pi_\infty$  est négatif ( $h|_{\Pi_\infty}$  est définie-négative) et la variété  $M$  est entièrement contenue -via le graphe- dans l'espace vectoriel  $\text{Hom}(\Pi_0, \Pi_\infty)$  où elle s'identifie à la variété  $U(\Pi_0, \Pi_\infty)$  des isomorphismes  $h$ -unitaires de  $\Pi_0$  sur  $\Pi_\infty$  définis par

$$(24) \quad \langle Au, Av \rangle = -\langle u, v \rangle, \quad u, v \in \Pi_0.$$

Modulo le choix de repères  $h$ -orthonormés sur  $\Pi_0$  et sur  $\Pi_\infty$  nous identifions ainsi l'univers minkowskien au groupe unitaire  $U(2)$ .

En outre, le choix du 2-plan positif  $\Pi_0$  fixe une métrique (minkowskienne) dans la classe conforme de  $M$ .

En effet, si  $P \in M$  est associé à  $A \in U(\Pi_0, \Pi_\infty)$ , les éléments de  $T_P M$  s'identifient, via l'action de  $A^{-1}$ , aux endomorphismes anti-hermitiens de  $\Pi_0$ , dont le déterminant est parfaitement défini.

La métrique ainsi obtenue, lue dans  $U(2)$ , est la métrique minkowskienne construite à partir de la métrique riemannienne bi-invariante en inversant le signe sur les directions déterminées par l'action du centre.

5. La structure hermitienne  $h$  de  $T$  détermine, dans l'espace des twisteurs projectifs  $Z$  deux ouverts correspondant aux conditions :  $h < 0$  et  $h > 0$ , séparés par l'hypersurface réelle  $N$  constituée des droites  $h$ -isotropes de  $T$ .

Nous voyons aisément (cf. I.7) que les points de  $N$  sont en correspondance bijective avec les rayons lumineux (=les géodésiques nulles) de l'univers minkowskien  $M$ .

De façon précise, le rayon lumineux associé à la droite complexe  $h$ -isotrope  $x$  de  $T$  est l'ensemble des 2-plans  $h$ -isotropes de  $T$  (vus comme points de  $M$ ) contenant  $x$  et contenus dans le 3-plan  $*x$  qui est aussi le  $h$ -orthogonal  $x^\perp$  de  $x$  dans  $T$  (et contient  $x$  lui-même puisque  $x$  est  $h$ -isotrope).

Ainsi, dans le cas minkowskien, l'introduction de l'espace des twisteurs a pour effet de substituer à l'espace-temps, dont les points sont les événements élémentaires, la variété  $N$  dont les points sont les rayons lumineux de l'espace-temps, et de réaliser de façon naturelle cette dernière variété -qui est une variété réelle de dimension 5, difféomorphe à  $S^2 \times S^3$ - comme une hypersurface (réelle) d'une variété complexe, l'espace des twisteurs projectifs.

Ceci est le point de départ de la théorie des twisteurs de R. Penrose.

#### IV. L'UNIVERS EUCLIDIEN.

1. Nous partons d'une structure quaternionnienne sur  $T$ , i.e. un opérateur  $j$   $\mathbb{C}$ -antilinéaire, de carré  $-1$ .

L'espace des twisteurs peut ainsi être considéré comme un  $H$ -espace vectoriel ( $H$  = le corps des quaternions) et, comme tel, sera noté  $T^H$ .

Nous conviendrons de faire agir  $H$  à droite de manière à préserver le formalisme matriciel usuel.

L'action de  $j$  s'étend à l'algèbre extérieure de  $T$ , induisant une structure quaternionnienne en degré impair et une structure réelle en degré pair.

En particulier, l'espace  $V = \Lambda^2 T$  se trouve muni d'une structure réelle.

Nous noterons  $V^j$  l'espace vectoriel (réel) des éléments réels (=  $j$ -invariants) de  $V$ .

Nous supposons aussi que l'élément de volume complexe  $\eta$  est réel, i.e. de la forme  $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_1 j \wedge \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_2 j$ .

La forme réelle correspondante de  $G$ , notée  $S$ , est la variété des 2-plans réels (=  $j$ -invariants) de  $T$ , i.e. des droites quaternionniennes de  $T^H$ .

Nous avons, pour l'espace tangent  $T_p S$  plongé dans son complexifié  $T_p G$ , l'identification

$$(26) \quad T_p S = \text{Hom}_H(P, T^H/P) \quad T_p G = \text{Hom}(P, T/P) \quad .$$

Par restriction de la structure conforme complexe de  $G$ ,  $S$  se trouve naturellement munie d'une structure conforme réelle, dont le cône de lumière (réel) en chaque point  $P$  est réduit à l'origine de  $T_p S$ .

Cette structure peut être explicitée de la façon suivante.

Pour  $P \in S$ , choisissons deux éléments non-nuls,  $u$  dans  $P$  et  $[v]$  dans  $T/P$ , faisant chacun fonction de  $H$ -repère dans les droites quaternionniennes  $P$  et  $T/P$ .

Pour des raisons qui seront développées plus loin, un tel couple  $\{u, [v]\}$  sera appelé un repère spinoriel (conforme) sur  $S$  en  $P$ .

Par ce choix, nous obtenons l'identification (matricielle) d'espaces vectoriels

$$(27) \quad T_P S = \text{Hom}_H(P, T^H/P) \xrightarrow{\sim} H = \mathbb{R}^4,$$

qui, à  $X \in T_P S$ , associe le quaternion  $r_X$  défini par

$$(28) \quad X(u) = [v] r_X.$$

Si le repère spinoriel  $\{u, [v]\}$  est remplacé par  $\{u'=up, [v']=[v]q\}$ ,  $r_X$  est remplacé par

$$(29) \quad r'_X = q^{-1} r_X p.$$

Cette opération préserve la métrique naturelle, à un changement d'échelle près, et l'orientation naturelle de  $H=\mathbb{R}^4$ .

De façon précise, (29) identifie le groupe quotient  $H^* \times H^* / \mathbb{R}^*$  -où  $H^*$  note le groupe multiplicatif des quaternions non-nuls et  $\mathbb{R}^*$  le sous-groupe des réels non-nuls plongé de façon diagonale dans  $H^* \times H^*$  - au groupe spinoriel conforme  $CO^+(4)$ .

Ainsi, l'identification (27) induit à la fois la structure conforme naturelle de  $S$  et une orientation.

Si nous écrivons  $r_X = \alpha + j\beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , la structure conforme (réelle) se lit, par (28)

$$(30) \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \xrightarrow{\det} |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

qui est clairement de signature  $(4,0)$ .

2. La restriction  $q^j$  de la forme quadratique complexe  $q$  à  $V^j$  est une forme quadratique réelle de signature  $(1,5)$ .

Ainsi  $S$  est une quadrique de signature  $(1,5)$  dans l'espace projectif réel  $P(V^j)$ .

En particulier,  $S$  est difféomorphe à la sphère  $S^4$ .

Ce difféomorphisme peut être également déduit de (25), via la projection

stéréographique

$$(31) \quad (p:q) \in P(\mathbb{H}^2) \xrightarrow{\sim} \left( \frac{|p|^2 - |q|^2}{|p|^2 + |q|^2}, \frac{2p\bar{q}}{|p|^2 + |q|^2} \right) \in S^4 \subset \mathbb{R}^5 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}.$$

Le groupe de Moebius  $M(S)$  de  $S$  est le sous-groupe  $O(V^j, q^j) / \{\pm 1\}$  du groupe de Moebius complexe  $O(V, q) / \{\pm 1\}$ , tandis que le sous-groupe de  $Sl(T, \eta)$  qui préserve la structure quaternionnienne de  $T$  est le groupe  $Sl(T, \eta) \cap Gl(T^H)$  que nous notons  $Sl(T^H, \eta)$ .

De (14) nous tirons alors l'homomorphisme de revêtement

$$(32) \quad \rho^j: Sl(T^H, \eta) \xrightarrow{2:1} SO_0(V^j, q^j),$$

qui s'écrit en coordonnées

$$(32)' \quad \rho^j: Sl(2, \mathbb{H}) \xrightarrow{2:1} SO_0(1, 5) = M_0(4)$$

où  $M_0(4)$  est la composante connexe du groupe de Moebius euclidien.

3. De I.11 nous déduisons, comme dans le cas des signatures (2,2) et (3,1) que l'univers réel euclidien  $S$  est le compactifié conforme de l'espace vectoriel réel  $\text{Hom}_{\mathbb{H}}(P_0, P_\infty) = S - \{P_\infty\}$  - où  $P_0$  et  $P_\infty$  sont deux droites quaternionniennes supplémentaires dans  $T^H$  - muni de la métrique plate (euclidienne) associée au déterminant.

4. Que se passe-t-il du côté des twisteurs projectifs ?

La structure quaternionnienne  $j$  induit sur la variété complexe  $Z$  une structure réelle (=un anti-automorphisme de carré +1) sans point fixe, qui, à tout  $x$  de  $Z$ , associe la droite complexe  $xj$  de  $T$ .

Par chaque point  $x$  de  $Z$  passe une unique droite projective réelle (=  $j$ -invariante) de  $Z$ : la droite projective déterminée par  $x$  et  $xj$ .

Cette droite projective est la droite quaternionnienne de  $T^H$  engendrée par la droite complexe  $x$ .

Nous obtenons de cette manière, dans le cas euclidien, une fibration -que nous noterons  $\pi$  - de l'espace des twisteurs projectifs  $Z$  sur l'univers réel  $S$ :

$$\begin{array}{c} Z \\ \downarrow \pi \\ S \end{array}$$

La fibre  $\pi^{-1}(P)$ ,  $P \in S$ , est constituée de l'ensemble des droites complexes de  $T$  (=points de  $Z$ ) contenues dans le 2-plan complexe  $P$ . Autrement dit, l'espace fibré  $Z$  s'identifie au fibré en droites projectives  $P(E|_S)$  associé à la restriction  $E|_S$  à  $S$  du fibré tautologique  $E$  sur  $G$  (introduit en I.2):

$$(33) \quad Z = P(E|_S) .$$

Nous verrons un peu plus loin comment interpréter  $E|_S$  (et aussi  $F|_S$ ) comme un fibré de (demi-)spineurs au-dessus de  $S$ .

5. Nous donnons une seconde interprétation de la fibration  $\pi$  de  $Z$  au-dessus de  $S$  en observant ceci : pour  $P \in S$ , chaque point  $x \in \pi^{-1}(P)$  détermine un sous-espace complexe  $\theta_x$ , de dimension 2, de  $T_p G$  (qui est le complexifié de  $T_p S$ ) : l'espace des homomorphismes de  $P$  dans  $T/p$  dont le noyau est la droite complexe  $x$ .

Cet espace est isotrope pour la structure conforme complexe, i.e. contenu dans le cône de lumière complexe  $Q_p$ .

L'espace conjugué  $\bar{\theta}_x$  (pour la structure  $j$ -réelle de  $T_p G$ ) est l'espace  $\theta_{xj}$ , de sorte que

$$(34) \quad \theta_x \cap \bar{\theta}_x = \{0\}$$

puisque  $x$  et  $xj$  engendrent le 2-plan  $P$ .

Chaque sous-espace isotrope maximal (=de dimension complexe 2) de  $T_p G$  vérifiant (34) -cette précision est en fait superflue puisque le cône de lumière réel de  $T_p G$  est réduit à  $\{0\}$  - détermine, à conjugaison près, une structure complexe sur  $T_p S$  dont il est l'espace des vecteurs de type  $(1,0)$  ou celui des vecteurs de type  $(0,1)$  dans  $T_p G = T_p S \otimes \mathbb{C}$ .

Dans le cas présent, nous convenons d'associer à  $x$  la structure complexe  $J_x$  de  $T_p S$  dont  $\theta_x$  est l'espace des vecteurs de type  $(0,1)$  et, donc,  $\bar{\theta}_x = \theta_{xj}$  l'espace des vecteurs de type  $(1,0)$ .

De façon plus explicite,  $J_x$  est décrite ainsi : pour  $u$  fixé sur la droite complexe  $x$  dans  $P$  ( $u \neq 0$ ), chaque vecteur  $X$  de  $T_p S = \text{Hom}_{\mathbb{H}}(P, T^H/p)$  est déterminé par sa valeur  $X(u)$  dans  $T/p$ , et  $J_x X$  est lui-même déterminé par

$$(35) \quad (J_x)(u) = X(u)i$$

En d'autres termes, chaque élément non-nul  $u$  de  $x$  détermine un  $\mathbb{R}$ -isomorphisme de  $T_p S$  sur l'espace vectoriel complexe  $T/p$  et  $J_x$  est la structure complexe induite sur  $T_p S$  par cet isomorphisme (il est clair qu'elle ne dépend que de la droite complexe  $x$  et non du choix de  $u$  sur  $x$ ).

La différentielle  $T\pi$  de la fibration twistorielle  $\pi$  est l'homomorphisme naturel

$$(36) \quad T_x Z = \text{Hom}(x, T/x) \xrightarrow{T\pi} T_p S = \text{Hom}_H(P, T^H/p),$$

qui, à tout homomorphisme ( $\mathbb{C}$ -linéaire) de  $x$  dans  $T/x$  associe l'extension  $H$ -linéaire naturelle de  $P = xH$  dans  $T^H/p$ .

De (35) nous déduisons immédiatement que, pour tout point  $x$  de  $Z$ , la différentielle de la projection twistorielle est  $\mathbb{C}$ -linéaire de  $T_x Z$  sur  $(T_p S, J_x)$ .

#### 6. Question d'orientation.

Par convention, l'orientation induite par une structure complexe  $J$  sur un  $n$ -espace vectoriel (réel) de dimension  $2m$  est celle qui est déterminée par n'importe quel repère de la forme  $\{e_1, e_2 = Je_1, \dots, e_{2m-1}, e_{2m} = Je_{2m-1}\}$  (repères  $J$ -adaptés).

Les sous-espaces isotropes maximaux de  $T_p G = \text{Hom}(P, T/p)$  -qui sont en correspondance bijective avec les structures complexes orthogonales de  $T_p S$  - se répartissent en deux familles  $(F_+)$  et  $(F_-)$  indexées respectivement par les droites complexes de  $P$  et de  $T/p$ :

$$(F_+) = \{ \Theta_x = (A \in \text{Hom}(P, T/p) \mid \text{Ker} A = x), \quad x \in P(P) \}$$

$$(F_-) = \{ \Xi_{[y]} = (A \in \text{Hom}(P, T/p) \mid \text{Im} A = [y]), \quad [y] \in P(T/p) \}.$$

Les structures complexes du type  $(F_+)$  induisent une même orientation de  $T_p S$ , celles du type  $(F_-)$  l'orientation opposée.

Lue dans  $H$ , identifiée à  $T_p S$  au moyen d'un repère spinoriel  $\{u, [v]\}$  (27) où  $u$  est choisi sur la droite complexe  $x$ ,  $J_x$  devient simplement (cf.(35))

$$(37) \quad r_x \xrightarrow{J_x} r_x i$$

où l'on voit que  $J_x$ , et donc, lorsque  $x$  parcourt la fibre  $\pi^{-1}(P)$ , l'ensemble des structures complexes du type  $(F_+)$ , induisent l'orientation opposée à l'orientation naturelle de  $H$  (définie par la base naturelle  $\{1, i, j, k=ij\}$ ).

En conclusion :

le fibré  $Z = P(E|_S)$  s'identifie naturellement au fibré des structures complexes orthogonales (=structures hermitiennes) négatives sur  $S$  et, de même (en considérant la famille  $(F_-)$ ), le fibré  $P(F|_S)$  s'identifie au fibré des structures complexes orthogonales positives sur  $S$ .

7. Comme dans le cas minkowskien, nous introduisons un superobservateur de l'univers euclidien  $S$  sous la forme d'un élément  $j$ -réel  $F_0$  de  $V = \Lambda^2 T$ , pour lequel  $q(F_0)$  est égal à  $+1$  :

$$(38) \quad F_0 \wedge F_0 = \eta \quad .$$

L'orthogonal  $F_0^\perp$  de  $F_0$  dans  $V^j$  est un espace de dimension réelle 5 sur lequel  $q^j$  est définie-négative et que nous considérons comme un espace euclidien en substituant  $-q^j$  à  $q^j$  sur  $F_0^\perp$ .

Chaque élément  $P$  de  $S$  possède un unique représentant  $\phi$  dans  $\Lambda^2 P \subset V^j$  de la forme

$$(39) \quad \phi = F_0 + \gamma$$

où  $\gamma$  appartient à  $F_0^\perp$ .

En outre,  $-q^j(\gamma)$  est égal à  $+1$  puisque  $q(\phi)$  est nul.

Ainsi, notre superobservateur voit l'univers  $S$  comme une sphère  $S^4$ .

Qui plus est, il le voit comme une sphère euclidienne (=de courbure constante égale à  $+1$ ). En effet,  $F_0$  fixe dans la classe conforme réelle de  $S$  la métrique induite par le plongement que nous venons de déterminer de  $S$  dans  $F_0^\perp$ , l'espace physique de  $F_0$  (ceci résulte aisément de I.6 : si  $\phi(\tau) = F_0 + \gamma(\tau)$  est une variation de  $\phi$ ,  $\phi(0) = \phi$ , la dérivée  $\dot{\phi}(0)$  appartient à  $F_0^\perp$  et son carré extérieur est sa norme euclidienne dans  $(F_0^\perp, q^j)$ ).

8. La donnée d'un superobservateur  $F_0$  dans  $\Lambda^2 T$  équivaut à celle d'une structure hermitienne (définie positive)  $\langle ., . \rangle$  sur  $T$ ,  $j$ -invariante :

$$(40) \quad \langle u_j, v_j \rangle = \overline{\langle u, v \rangle} \quad u, v \in T .$$

En effet,  $F_0$  détermine un isomorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire du dual  $T^*$  sur  $T$  et se transforme elle-même, via cet isomorphisme, en une forme symplectique complexe  $(.,.)$ ,  $j$ -invariante, sur  $T$ .

La structure hermitienne est alors définie par

$$(41) \quad \langle u, v \rangle = (u, v_j) .$$

La donnée conjointe des trois éléments  $j, \langle ., . \rangle$  et  $(.,.)$  liés par (37) et (38) est une structure symplectique hermitienne.

Son groupe d'automorphismes est le groupe symplectique hermitien noté  $Sp(T, j, \langle ., . \rangle)$ ,  $Sp(2)$  en coordonnées adaptées.

Son image par  $\rho^j$  (32) est la composante connexe de l'identité du groupe d'automorphismes de l'univers réel  $S$  vu par  $F_0$ , i.e. du groupe des isométries  $SO(F_0^\perp, -q^j)$  de la sphère euclidienne  $S_{F_0}$  ( $= S$  vu par  $F_0$ ).

Nous obtenons ainsi (cf.(14)) l'homomorphisme de revêtement

$$(42) \quad \rho^j: Sp(T, j, \langle ., . \rangle) \xrightarrow{2:1} SO(F_0^\perp, -q^j) ,$$

soit, en coordonnées adaptées,

$$(42)' \quad \rho^j: Sp(2) \xrightarrow{2:1} SO(5)$$

qui réalise  $Sp(2)$  comme le groupe  $Spin(5)$ .

9. Fixons une origine  $P_0$  sur  $S$  et notons  $P$  le point à l'infini (=le point antipodal =la droite quaternionnienne  $H$ -orthogonale à  $P_0$ ). Soit  $\mathcal{V}_0$  l'élément de l'espace physique  $F_0^\perp$  associé à  $P_0$  par (39). Le choix de  $P_0$ , donc de  $\mathcal{V}_0$ , réalise  $SO(F_0^\perp, -q^j)$  comme le fibré principal  $O^+(S_F)$  des repères orthonormés positifs de  $S$  (pour la métrique lue par le superobservateur  $F_0$ ).

L'homomorphisme  $\rho^j$  (39) fait alors de  $Sp(T, j, \langle ., . \rangle)$  le Spin(4)-fibré principal  $Spin(S_F)$  réalisant l'(unique) structure spinorielle de  $S$  pour la métrique euclidienne induite par  $F_0$ .

Le stabilisateur de  $P_0$  dans  $Sp(T, j, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est le sous-groupe  $Sp(P_0) \times Sp(P_\infty)$ , dont l'image par  $\rho^j$  est le stabilisateur de  $\tilde{\phi}_0$  dans  $SO(F_0^\perp, -q^j)$ , i.e. le groupe des rotations de l'espace tangent  $T_P(S_{F_0})$ , identifié au sous-espace de  $F_0^\perp$  orthogonal à  $\tilde{\phi}_0$  :

$$(43) \quad \rho^j: Sp(P_0) \times Sp(P_\infty) \xrightarrow{2:1} SO(T_P(S_{F_0})) .$$

Le groupe  $Sp(P_0) \times Sp(P_\infty)$  possède deux représentations  $\mathbb{C}$ -linéaires tautologiques sur  $P_0$  et  $P_\infty$  respectivement .

Les fibrés vectoriels associés, via le  $Sp(P_0) \times Sp(P_\infty)$ -fibré principal  $Spin(S_{F_0})$ , sont les fibrés vectoriels (complexes, de rang 2)  $E|_S$  et  $F|_S$  que nous identifions ainsi aux fibrés de (demi-)spineurs au-dessus de la sphère euclidienne  $S_{F_0}$  .

Remarque 1. Fixons un repère spinoriel métrique en  $P_0$  sur  $S$ , i.e. un couple  $\{u, v\}$  d'éléments unitaires dans  $P_0$  et  $P_\infty$  respectivement (de telle sorte que  $\{u, v\}$  constitue une base  $H$ -orthonormée de  $T^H$ ). Le fibré principal  $Spin(S_{F_0})$  est alors identifié au groupe  $Sp(2)$ , soit, encore, à la variété des repères  $H$ -orthonormés de  $T^H$ , relativement à la structure symplectique hermitienne choisie .

Le stabilisateur  $Sp(P_0) \times Sp(P_\infty)$  de  $P_0$  s'identifie à  $Sp(1) \times Sp(1)$  et l'homomorphisme (43) s'écrit, via l'identification (27) de  $T_P S$  avec  $H$ ,

$$(44) \quad r \in H \xrightarrow{(p, q)} qrp^{-1} \in H, \quad (p, q) \in Sp(1) \times Sp(1),$$

qui est la façon usuelle d'identifier  $Sp(1) \times Sp(1)$  à  $Spin(4)$  .

Remarque 2. Nous nous sommes bornés jusqu'à présent aux métriques de la classe conforme induites par les superobservateurs du type  $F_0$  qui, tous, voient la sphère conforme comme une sphère euclidienne .

Les métriques ainsi obtenues sont les métriques à courbure constante +1 qui toutes se déduisent de l'une d'elle par l'action du groupe de Moebius (identifié au groupe  $Sl(T, j, \eta)$  que l'on peut considérer comme agissant -transitivement- sur la variété des structures symplectiques hermitiennes  $n$ -compatibles).

Pour atteindre les autres métriques riemanniennes de la classe conforme de  $S$  il nous faut substituer aux superobservateurs du type  $F_0$ , c'est-à-dire aux structures symplectiques hermitiennes de  $T$ , des objets plus généraux: les pseudo-normes quaternioniennes, i.e. les fonctions positives  $C^\infty$   $\sigma$  définies sur  $T^H \setminus 0$  vérifiant

$$(45) \quad \sigma(u.p) = |p|\sigma(u) \quad , \quad \forall u \neq 0 \in T, \forall p \in H \quad .$$

Toutes les pseudo-normes quaternioniennes se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par multiplication par une fonction positive  $C^\infty$  définie sur  $S = P(T^H)$ .

Chaque pseudo-norme  $\sigma$  détermine sur  $S$  une métrique riemannienne  $g_\sigma$  dans la classe conforme, au moyen de l'identification (27) opérée à partir d'un  $\sigma$ -repère spinoriel, i.e. d'un repère spinoriel  $\{u, [v]\}$  tel que  $u$  et  $[v]$  soient  $\sigma$ -unitaires ( $\sigma([v])$  est la borne inférieure des  $\sigma$ -pseudo-normes des éléments de  $T^H$  appartenant à  $[v]$ ).

Inversement, toutes les pseudo-normes quaternioniennes sont obtenues de cette manière puisque le produit d'une pseudo-norme par n'importe quelle fonction positive  $C^\infty$  sur  $P(T^H)$  est encore une pseudo-norme.

Le groupe  $Sp(1) \times Sp(1) = Spin(4)$  agit sur les  $\sigma$ -repères par

$$(46) \quad \{u, [v]\}.(p, q) = \{u.p, [v].q\} \quad , \quad p, q \in Sp(1)$$

et cette action fait de l'ensemble des  $\sigma$ -repères un  $Spin(4)$ -fibré principal au-dessus de  $S$  qui n'est autre que le fibré  $Spin(S, g_\sigma)$  qui réalise la structure spinorielle de  $S$  pour la métrique  $g_\sigma$ .

Les fibrés vectoriels complexes associés aux deux représentations tautologiques de  $Sp(1) \times Sp(1)$  sont encore les fibrés  $E|_S$  et  $F|_S$  qui se trouvent ainsi identifiés aux fibrés de (demi-)spineurs de  $S$  pour toutes les métriques riemanniennes de la classe conforme.

On notera que le fibré somme  $E|_S \oplus F|_S$  est trivial, contrairement à  $E|_S$  et  $F|_S$  dont les classes d'Euler sont des générateurs, respectivement positif et négatif, de  $H^4(S, \mathbb{Z})$ .

Chaque superobservateur  $F_0$  détermine, via la structure symplectique hermitienne de  $T$  qui lui est associée, un isomorphisme de  $E|_S \oplus F|_S$ , identifié, comme il vient d'être dit, au fibré (total) des spineurs de la sphère euclidienne  $S_F$ , avec le fibré trivial  $S \times T$  au-dessus de  $S$  dont la fibre est l'espace des twisteurs.

Remarque 3 . L'univers réel  $S$  , construit à partir de l'espace des twisteurs quaternionien  $(T, j)$  , possède, de ce fait, une structure conforme bien déterminée mais aucune métrique privilégiée dans la classe conforme.

De même, les deux fibrés vectoriels  $E|_S$  et  $F|_S$  préexistent à leur interprétation spinorielle qui dépend du choix d'une métrique dans la classe conforme.

On peut se demander s'ils ne peuvent être considérés comme des fibrés de (demi-)spineurs conformes (dans un sens à préciser) sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir de métriques.

Ce point sera abordé un peu plus loin .

10. Un point n'a pas été précisé : quel est, de  $E|_S$  et  $F|_S$  celui qui est identifié, modulo le choix d'une métrique  $g_\sigma$  , au fibré des demi-spineurs positifs  $\Sigma^+$  , étant entendu qu'en dimension 4, ce dernier est défini par la convention suivante : l'action de Clifford de la forme-volume  $\mu$  de  $(S, g_\sigma)$  est  $-1$  , tandis que l'action de  $\mu$  sur le fibré  $\Sigma^-$  des demi-spineurs négatifs est  $+1$  .

L'action, au sens de Clifford, de l'espace tangent  $T_p S$  sur  $E|_S$  ne dépend d'aucune donnée supplémentaire . C'est simplement l'action tautologique

$$(47) \quad u \in P \quad \rightarrow \quad X(u) \in T_p \quad , \quad X \in T_p S = \text{Hom}_{\mathbb{H}}(P, T^{\mathbb{H}}/P).$$

Pour définir l'action de  $X$  sur  $T/P$  ( à valeurs dans  $P$  ), il convient d'observer que, sur chacune des droites quaternioniennes  $P$  et  $T/P$ , la pseudo-norme  $\sigma$  détermine une structure symplectique complexe  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\sigma$  (qui est d'ailleurs unique , à un facteur positif près, sur chacune d'elles). L'action de Clifford de  $X$  sur  $T/P$  est alors

$$(48) \quad [v] \in T/P \quad \rightarrow \quad X([v]) \in P$$

où  $X([v])$  est défini par

$$(49) \quad \langle X([v]), u \rangle_{P, \sigma} = -\langle [v], X(u) \rangle_{T/P, \sigma}$$

Lues dans  $\mathbb{H}$  , au moyen d'un  $\sigma$ -repère spinoriel , ces actions deviennent respectivement

$$(48)' \quad p \in H (\cong P) \quad \rightarrow \quad r_X p \in H (\cong T/P)$$

et

$$(49)' \quad q \in H (\cong T/P) \quad \rightarrow \quad -\bar{r}_X q \in H (\cong P)$$

où  $r_X$  est le quaternion associé à  $X$  par (27) .

L'élément de volume  $\mu$  de  $(S, g_\sigma)$ , en  $P$ , s'écrit  $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$  où  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  est le repère  $g_\sigma$ -orthonormé associé, par (27), à la base naturelle  $\{1, i, j, k\}$  de  $H$  .

De (48)'-(49)' nous déduisons alors immédiatement que

$$(50) \quad \mu|_{(E|_S)} = +1 \quad \mu|_{(F|_S)} = -1 .$$

Ainsi, pour toutes les métriques de la classe conforme naturelle de l'univers réel  $S$  , nous avons l'identification

$$(51) \quad E|_S \cong \Sigma^- \quad \text{et} \quad F|_S \cong \Sigma^+$$

et donc aussi, pour l'espace des twisteurs projectifs, l'identification

$$(52) \quad Z \cong P(\Sigma^-) .$$

### 11. Spineurs conformes.

Nous reprenons le problème laissé en suspend dans la Remarque 3 de la section 9. Mais d'abord, qu'est-ce qu'un spineur conforme ?

En dimension 4, la question se présente ainsi. Nous disposons des groupes suivants

$$\tilde{G} = H^* \times H^* , \quad G = \tilde{G}/R^+ , \quad \Gamma_1 = \tilde{G}/R^* , \quad \Gamma_2 = Sp(1) \times Sp(1) \subset \tilde{G} , \quad \Gamma_3 = \Gamma_2/\{\pm 1\}$$

où  $H^*$  désigne le groupe multiplicatif des quaternions non-nuls ,  $R^*$  le groupe multiplicatif des réels non-nuls, plongé dans  $G$  via la diagonale,  $R^+$  le sous-groupe des réels positifs .

Chacun de ces groupes a une action naturelle , décrite par (29), sur l'espace  $R^4$  identifié à  $H$  .

Comme tels, les groupes  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_1$  s'identifient respectivement aux groupes  $SO(4)$ ,  $Spin(4)$  et  $CO(4)$ , le groupe conforme direct.

Le groupe qui nous occupe est le groupe  $G$ , revêtement universel de  $\Gamma_1 = CO(4)$ , le groupe spinoriel conforme  $CSpin(4)$ .

Contrairement au groupe spinoriel  $Spin(4) = \Gamma_2$ , il n'est pas naturellement plongé dans  $\tilde{G} = H^* \times H^*$ , mais on peut l'y plonger néanmoins après avoir fait choix d'un poids, i.e. d'un réel  $\omega$ .

Nous avons alors le plongement

$$(53) \quad G \rightarrow G_\omega = \{(p, q) \in H^* \times H^* \mid |p|^{1-\omega} |q|^\omega = 1\} \subset \tilde{G}$$

d'où l'on déduit deux représentations spinorielles (dépendant de  $\omega$ ) du groupe spinoriel conforme, correspondant aux deux représentations tautologiques de  $H^* \times H^*$ .

Le sous-groupe des homothéties de  $CSpin(4) = H^* \times H^* / \mathbb{R}^+$  est le groupe, isomorphe à  $\mathbb{R}^+$ , constitué des classes d'équivalence des couples  $(a, 1)$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ . L'image d'une telle classe dans le sous-groupe  $G_\omega$  de  $\tilde{G}$  est le couple  $(a^\omega, a^{\omega-1})$ .

Autrement dit, les deux représentations spinorielles de  $CSpin(4)$  sont de poids respectifs  $\omega$  et  $\omega - 1$ .

Dans le cas où la variété conforme est l'univers réel  $S$  construit à partir de  $(T, j)$ , le  $CSpin(4)$ -fibré principal déterminant la structure spinorielle conforme est le fibré des repères spinoriels modulo  $\mathbb{R}^+$ , i.e. des repères spinoriels liés par la relation d'équivalence

$$(54) \quad \{u, [v]\} \sim \{u', [v']\} \iff \exists a \in \mathbb{R}^+ \mid u' = ua \text{ et } [v'] = [v]a .$$

A cause de cette indétermination, il n'est pas possible d'identifier canoniquement (=sans donnée supplémentaire, par exemple une pseudo-norme quaternionienne  $\sigma$  sur  $T^H$  qui permet de distinguer un représentant dans la classe d'équivalence (54)) les fibrés  $E|_S$  et  $F|_S$  aux fibrés de spineurs conformes, quel que soit le poids considéré.

En revanche, les fibrés en demi-droites (réelles) de tous ces fibrés coïncident canoniquement.

§2. TWISTEURS EUCLIDIENS SUR UNE  
VARIÉTÉ RIEMANNIENNE.

1. Une propriété essentielle de la théorie euclidienne des twisteurs, qui la distingue des autres signatures, est que l'espace des twisteurs projectifs  $Z$  se fibre au-dessus de l'univers réel  $S$ .

Comme tel  $Z$  a été identifié

a) au fibré des structures complexes orthogonales négatives sur  $S$ ,

b) au fibré en droites projectives (complexes) associé au fibré des demi-spineurs  $\Sigma^-$ .

Ces deux fibrés existent en toute généralité au-dessus de n'importe quelle variété riemannienne (orientée)  $M$ , et s'identifient l'un à l'autre quand  $M$  est de dimension 4 (dans ce cas, pour chaque élément non-nul  $\xi$  de  $\Sigma^-$ , l'action de Clifford  $X \rightarrow X.\xi$  identifie  $T_X M$  à la fibre  $\Sigma_X^+$  et induit, de ce fait, une structure complexe sur  $T_X M$  qui ne dépend que de la droite complexe de  $\Sigma_X^-$  sur laquelle  $\xi$  a été choisi).

Rien n'empêche donc de baptiser fibré des twisteurs (projectifs) -la précision projectifs est le plus souvent sous-entendue dans le contexte riemannien- au-dessus d'une variété riemannienne orientée  $(M, g)$  de dimension (paire)  $2m$ , le fibré  $Z(M)$  des structures complexes orthogonales négatives (point de vue a)).

Mais, bien sûr, ceci n'a de sens que si cet espace des twisteurs est muni d'une structure complexe de telle sorte que la projection naturelle  $\pi : Z(M) \rightarrow M$  soit  $\mathbb{C}$ -linéaire au sens de §1.IV 5.

Pour ce faire, nous commençons par construire sur  $Z(M)$ , au moyen de la connexion de Levi-Civita  $D$ , une structure presque-complexe  $\mathfrak{J}$  conférant à la projection  $\pi$  la propriété de  $\mathbb{C}$ -linéarité requise.

Puis, nous montrons que  $\mathfrak{J}$  ne dépend en fait que de la classe conforme de  $g$ , comme  $Z(M)$  lui-même.

La condition d'intégrabilité de  $\mathfrak{J}$  se lit alors sur la partie conforme de la courbure  $R$  de  $M$ , i.e. sur le tenseur de Weyl  $W$

Dans la suite, nous écrirons  $Z$  pour  $Z(M)$ .

2. Soit  $J$  un point de  $Z$  au-dessus de  $x$ , i.e. une structure complexe orthogonale (négative) sur l'espace tangent  $T_x M$ .

L'espace tangent vertical  $T_{JZ}^V$ , qui correspond aux variations de  $J$  dans  $T_x M$  pour  $x$  fixé, s'identifie naturellement à l'espace  $A_x^J M$  des endomorphismes anti-symétriques et  $J$ -anti-linéaires de  $T_x M$ :

$$(55) \quad T_{JZ}^V \simeq A_x^J M, \quad \forall x \in M, \forall J \in Z_x.$$

L'espace tangent horizontal  $T_{JZ}^H$  est identifié, au moyen de la différentielle  $T\pi$  de la projection twistorielle  $\pi$ , à  $T_x M$ :

$$(56) \quad T\pi : T_{JZ}^H \xrightarrow{\simeq} T_x M.$$

Tout  $X \in T_x M$  est identifié au vecteur (horizontal) de  $T_{JZ}$  déterminé par la variation  $t \rightarrow J(t)$ ,  $J(0)=J$ , où  $J(t)$  est le déplacement parallèle (relativement à la connexion de Levi-Civita) de  $J$  le long d'une courbe quelconque  $t \rightarrow x(t)$ ,  $x(0) = x$ , déterminant  $X$  ( $\dot{x}(0) = X$ ) sur  $M$ .

Nous obtenons ainsi l'identification

$$(57) \quad T_{JZ} = A_x^J M \oplus T_x M, \quad x = \pi(J),$$

que l'on peut expliciter comme suit :

si  $U \in T_{JZ}$  est déterminé par une variation  $J(t)$ ,  $J(0) = J$ ,  $\dot{J}(0) = U$ , on a

$$(58) \quad U = (D_x J(t)|_{t=0}, X = T_J \pi(U)).$$

Nous définissons alors une structure presque-complexe  $\mathfrak{J}$  sur  $Z$ , i.e. un automorphisme de  $T_{JZ}$  de carré  $-1$  pour chaque  $J$  de  $Z$ , en posant

$$(59) \quad U = (JoU, JX), \quad U \in T_{JZ},$$

où  $A \in A_x^J M$  et  $X \in T_x M$  sont les composantes de  $U$ , via (57).

On observe que l'endomorphisme composé  $JoA$  appartient lui-même à l'espace  $A_x^J M$ .

L'action  $X \rightarrow JX$  de  $\mathfrak{J}$  sur la composante  $X$  de  $U$  est imposée par le fait que voulons que  $T\pi : U \rightarrow X$  soit  $\mathbb{C}$ -linéaire de  $(T_{JZ}, \mathfrak{J})$  dans

$(T_x M, J)$  .

En revanche, nous avons le choix, en ce qui concerne l'action de  $J$  sur la partie verticale, entre celle qui a été choisie et sa conjuguée :  $A \circ J = -J \circ A$  .

Nous obtenons ainsi non pas une mais deux structures presque-complexes naturelles sur  $Z$  ,  $J$  définie par (59), et  $J'$  définie par

$$(60) \quad J'U = (A \circ J, JX)$$

qui coïncide avec  $J$  sur la partie horizontale et avec la conjuguée de  $J$  sur la partie verticale.

3. Ces deux structures sont de nature très différentes comme le montre la

PROPOSITION. La structure presque-complexe  $J$  ne dépend que de la structure conforme de  $(M, g)$  .

Au contraire, deux structures presque-complexes  $J'$  attachées à deux métriques non-homothétiques de la classe conforme de  $(M, g)$  sont distinctes.

Preuve. Soient  $g = e^{2\sigma} \cdot g_0$  une métrique conforme ,  $D^\sigma$  la connexion de Levi-Civita associée,  $J_\sigma$  et  $J'_\sigma$  les deux structures presque-complexes correspondantes .

On a

$$(61) \quad D^\sigma = D + b$$

où  $b$  est une 1-forme sur  $M$  à valeur dans le fibré  $\text{End}(TM)$  des endomorphismes de  $TM$  définie par

$$(62) \quad b_X Y = d\sigma(X)Y + d\sigma(Y)X - g(X, Y) \cdot \text{grad} \sigma$$

où le gradient  $\text{grad} \sigma$  est le dual de  $d\sigma$  relativement à  $g$  .

Nous avons, relativement à  $g_0$  , une identification de type (57), liée à la précédente par

$$(63) \quad \begin{array}{ccc} (A, X) \in A_X^J \otimes T_X^* M & \xrightarrow{\quad} & (A + b_X^J, X) \in A_X^J \otimes T_X^* M \\ \swarrow \text{via } g & & \searrow \text{via } g_\sigma \\ & U \in T_J Z & \end{array}$$

où  $b_X^J$  est l'endomorphisme  $D_X^\sigma J - D_X J$ , comme il résulte aisément de (58).

Les structures  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{J}'$  coïncident avec  $\mathcal{J}_\sigma$  et  $\mathcal{J}'_\sigma$  respectivement sur l'espace vertical  $T_J^V M$ .

Considérons donc un vecteur  $U$   $g_\sigma$ -horizontal de projection  $X$  sur  $T_X^* M$ . Dans la décomposition (57) relative à  $g_\sigma$ ,  $U$  s'écrit  $(0, X)$  et  $\mathcal{J}_\sigma U$  et  $\mathcal{J}'_\sigma U$ , qui sont égaux et  $g_\sigma$ -horizontaux, s'écrivent  $(0, JX)$ .

Dans la carte (57) relative à  $g$ ,  $U$  s'écrit, d'après (63),  $(-b_X^J, X)$  tandis que  $\mathcal{J}_\sigma U = \mathcal{J}'_\sigma U$  s'écrivent  $(-b_{JX}^J, JX)$ .

Dans la même carte (toujours relative à  $g$ ),  $\mathcal{J}U$  et  $\mathcal{J}'U$  s'écrivent respectivement, d'après (59) et (60),

$$\mathcal{J}U = (-J \circ b_X^J, JX) \quad \text{et} \quad \mathcal{J}'U = (-b_X^J \circ J, JX).$$

La proposition est alors la conséquence immédiate de l'identité

$$(64) \quad b_{JX}^J = J b_X^J$$

que l'on vérifie aisément à partir de l'expression explicite de  $b_X^J$ , tiré de (62) :

$$(65) \quad (b_X^J)Y = d\sigma(JY)X - d\sigma(Y)JX - g(X, JY) \cdot \text{grad} \sigma + g(X, Y) \cdot J \text{grad} \sigma.$$

De (64) nous déduisons, en effet, que  $\mathcal{J}U = \mathcal{J}'_\sigma U$ , tandis que les espaces horizontaux  $T_J^H Z$  relatifs à  $D^\sigma$  ne sont jamais  $\mathcal{J}'$ -invariants si  $\sigma$  n'est pas constante.

4. Reste la question d'intégrabilité de  $\mathcal{J}$  et de  $\mathcal{J}'$  qui est mesurée par les tenseurs de Nijenhuis (=torsion complexe)  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{N}'$  définis, pour  $\mathcal{J}$ , par

$$(66) \quad 4\mathcal{N}(U, V) = [U, V] + \mathcal{J}[\mathcal{J}U, V] + \mathcal{J}[U, \mathcal{J}V] - [\mathcal{J}U, \mathcal{J}V],$$

$U, V \in T_J Z$  (arbitrairement étendus au voisinage de  $J$  dans le membre de droite) et, pareillement, pour  $\mathcal{N}'$ .

Le calcul n'est pas très difficile. Lu dans la carte(57) - en écrivant A,B pour (A,0),(B,0) et X,Y pour (0,X),(0,Y) ; il donne

a) $\mathcal{W}(A,B) = \mathcal{W}'(A,B) = 0$	$\forall A,B \in A_x^J M,$ $\forall X,Y \in T_x M .$
b) $\mathcal{W}(A,X) = 0 \quad \mathcal{W}'(A,X) = (0,AX)$	
c) $\mathcal{W}(X,Y) = R_J^-(X,Y) \quad \mathcal{W}'(X,Y) = R_J^+(X,Y)$	

La ligne c) appelle une explication que nous donnerons dans un instant. Remarquons, tout d'abord, à cause du terme mixte  $\mathcal{W}'(A,X)$ , que  $\mathcal{W}'$  n'est jamais intégrable (fait montré pour la première fois par J.Eells et S.Salamon).

Les termes de la ligne c) sont des parties de la courbure  $R$ , considérée comme opérateur de courbure, i.e. comme endomorphisme (symétrique) du fibré  $\Lambda^2 M$  des 2-formes (alternées) sur  $M$ .

Chaque structure complexe  $J$  de  $T_x M$  décompose la fibre  $\Lambda_x^2 M$  en

$$(68) \quad \Lambda_x^2 M = \Lambda_x^{J^+} M \oplus \Lambda_x^{J^-} M$$

où  $\Lambda_x^{J^+} M$  et  $\Lambda_x^{J^-} M$  sont les espaces des 2-formes  $J$ -invariantes (=de type (1,1)) et  $J$ -invariantes (=de type (2,0)+(0,2)) respectivement.

Ce dernier espace  $\Lambda_x^{J^-} M$  s'identifie, au moyen de la métrique  $g$ , à l'espace  $A_x^J M$  déjà considéré et possède, de ce fait, une structure complexe canonique (à conjugaison près), obtenue par composition avec  $J$  (à droite ou à gauche) comme nous avons vu en 2.

Nous notons alors  $R_J$  l'endomorphisme induit par  $R$  sur  $\Lambda_x^{J^-} M$  par projections orthogonales, et  $R_J^+$  et  $R_J^-$  ses composantes  $C$ -linéaire et  $C$ -anti-linéaire.

Ainsi,  $\mathcal{J}$  est intégrable sur  $Z$  si et seulement si  $R_J$  est  $C$ -linéaire en tout point  $x$  de  $M$ , pour toute structure complexe orthogonale négative de  $T_x M$ .

Ceci nous ramène à un problème purement algébrique : déterminer, dans l'espace des tenseurs de courbure  $\mathcal{C}_n$  (=espace des endomorphismes symétriques de  $\Lambda^2 \mathbb{R}^n$  vérifiant l'identité de Bianchi), le sous-espace vérifiant la propriété sus-mentionnée. ( $n=2m$  est la dimension de  $M$ ).

Ce sous-espace -que nous notons  $\mathcal{Z}_n^-$  - est  $SO(n)$ -invariant.

Or, pour  $n \geq 4$ ,  $\mathcal{C}_n$  se décompose, sous l'action de  $SO(n)$  (ou, de façon équivalente, de  $O(n)$ ), en la somme directe de 3 sous-espaces irréductibles

$$(69) \quad C_n = U \otimes S \otimes W$$

correspondant à la décomposition bien connue de la courbure riemannienne

$$(69)' \quad R = U + S + W ,$$

où  $W$  est le tenseur de Weyl,  $U$  la partie scalaire (déterminée par la courbure scalaire  $u$ ) et  $U + S$  est de la forme

$$(70) \quad (U + S)(X \ Y) = r(X) \wedge Y + X \wedge r(Y)$$

où  $r$  est l'endomorphisme symétrique de  $R^n$  égal à  $1/(n-2)(r - u/2(n-1)g)$  ( $r$  est le tenseur de Ricci associé à  $R$  et  $g$  la métrique canonique de  $R^n$ ). On vérifie directement à partir de (70) que la partie  $U + S$  de la courbure appartient toujours à  $\mathcal{D}_n^-$ .

on vérifie aussi (en fabricant des exemples algébrique ad hoc) que  $\mathcal{L}_n^-$  ne se confond pas avec  $C_n$  (quel que soit  $n$ ).

Il en résulte que  $\mathcal{L}_n^-$  est caractérisé par la condition  $W = 0$  (quand  $n > 4$ ), ce qui nous donne la

PROPOSITION. Pour  $n > 4$ , l'espace des twisteurs  $(Z, \mathcal{J})$  est une variété complexe si et seulement si le tenseur de Weyl de  $(M, g)$  est nul.

Ceci était attendu puisque la condition  $W=0$ , en dimension supérieure à 4, est la seule condition conforme non-vide impliquant la courbure linéairement.

5. Quand la dimension  $n$  de  $M$  est égale à 4, à la décomposition (68) se juxtapose la décomposition

$$(71) \quad \Lambda^2 M = \Lambda^+ M \oplus \Lambda^- M$$

du fibré  $\Lambda^2 M$  en somme directe du fibré des 2-formes autoduales  $\Lambda^+ M$  et du fibré des 2-formes anti-autoduales  $\Lambda^- M$  relativement à l'opérateur de Hodge  $*$  (défini par la métrique et l'orientation).

Les deux involutions  $J$  et  $*$  commutent sur  $\Lambda_x^2 M$  et les deux décompositions (68) et (71) sont liées par les inclusions

$$(72) \quad \Lambda_x^+ M \subset \Lambda_x^{J^+} M \quad \Lambda_x^{J^-} M \subset \Lambda_x^- M , \quad J \in Z_x(M) .$$

Plus précisément, l'espace des 2-formes autoduales  $\Lambda^+_x M$  coïncide avec l'espace des 2-formes J-invariantes à trace nulle (=primitives), tandis que l'espace des 2-formes anti-autoduales est engendré par l'espace des 2-formes J-anti-invariantes et la forme de Kähler (relative à J) qui est J-invariante ( et anti-autoduale puisque J induit l'orientation opposée à celle de M ).

L'espace  $W$  des tenseurs de Weyl se décompose, sous l'action de  $SO(4)$ , en la somme

$$(73) \quad W = W^+ \oplus W^-$$

où  $W^\pm$  sont  $SO(4)$ -irréductibles (ainsi que  $U$  et  $S$  de (69) ).

Le tenseur de Weyl positif  $W^+$  envoie  $\Lambda^+ M$  sur lui-même et agit trivialement sur  $\Lambda^- M$  et, de même, le tenseur de Weyl négatif  $W^-$  agit trivialement sur  $\Lambda^+ M$  et envoie  $\Lambda^- M$  sur lui-même.

Suivant les notations de [S-T], l'opérateur de courbure  $R$  s'écrit, dans la décomposition (69), sous la forme matricielle suivante:

$$(74) \quad \begin{array}{c} \Lambda^+ \\ \Lambda^- \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \Lambda^+ & \Lambda^- \\ \hline A & B \\ \hline {}^t B & C \\ \hline \end{array}$$

avec:

$$\text{trace } A = \text{trace } C = u/4 \quad (\text{identité de Bianchi})$$

et

$$W^+ = A - u/12.I \quad (= \text{partie sans trace de } A)$$

$$W^- = C - u/12.I \quad (= \text{partie sans trace de } C)$$

$$S = B .$$

La décomposition de  $\mathcal{C}_4$  en sous-espaces  $SO(4)$ -irréductibles s'écrit

$$(75) \quad \mathcal{C}_4 = U \oplus S \oplus W^+ \oplus W^-$$

et le sous-espace  $\mathcal{C}_4^-$  contient cette fois, outre  $U \oplus S$ , l'espace  $W^+$  dont les éléments agissent trivialement sur  $\Lambda^+_x M$ , donc, a fortiori, sur

$\Lambda_x^J M$ , pour tout  $J$  dans la fibre  $Z_x(M)$ , d'après (72).

Ainsi, l'espace  $\mathcal{D}_4^-$  est caractérisé, dans  $C_4$ , par la condition  $W^- = 0$ .  
D'où la

**PROPOSITION.** Si  $M$  est de dimension 4, l'espace des twisteurs  $(Z(M), )$  est une variété complexe si et seulement si le tenseur de Weyl négatif  $W^-$  est nul sur  $M$ .

La métrique de  $M$  est alors dite auto-duale ou semi-conformément plate (négativement).

Remarque 1. Nous aurions tout aussi bien pu choisir, au lieu de  $Z(M)$ , le fibré  $Z^+(M)$  des structures complexes orthogonales positives sur  $M$  (identifié, pour  $n=4$ , au fibré en droites projectives complexes  $P(\Sigma^+)$  associé au fibré des demi-spineurs positifs).

En raison de cette liberté, nous baptisons  $Z^+(M)$  le fibré des twisteurs positifs, tandis que  $Z(M)$ , que l'on notera alors  $Z^-(M)$ , sera appelé fibré des twisteurs négatifs.

Rien, dans ce qui précède (construction de  $\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'$ , invariance conforme de  $\mathcal{Y}$  etc...) ne doit être changé lorsqu'on considère  $Z^+(M)$  au lieu de  $Z^-(M)$  hormis le fait que, en dimension 4, les inclusions (72) sont alors remplacées par les suivantes

$$(72)' \quad \Lambda_x^- M \subset \Lambda_x^+ M \quad \Lambda_x^J M \subset \Lambda_x^+ M, \quad \forall J \in Z_x^+(M)$$

de sorte que nous devons échanger les rôles de  $\omega^+$  et  $\omega^-$  dans le présent paragraphe.

La dernière proposition pourra alors être complétée de la façon suivante

**PROPOSITION.** Si  $M$  est une variété riemannienne orientée de dimension 4, l'espace des twisteurs positifs  $(Z^+(M), \mathcal{Y})$  est une variété complexe si et seulement si le tenseur de Weyl positif  $W^+$  est nul (= la métrique est anti-autoduale) ; l'espace des twisteurs négatifs  $(Z^-(M), \mathcal{Y})$  est une variété complexe si et seulement si le tenseur de Weyl négatif  $W^-$  est nul (= la métrique est autoduale).

Remarque 2. Supposons que  $M$  soit une variété kähliérienne de dimension (réelle) 4, munie de l'orientation induite par sa structure complexe  $\mathcal{f}$  (autrement dit  $\mathcal{f}$  est positive par définition).

Nous avons, comme en (68), une décomposition en types de  $\Lambda^2 M$  relative à  $\dot{j}$  (globale cette fois) :

$$(76) \quad \Lambda^2 M = \Lambda^{\dot{j}^+} M \oplus \Lambda^{\dot{j}^-} M$$

et une inclusion de fibrés semblable à (72)' (puisque est positive)

$$(77) \quad \Lambda^- M \subset \Lambda^{\dot{j}^+} M \quad \Lambda^{\dot{j}^-} M \subset \Lambda^+ M .$$

Puisque  $M$  est kählérienne, l'opérateur de courbure  $R$  agit trivialement sur le sous-fibré  $\Lambda^{\dot{j}^-} M$  de  $\Lambda^2 M$ .

Autrement dit, dans la représentation (72), l'action de  $R$  sur  $\Lambda^+ M$  se réduit à son action sur la seule forme de Kähler  $F$  dont l'image par  $R$  est la forme de Ricci  $\rho$  (= la 2-forme associée au tenseur de Ricci  $r$  de la même manière que la forme de Kähler est associée à la métrique).

La représentation (74) se réduit alors à celle-ci :

$$(78) \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} R.F & \Lambda^- M \end{array} \\ \begin{array}{c} R.F \\ \Lambda^- M \end{array} & \begin{array}{|cc|} \hline u/4 & \rho_0 \\ \hline \rho_0 & C \\ \hline \end{array} \end{array}$$

où  $\rho_0$  est la partie primitive (=sans trace) de la forme de Ricci.

En particulier, l'endomorphisme  $A$  de (74) se réduit à

$$(79) \quad A = \begin{array}{|ccc|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & u/4 \\ \hline \end{array} \Rightarrow W^+ = \begin{array}{|ccc|} \hline -u/12 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -u/12 & 0 \\ \hline 0 & 0 & +u/6 \\ \hline \end{array}$$

Ainsi, le tenseur de Weyl positif  $W^+$  se réduit, dans le cas kählérien, à la courbure scalaire  $u$  et  $(Z^+(M), )$  est une variété complexe, dans ce cas, si et seulement si la courbure scalaire de  $M$  est nulle.

A noter que, dans le cas kählérien, le fibré des twisteurs positifs possède deux sections horizontales  $\dot{j}$  et  $-\dot{j}$  (qui est aussi positive), qui sont deux sous-variétés complexes, pour  $\dot{J}$  comme pour  $\dot{J}'$ , de  $Z^+(M)$ .

6. Le cas où  $M$  est la sphère euclidienne  $S^4$  nous a servi de modèle

au §1 (twisteurs plats).

L'espace des twisteurs (projectifs) négatifs  $Z^-(S^4)$  a été identifié à l'espace projectif  $CP^3$ , plus précisément, à l'espace  $P(T)$ , au moyen d'une structure quaternionnienne sur l'espace des twisteurs  $T$  et, aussi, d'une structure hermitienne compatible  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $T$  (i.e. d'une structure symplectique hermitienne) pour obtenir la sphère euclidienne dans la classe conforme.

La fibration twistorielle  $\pi$  s'écrit alors

$$(80) \quad CP^3 = Sp(2)/U(1) \times Sp(1) \xrightarrow{\pi} Sp(2)/Sp(1) \times Sp(1) = S^4.$$

On notera que, dans cette description, l'espace des twisteurs, comme  $S^4$  elle-même, apparaît sous la forme d'un espace riemannien symétrique possédant, à changement d'échelle près, une unique métrique  $Sp(2)$ -invariante, qui, pour  $CP^3$ , est la métrique de Fubini-Study.

En tout point  $x$  de  $CP^3 = P(T)$ , le sous-espace orthogonal aux fibres dans  $T_x(P(T))$  est l'espace horizontal que nous avons considéré en toute généralité sur  $Z(M)$ , §2.2. Ceci montre que la structure naturelle de  $CP^3$  coïncide avec la structure et achève l'identification.

Le passage de  $Z^-(S^4)$  à  $Z^+(S^4)$  s'opère au moyen de l'antipodie  $\iota$  sur  $S^4$  qui préserve la métrique et inverse l'orientation.

Nous pouvons ainsi, dans le cas de  $S^4$  (et dans tous les cas où existe sur  $M$  une isométrie inversant l'orientation) identifier  $Z^+(S^4)$  à  $Z^-(S^4)$  en substituant à la projection twistorielle  $\pi = \pi^-$  la composée  $\pi^+ = \iota \circ \pi^-$ :

$$(81) \quad \begin{array}{ccc} & Z^+(S^4) = Z^-(S^4) & \\ \pi^+ \swarrow & & \searrow \pi^- \\ S^4 & \xrightarrow{\iota} & S^4 \\ \longleftarrow \iota & & \longrightarrow \end{array}$$

Ceci vaut également pour les sphères  $S^{2m}$  de toutes dimensions (paires). Puisque les sphères euclidiennes sont conformément plates, nous savons cf. §2.4, que  $Z^+(S^{2m}) = Z^-(S^{2m})$  est une variété complexe pour la structure presque-complexe  $\mathcal{J}$ .

Nous pouvons aisément identifier  $Z^+(S^{2m})$  à la variété  $J^+(R^{2m+2})$  des structures complexes orthogonales positives de l'espace euclidien (orienté)  $R^{2m+2}$  de la façon suivante : après avoir fixé un élément de norme 1  $e_0$  dans  $R^{2m+2}$ , à tout élément  $J$  de  $J^+(R^{2m+2})$  nous associons, d'une part  $Je_0$ , qui appartient à la sphère unité  $S^{2m}$  de l'orthogonal  $R^{2m+1}$

de  $e_0$  dans  $R^{2m+2}$  et, d'autre part, la structure complexe induite par  $J$  sur l'orthogonal de la droite complexe  $\{e_0, Je_0\}$ , identifié à l'espace tangent en  $e_0$  à la sphère  $S^{2m}$ .

Nous obtenons ainsi l'identification

$$(82) \quad Z^+(S^{2m}) = SO(2m+2)/U(m+1) .$$

Cette variété est la fibre-type de nos projections twistorielles en dimension  $(2m+2)$ . Elle est munie d'une structure complexe naturelle -celle que nous avons décrite dans la section 2 - qui coïncide, à conjugaison près, avec .

Le cas particulier où  $m = 2$ , i.e. le cas de  $S^4$ , suggère une autre description de la projection twistorielle  $P(T) \rightarrow S^4$ , liée à l'isomorphisme  $SU(4) \rightarrow Spin(6)$  (16), qui évite l'introduction d'une structure quaternionienne sur l'espace des twisteurs et utilise seulement une structure hermitienne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définie positive sur  $T$  compatible avec l'élément de volume complexe  $\eta$ .

Nous notons  $*$  l'opérateur de Hodge (C-anti-linéaire) associé à  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $V^+$  le sous-espace réel des éléments autoduals de  $\Lambda^2 T$ , sur lequel la restriction  $q^+$  de la forme quadratique complexe  $q$  est définie-positive (Ne pas confondre ces notations avec celles de §1 III qui notent des objets différents !).

Nous fixons alors un élément autodual  $\psi_0$  dans  $V = \Lambda^2 T$  et nous identifions la sphère euclidienne  $S^4$  à la sphère unité dans l'orthogonal  $\psi_0^\perp$  de  $\psi_0$  dans  $(V^+, q^+)$  (à noter que cette sphère ne peut pas être considérée comme une forme réelle de l'univers complexe  $G$  avec qui elle n'a aucun point commun).

A tout élément  $x$  de  $P(T)$ , i.e. à toute droite complexe de  $T$ , nous associons la structure complexe orthogonale  $J_x$  de  $V^+$  correspondant au 3-plan complexe isotrope (relativement à  $q$ )  $T_x$  de  $V = \Lambda^2 T = V^+ \oplus C$  constitué des éléments  $\phi$  de  $V$  tels que

$$(83) \quad \phi \wedge \phi = 0 \quad \text{et} \quad \phi \wedge x = 0 .$$

En d'autres termes, tout élément  $*$ -autodual  $F$  de  $V$  se met, de façon unique, sous la forme

$$(84) \quad F = \phi + * \phi$$

où  $\phi$  vérifie (83) (=représente un 2-plan de  $T$  contenant la droite complexe  $x$ ) et  $J_x$  est définie par

$$(85) \quad J_x F = i\phi - i * \phi.$$

Nous obtenons ainsi la projection twistorielle

$$(86) \quad x \in P(T) \rightarrow J_x \psi_0 \in S^4$$

identifiant  $P(T)$  à  $Z^+(S^4)$  tel qu'il est décrit par (82) dans le cas  $m=2$ .

Cette construction illustre l'isomorphisme

$$(87) \quad CP^3 = SU(4)/S(U(1) \times U(3)) \cong SO(6)/U(3)$$

tiré de (16).

7. Que se passe-t-il quand  $M$  est le plan projectif  $CP^2$  muni de la métrique de Fubini-Study (et de l'orientation induite par sa structure complexe  $\dot{\mathcal{I}}$ ).

Nous sommes dans la situation évoquée dans la Remarque 2 de la section 5. Sous la forme (78), la courbure  $R$  de  $CP^2$  s'écrit, en tous points

$$(88) \quad R = \begin{array}{|cccc|} \hline u/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u/12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u/12 \\ \hline \end{array}$$

i.e.  $S = 0$  et  $W^- = 0$  (=la métrique est d'Einstein et autoduale). Mais  $W^+$  n'est pas nulle puisque la courbure scalaire  $u$  est positive. Ainsi, on ne peut confondre, dans ce cas, les deux fibrés  $Z^+(CP^2)$  et  $Z^-(CP^2)$ . Ce dernier est une variété complexe (pour  $\mathcal{I}$ ), l'autre non. Nous allons construire  $Z^-(CP^2)$ , comme dans le cas de la sphère  $S^4$ , en considérant  $CP^2$  comme une forme réelle d'une variété complexe de dimension complexe 4.

Comme  $CP^2$  est elle-même une variété complexe, elle possède de façon naturelle un complexifié  $\Gamma$  défini par

$$(89) \quad \Gamma = CP^2 \times \overline{CP^2}$$

où  $\overline{CP^2}$  note la variété conjuguée (=la même variété différentiable avec la structure conjuguée  $-j$ ).

Cette variété est identifiée, à l'aide de la métrique hermitienne de  $C^3$  à partir de laquelle est fabriquée la métrique de Fubini-Study, au plan projectif dual  $(CP^2)^*$  dont les points sont les droites projectives de  $CP^2$ , i.e. les 2-plans de  $C^3$ .

La variété  $\Gamma = CP^2 \times (CP^2)^*$  est munie, par construction même, d'une structure réelle  $\tau$  définie par

$$(90) \quad \tau((x, \xi)) = (\xi^\perp, x^\perp), \quad \forall x \in CP^2, \quad \forall \xi \in (CP^2)^*$$

où  $\xi^\perp$  et  $x^\perp$  notent respectivement la droite complexe orthogonale au 2-plan  $\xi$  et le 2-plan complexe orthogonal à  $x$ .

Les points  $\tau$ -réel de  $\Gamma$  sont les couples de la forme  $(x, x^\perp)$  dont l'ensemble constitue une sous-variété réelle  $\Gamma^R$  naturellement difféomorphe à  $CP^2$ .

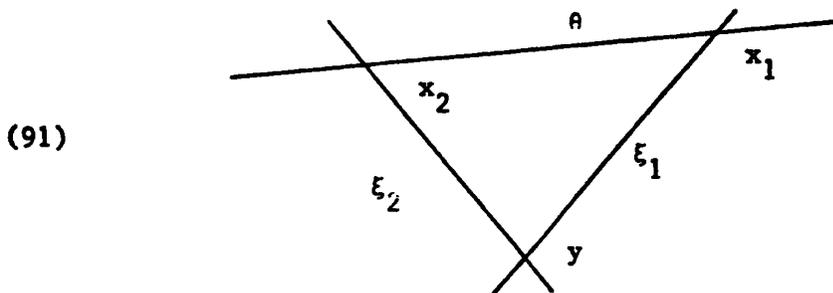
A l'intérieur de  $\Gamma$ , nous trouvons la variété des drapeaux  $D_3$  qui est l'hypersurface complexe constituée des couples  $(x, \xi)$  tels que  $x \in \xi$ .  $D_3$  est une variété complexe de dimension 3 que nous voulons identifier à l'espace des twisteurs de  $CP^2$ .

Pour ce faire, nous construisons, comme dans le cas plat (cf. §1), une famille de courbes complexes isomorphes à  $CP^1$  (l'équivalent des droites projectives de  $Z = P(T)$  de §1) dans  $D_3$ , paramétrée par les points de notre nouvel univers complexe  $\Gamma$ , ou plutôt d'un ouvert de  $\Gamma$ .

De façon précise, soit  $\tilde{\Gamma}$  le complémentaire de  $D_3$  dans  $\Gamma$ .

A tout point  $(y, \theta)$  de  $\tilde{\Gamma}$  ( $y \notin \theta$ ), nous associons une droite  $D_{y, \theta}$  de  $D_3$  définie par

$$D_{y, \theta} = \{ (x, \xi) \in D_3 \mid x \in \theta, y \in \xi \} .$$



On observe que l'univers réel  $\Gamma^R$  est entièrement contenu dans l'ouvert

$\tilde{\Gamma}$ .

Par tout élément  $(x, \xi)$  de  $D_3$  passe une droite réelle et une seule : la droite déterminée par le couple  $(y, y^\perp)$  où  $y$  est l'orthogonal de  $x$  dans  $\xi$

$$(92) \quad y = x^\perp \cap \xi .$$

Nous obtenons ainsi une fibration  $\pi$  de  $D_3$  sur  $\Gamma^R = \mathbb{C}P^2$  qui, à tout drapeau  $(x, \xi)$ , associe le point  $y$  de  $\mathbb{C}P^2$  défini par (92).

Les points de la fibre  $\pi^{-1}(y)$  correspondent bijectivement aux points  $x$  de  $y^\perp$ , i.e. aux droites complexes de l'espace tangent  $T_y(\mathbb{C}P^2)$  identifié  $\mathbb{C}$ -linéairement (et métriquement) à l'espace  $\text{Hom}(y, y^\perp)$ .

A  $x$ , considérée comme droite complexe de  $T_y(\mathbb{C}P^2)$ , nous attachons la structure complexe  $J_x$  de  $T_y(\mathbb{C}P^2)$  obtenue de la façon suivante :

$J_x$  coïncide avec la conjuguée de  $j$  sur la droite complexe  $x$ , et avec  $j$  sur l'orthogonale (que nous identifions à la droite complexe  $z$  de  $\mathbb{C}^3$  orthogonale à la fois à  $x$  et  $y$ ).

Naturellement,  $J_x$  induit l'orientation inverse de l'orientation naturelle de  $\mathbb{C}P^2$  (induite par  $j$ ) et toutes les structures complexes orthogonales négatives de  $T_y(\mathbb{C}P^2)$  ayant nécessairement une (unique) droite commune avec  $j$  (qui est positive), sont de ce type.

Nous avons ainsi identifié la projection  $D_3 \rightarrow \mathbb{C}P^2$  avec la projection twistorielle  $Z^-(\mathbb{C}P^2) \rightarrow \mathbb{C}P^2$ .

Il reste à montrer que  $J$  coïncide avec la structure complexe naturelle de  $D_3$ .

L'espace tangent  $T_{(x, \xi)} D_3$  est naturellement identifié ( $\mathbb{C}$ -linéairement) à

$$(93) \quad T_{(x, \xi)} D_3 = \text{Hom}(x, y) \oplus \text{Hom}(x, z) \oplus \text{Hom}(y, z) .$$

La direction (complexe)  $\pi$ -verticale est la direction  $\text{Hom}(x, z)$ , tandis que la restriction de la différentielle  $T\pi$  à l'espace horizontal  $\text{Hom}(x, y) \oplus \text{Hom}(y, z)$  s'écrit

$$(94) \quad (\alpha, \beta) \in \text{Hom}(x, y) \oplus \text{Hom}(y, z) \xrightarrow{T\pi} (\alpha^*, \beta) \in T_y(\mathbb{C}P^2) = \text{Hom}(y, x) \oplus \text{Hom}(y, z)$$

où  $\alpha^*$  est le transposé hermitien de  $\alpha$ .

On voit que  $J_x$  a été fabriqué de façon que  $T\pi$  soit  $C$ -linéaire . Nous avons ainsi complètement achevé l'identification  $(Z^-(\mathbb{C}P^2), \nu) \simeq D_3$  à condition de tenir pour évident que la distribution horizontale que nous avons considérée sur  $D_3$  coïncide avec la distribution horizontale de Levi-Civita induite par l'isomorphisme d'espaces fibrés  $Z^-(\mathbb{C}P^2) \simeq D_3$ . Ceci découle du fait que la distribution de Levi-Civita doit elle-même être orthogonale aux fibres pour toutes les métriques  $U(3)$ -invariantes de  $D_3$  .

Remarque. Outre les droites déjà considérées de  $D_3$ , indexées par  $\mathbb{R}^1$ ,  $D_3$  possède deux autres familles de courbes complexes remarquables, encore isomorphes à  $\mathbb{C}P^1$ , indexées respectivement par  $\mathbb{C}P^2$  et  $(\mathbb{C}P^2)^*$ . Ce sont les fibres des deux projections naturelles

$$(95) \quad \begin{array}{ccc} & D_3 \simeq \mathbb{C}P^2 \times (\mathbb{C}P^2)^* & \\ P_1 \swarrow & & \searrow P_2 \\ \mathbb{C}P^2 & & (\mathbb{C}P^2)^* \end{array}$$

En chaque point  $(x, \xi)$  de  $D_3$  passe une courbe unique de chacune de ces deux familles et les directions tangentes engendrées par ces deux courbes constituent l'ensemble des directions tangentes horizontales.

Au contraire, l'ensemble des droites de  $D_3$  passant par le drapeau  $(x, \xi)$  déterminent la totalité des directions tangentes en  $(x, \xi)$  à l'exception des directions horizontales .

8. Un des intérêts majeur de l'introduction des twisteurs est de transformer en objets holomorphes (sur l'espace  $Z$ ) des objets définis sur la variété  $M$  par certaines équations différentielles .

Nous avons vu , dans le cas plat, comment interpréter la structure conforme de  $S$  à l'aide de la seule structure complexe de  $Z$  (muni de la famille des droites projectives ) cf. §1 I.9 .

Considérons le cas où "l'univers réel" est une variété riemannienne autoduale , de manière que l'espace des twisteurs  $Z = Z^-(M)$  soit une variété complexe pour la métrique .

Soit  $G$  un groupe de Lie compact que nous interprétons comme un groupe de symétries internes en considérant un  $G$ -fibré principal  $Q$  au-dessus de  $M$  .

Un potentiel de Yang-Mills est une connexion  $\nabla$  sur  $Q$  dont la courbure  $\Omega$  -vue comme une 2-forme sur  $M$  à valeurs dans le fibré vectoriel adjoint  $L(Q)$  (formé, à partir de  $Q$ , à l'aide de la représentation adjointe de  $G$  sur son algèbre de Lie  $L(G)$  )- est autoduale

$$(96) \quad * \Omega = \Omega$$

où l'opérateur de Hodge  $*$  agit sur la partie 2-forme de la courbure, de sorte que la condition (96) ne dépend que de la structure conforme de  $M$ .

Soit  $\mu$  une représentation  $\mathbb{C}$ -linéaire de  $G$  sur un espace vectoriel  $V$  muni d'une structure hermitienne (définie positive) préservé par  $G$ . La courbure de la connexion induite  $\nabla^\mu$  sur le fibré vectoriel hermitien associé  $E^\mu = Q \times V/G$  est une 2-forme autoduale à valeurs dans le fibré vectoriel  $\text{End}(E^\mu)$ .

Il en résulte que l'image inverse  $\pi^{-1}(E)$  de  $E$  sur l'espace des twisteurs  $Z$  possède une structure naturelle de fibré vectoriel holomorphe.

En effet, toute connexion hermitienne sur un fibré vectoriel hermitien au-dessus d'une variété complexe - telle que  $\pi^{-1}(\nabla^\mu)$  sur  $\pi^{-1}(E^\mu)$  au-dessus de  $(Z, J)$  - détermine une structure de fibré holomorphe si sa courbure est de type (1,1) (les sections holomorphes sont alors, par définition, les sections annihilées par la partie de type (0,1) de la connexion).

Or, la courbure de  $\nabla^\mu$  étant autoduale, est, de ce fait,  $J$ -invariante pour tous les  $J$  dans  $Z = Z^-(M)$ , cf. les inclusions (72).

Il en résulte que la courbure de  $\pi^{-1}(\nabla^\mu)$ , qui est l'image inverse de la courbure de  $\nabla^\mu$  par  $\pi$ , est  $J$ -invariante.

On observera que le fibré holomorphe  $\pi^{-1}(E)$  est trivial au-dessus de chaque fibre de  $\pi$ . (Une excellente référence pour cette section est [At]).

## §3. TWISTEURS ET APPLICATIONS

## HARMONIQUES.

1. L'introduction des techniques twistorielles dans l'étude des applications harmoniques a donné lieu récemment à de nombreuses contributions .

Là encore, il s'agit de substituer des applications holomorphes à des applications harmoniques ; i.e. vérifiant certaine équation différentielle non-linéaire.

De façon précise, nous considérons la situation suivante où  $f$  est une application  $C^\infty$  d'une surface de Riemann  $(\Sigma, J)$  dans une variété riemannienne orientée  $(M, g)$  de dimension 4.

La théorie des applications harmoniques, lorsque la source  $\Sigma$  est de dimension 2, est particulière en ce qu'elle ne fait intervenir que la structure conforme de  $\Sigma$ , i.e. sa seule structure de surface de Riemann lorsque  $\Sigma$  est orientée, ce que nous avons supposé par commodité (sinon, il faudrait travailler avec des surfaces de Riemann impaires).

En revanche, la partie de la théorie qui concerne la variété-but  $M$  est métrique, et il faudra s'attendre, de ce fait, à un usage détourné de la théorie des twisteur, où la structure presque-complexe non-conforme  $\mathcal{Y}'$  jouera le rôle premier (à la place de  $\mathcal{Y}$ ) ainsi que la distribution horizontale qui prendra le pas sur la fibration twistorielles.

2. La connexion de Levi-Civita  $D$  de  $(M, g)$  induit, sur le fibré image-inverse  $f^{-1}(TM)$  une connexion (encore notée  $D$ ) à partir de laquelle nous définissons sur les formes de  $\Sigma$  à valeurs dans le fibré  $f^{-1}(TM)$  une différentielle extérieure  $d^D$  (dont le carré est l'opposé de la courbure de  $D$ ).

Sous forme décomposée, l'action de  $d^D$  s'écrit

$$(97) \quad d^D(X \otimes \phi) = DX \otimes \phi + X \otimes d\phi$$

où  $\phi$  est une forme scalaire sur  $\Sigma$  et  $X$  une section de  $f^{-1}(TM)$ . La différentielle  $Tf$ , considérée comme 1-forme à valeurs dans  $f^{-1}(TM)$ , est  $d^D$ -fermée (ceci exprimant que  $D$  est sans torsion).

L'application  $f$  est harmonique si et seulement si la composée  $Tf \circ J$  est aussi  $d^D$ -fermée.

De façon équivalente,  $f$  est harmonique si et seulement si la différentielle  $Tf$  est holomorphe lorsque considérée comme une section du fibré vectoriel  $(T^{1,0}_\Sigma) \otimes_C f^{-1}(T^C M)$ , où  $(T^{1,0}_\Sigma)$  est le fibré cotangent holomorphe de  $\Sigma$  (= fibré des formes de type  $(1,0)$  = fibré canonique de  $\Sigma$ ) et où  $f^{-1}(T^C M)$ , image-inverse du complexifié  $T^C M$  de  $TM$ , est muni de la structure holomorphe induite par la connexion de Levi-Civita comme il a été dit en §2.8.

Remarque. Sur  $(\Sigma, J)$ , comme sur toute variété complexe, les formes bilinéaires  $J$ -invariantes symétriques et anti-symétriques sont identifiées au moyen de la correspondance

$$(98) \quad \begin{array}{ccc} \beta(U, V) & \leftrightarrow & \beta(JU, V) \\ \text{symétrique} & & \text{anti-symétrique} \end{array}$$

La 2-forme-énergie  $e(f)$  est la 2-forme sur  $\Sigma$  associée de cette manière à la partie  $J$ -invariante de la forme bilinéaire symétrique  $f^*g$ . Les applications harmoniques de  $(\Sigma, J)$  dans  $(M, g)$  sont les applications critiques pour l'énergie totale

$$(99) \quad E(f) = \int_{\Sigma} e(f)$$

dont l'équation d'Euler est précisément

$$(100) \quad d^D(Tf, J) = 0.$$

Ce sont les applications harmoniques, au sens riemannien, pour toutes les métriques riemanniennes sur  $\Sigma$  dans la classe conforme déterminée par  $J$ .

L'application  $f$  est dite conforme (= faiblement conforme) si  $f^*g$  est  $J$ -invariante.

3. Du fait que  $Tf$  est une section holomorphe d'un fibré vectoriel holomorphe quand  $f$  est harmonique, nous déduisons aisément qu'une application harmonique et conforme est une pseudo-immersion (ou est constante).

Avant de définir ce terme, observons ceci : en chaque point  $p$  de  $\Sigma$  où  $f$  est une immersion, la différentielle  $Tf$  détermine un 2-plan orienté dans  $T_x M$ ,  $x=f(p)$ , i.e. un relèvement de  $f$  dans le fibré  $G_2(M)$  des 2-plans orientés sur  $M$ .

Ce relèvement  $\tau$  est l'application de Gauss de  $f$  définie en tous point où  $f$  est une immersion.

Nous disons que  $f$  est une pseudo-immersion si  $f$  est une immersion en dehors d'un ensemble discret -possiblement vide- de points singuliers où  $Tf$  s'annule, de telle sorte que l'application de Gauss s'étende différemment à  $\Sigma$  tout entière.

Ainsi, toute application harmonique conforme non-constante  $f$  de  $(\Sigma, J)$  dans  $(M, g)$  admet un relèvement globalement défini

$$(101) \quad \begin{array}{ccc} & & G_2(M) \\ & \nearrow \tau & \downarrow \pi \\ \Sigma & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Bornons nous à supposer momentanément que  $f$  est une pseudo-immersion de  $\Sigma$  dans  $(M, g)$  (dont la définition ne fait intervenir que l'orientation de  $\Sigma$ ).

Le relèvement  $\tau$  détermine un sous-fibré orienté (de rang 2)  $T$  de  $f^{-1}(TM)$  dont la fibre en  $p$  est le 2-plan orienté  $\tau(p)$ .

Le défaut d'isomorphisme de l'application naturelle  $Tf: T\Sigma \rightarrow T$  est mesuré, quand  $\Sigma$  est compacte, par la différence

$$(102) \quad m = \chi(T) - \chi(T\Sigma)$$

des classes d'Euler de  $T$  et  $T\Sigma$ , qui est un entier non-négatif appelé l'ordre de ramification de  $f$  et qui est nul si et seulement si  $f$  est une (vraie) immersion.

Par projection orthogonale, la connexion de Levi-Civita  $D$  sur  $f^{-1}(TM)$  induit une connexion  $\nabla$  sur le sous-fibré  $T$  (mais non sur  $T\Sigma$  qui n'est pas un sous-bibré de  $f^{-1}(TM)$ ).

La différence

$$(103) \quad b = D - \nabla$$

est une 1-forme sur  $\Sigma$  à valeurs dans le fibré  $\text{Hom}(T, N)$  où  $N$  est l'orthogonal de  $T$  dans  $f^{-1}(TM)$ .

C'est la 1-forme fondamentale de la pseudo-immersion.

4. Revenons au fibré  $G_2(M)$  dont les éléments sont les 2-plans orientés  $P$  sur  $M$ . En  $P$ , l'espace tangent vertical  $T_P^V G_2(M)$  s'identifie naturellement à l'espace  $\text{Hom}(P, P^\perp)$  des homomorphismes de  $P$  dans l'orthogonal  $P^\perp$ .

Cet espace possède une structure complexe naturelle définie de la façon suivante :

$$(104) \quad A \in \text{Hom}(P, P^\perp) \quad \rightarrow \quad A \circ J_P \in \text{Hom}(P, P^\perp)$$

où  $J_P$  est la structure complexe propre du 2-plan  $P$  déterminé par son orientation et la métrique induite de celle de  $f^{-1}(TM)$ .

Ainsi,  $G_2(M)$  possède une structure presque-complexe verticale que nous notons  $y^V$ .

Par ailleurs, la connexion de Levi-Civita induit une distribution horizontale sur  $G_2(M)$  de sorte que chaque vecteur tangent  $W$  de  $G_2(M)$  en  $P$  peut être identifié à une somme du type (57) :

$$(105) \quad W = (A, X) \quad W \in T_P G_2(M), A \in \text{Hom}(P, P^\perp), \\ X \in T_x M, x = \pi(P).$$

La différentielle de l'application de Gauss s'écrit alors

$$(106) \quad T\tau(U) = (b(U), Tf(U)), \quad U \in T_P \Sigma$$

d'où l'on déduit aisément, en explicitant l'équation d'Euler (100), qu'une pseudo-immersion conforme est harmonique si et seulement si l'application de Gauss  $\tau$  est verticalement holomorphe, i.e.

$$(107) \quad b(JU) = b(U) \circ J, \quad U \in T_P.$$

5. Ce qui précède vaut lorsque la variété-but  $M$  est une variété riemannienne quelconque.

Lorsque  $M$  est de dimension 4 et orientée, nous avons le

LEMME.  $G_2(M)$  est le produit fibré  $Z^+(M) \times_M Z^-(M)$  des deux espaces de twisteurs projectifs de  $M$ .

L'identification se fait ainsi : à tout 2-plan orienté  $P$  de  $T_x M$  nous associons le couple de structures complexes de  $T_x M$   $J^+$  et  $J^-$  égales l'une

et l'autre à  $J_p$  sur  $P$  et, respectivement, à  $J_p^\perp$  et  $-J_p^\perp$  sur l'orthogonal  $P^\perp$  muni de l'orientation induite par celles de  $P$  et  $T_x M$ .

Inversement, deux structures complexes induisant des orientations contraires sur  $T_x M$  admettent une unique droite complexe commune  $P$  dans  $T_x M$  (ce fait se déduit immédiatement de la considération des deux familles  $(F^+)$  et  $(F^-)$  d'espaces isotropes décrites en §1.1.8 : deux espaces isotropes quelconques  $\Theta_x$  et  $\Xi_{[y]}$  ont en commun la droite complexe des endomorphismes ayant  $x$  comme noyau et  $[y]$  comme image).

Ainsi,

$$(108) \quad G_2(M) = Z^+(M) \times_M Z^-(M)$$

et l'application de Gauss  $\tau$  se décompose en deux parties  $\tau = \tau^+ + \tau^-$  :

$$(109) \quad \begin{array}{ccc} & Z^+(M) & \\ \tau \nearrow & \downarrow \pi^+ & \\ \Sigma & \xrightarrow{f} & M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & Z^-(M) & \\ \tau^- \nearrow & \downarrow \pi^- & \\ \Sigma & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Cette fois,  $Z^+(M)$  et  $Z^-(M)$  sont munies de vraies structures presque-complexes  $\mathcal{Y}$  ou  $\mathcal{Y}'$ .

Puisque  $f$  est conforme,  $f$  est horizontalement holomorphe pour  $\mathcal{Y}$  et  $\mathcal{Y}'$ .

Il résulte alors aisément de la Proposition précédente la

**PROPOSITION.** La pseudo-immersion  $f$  est conforme et harmonique si et seulement si  $\tau^+$  est holomorphe de  $(\Sigma, J)$  dans  $(Z^+(M), \mathcal{Y}')$ , si et seulement si  $\tau^-$  est holomorphe de  $(\Sigma, J)$  dans  $(Z^-(M), \mathcal{Y}')$ .

Le fait que  $\mathcal{Y}'$  prenne le pas sur  $\mathcal{Y}$  était attendu (cf. §3.1).

Cela est dû au fait que la détermination (104) de la structure complexe verticale  $\mathcal{Y}^V$  de  $G_2(M)$  se fait nécessairement au moyen de la composition à droite par  $J_p$  puisque, en général, l'orthogonal  $P^\perp$  n'a pas de structure complexe propre (pour  $n > 4$ ).

La structure complexe verticale induite sur  $Z^+(M)$  et  $Z^-(M)$ , quand  $n = 4$ , est donc bien  $\mathcal{Y}'$  qui est elle-même déterminée par la composition à droite avec  $J$  et non  $\mathcal{Y}$  déterminée par la composition à gauche (cf. (59) et (60)).

6. Le programme est ainsi rempli : nous avons établi une correspondance bijective (due à J.Eells et S.Salamon E-S<sub>1,2</sub>) entre les applications holomorphes (au sens presque-complexe) de  $(\Sigma, J)$  dans  $(Z^+(M), ')$  -ou  $(Z^-(M), )$  indifféremment- non-verticales et les applications harmoniques conformes (non-constantes) de  $(\Sigma, J)$  dans  $(M, g)$ .

Malheureusement, nous avons dû pour cela faire appel à la "mauvaise" structure presque-complexe  $J'$  qui n'est jamais intégrable.

Nous sommes ainsi amenés à distinguer parmi les applications harmoniques conformes de  $(\Sigma, J)$  dans  $(M, g)$  celles dont l'une des deux demi-applications de Gauss  $\tau^+$  ou  $\tau^-$  est holomorphe également pour la "bonne" structure presque-complexe  $J$ , ce qui revient à dire, puisque  $J$  et  $J'$  sont conjuguées l'une de l'autre sur l'espace vertical, que  $\tau^+$  ou  $\tau^-$  est horizontal.

Nous appellerons superminimales à droites (resp. à gauche) les pseudo-immersions conformes de  $(\Sigma, J)$  dans  $(M, g)$  dont la (demi-)application de Gauss  $\tau^+$  (resp.  $\tau^-$ ) est horizontale.

Remarque 1. Considérons la forme fondamentale  $B$  d'une pseudo-immersion  $f$  définie, à partir de la 1-forme fondamentale  $b$  par

$$(110) \quad B_{U,V} = b(U)(Tf(V)) \quad \forall U, V \in T_p \Sigma, \forall p \in \Sigma.$$

C'est une forme R-bilinéaire sur  $\Sigma$  à valeurs dans le fibré normal  $N$ , symétrique à cause du fait que  $Tf$  est  $d^D$ -fermée.

Nous disons, comme dans le cas des vraies immersions, que  $f$  est une pseudo-immersion minimale si elle est conforme et  $B$  est  $J$ -anti-invariante :

$$(111) \quad B_{JU, JV} = -B_{U, V} \quad \forall U, V \in T_p \Sigma, \forall p \in \Sigma,$$

ce qui revient à dire que la trace de  $B$  est nulle relativement à toute métrique sur  $\Sigma$  dans la classe conforme déterminée par  $J$ .

Clairement, (111) est équivalent à (107) quand  $f$  est conforme et les pseudo-immersions minimales sont exactement les applications harmoniques conformes (non constantes) puisque celles-ci sont des pseudo-immersions. Parmi celles-ci, les pseudo-immersions superminimales à droite (resp. à gauche) sont caractérisées, parmi les pseudo-immersions conformes, par la condition de  $C$ -linéarité plus forte pour  $B$  exprimée par

$$(112) \quad B_{JU,V} = J^N B_{U,V} \quad ( (112)' \quad B_{JU,V} = -J^N B_{U,V} )$$

où  $J^N$  note la structure complexe propre du fibré normal .

Naturellement, l'une ou l'autre des deux relations (112) implique (111).

Elles sont, par ailleurs, incompatibles sauf si  $B$ , i.e.  $b$ , est nulle (=  $f$  est totalelement géodésique ).

Remarque 2. Nous pouvons développer la remarque précédente de la façon suivante .

La forme fondamentale  $B$  se décompose en trois composantes

$$(113) \quad B = B^+ + \underbrace{B^-}_{B^{2,0} + B^{0,2}}$$

où  $B^+ = B^{1,1}$  est la partie  $J$ -invariante de  $B$ ,  $B^-$  sa partie  $J$ -anti-invariante qui se décompose elle-même en une composante  $J^N$ -linéaire  $B^{2,0}$  et une composante  $J^N$ -anti-linéaire  $B^{0,2}$  (vérifiant respectivement (112) et (112)') .

Soit  $U$  un élément non-nul de  $T_p \Sigma$  en un point  $p$  de la surface  $\Sigma$  . La caractéristique de  $f$  au point  $p$  (relativement à  $U$ ) est l'image par  $B$  dans  $N_p$  du cercle  $e^{i\theta} \cdot U$  de  $T_p$  .

C'est une ellipse  $\Gamma_U$  de  $N_p$  (éventuellement dégénérée) parcourue deux fois, déterminée par

$$(114) \quad B(e^{i\theta} \cdot U) = B_{U,U}^{1,1} + e^{2i\theta} \cdot B_{U,U}^{2,0} + e^{-2i\theta} \cdot B_{U,U}^{0,2} .$$

Si  $U$  est remplacé par  $V = e^{i\phi} \cdot U$ ,  $\rho > 0$ , l'ellipse  $\Gamma_V$  se déduit de  $\Gamma_U$  par une rotation du paramètre d'angle  $2\phi$  et une homothétie de rapport  $\rho$  . Autrement dit, d'un point de vue géométrique, la caractéristique est parfaitement définie (à homothétie près) par  $f$  seule . Comme telle, nous la noterons  $\Gamma^f$  .

Il est alors aisé de vérifier le tableau suivant où  $f$  est une pseudo-immersion conforme :

$$(C1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma^f \text{ est centrée} \\ \text{l'origine} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \{ B^{1,1} = 0 \} \Leftrightarrow \{ \tau^+ \text{ est } \mathfrak{H}_2\text{-holomorphe} \} \\ \Leftrightarrow \{ \tau^- \text{ est } \mathfrak{H}_2\text{-holomorphe} \}$$

(C2)  $\{ \Gamma^f \text{ est un cercle parcouru } \} \Leftrightarrow \{ B^{0,2} = 0 \} \Leftrightarrow \{ \tau^+ \text{ est } \mathcal{J}_1\text{-holomorphe} \}$ ,  
dans le sens positif

(C3)  $\{ \Gamma^f \text{ est un cercle parcouru } \} \Leftrightarrow \{ B^{2,0} = 0 \} \Leftrightarrow \{ \tau^- \text{ est } \mathcal{J}_1\text{-holomorphe} \}$ .  
dans le sens négatif

On notera que les deux dernières situations -contrairement à la première- ne dépendent que de la structure conforme de  $M$ .

Ce fait peut être retrouvé de la façon suivante. Si  $g$  est remplacée par la métrique conforme  $e^{2\sigma} \cdot g$ , où  $\sigma$  est une fonction sur  $M$ , la forme fondamentale  $B$  est remplacée par  $B^\sigma$  qui prend ces valeurs dans le même fibré vectoriel  $N$  et qui se déduit de  $B$  par

$$(115) \quad B^\sigma = B - f^*g \otimes [\text{grad}\sigma]^N$$

où  $[\text{grad}\sigma]^N$  est la composante normale du gradient de  $\sigma$  (relatif à  $g$ ). Si  $f$  est conforme,  $f^*g$  est de type (1,1) par définition et les composantes  $B^{2,0}$  et  $B^{0,2}$  de  $B$  ne sont pas affectées par changement conforme de la métrique  $g$ .

Les pseudo-immersions superminimales à droite (resp. à gauche) sont les pseudo-immersions conformes qui appartiennent à la fois aux catégories (C1) et (C2) ( resp. (C1) et (C3) ).

Les pseudo-immersions conformes de la catégorie (C1) sont les pseudo-immersions minimales.

Il n'y a pas, à ma connaissance, de nom consacré pour les pseudo-immersions conformes des catégories (C2) et (C3).

7. Il faut montrer l'existence de pseudo-immersions superminimales. Par ailleurs, elles n'ont véritablement d'intérêt que lorsque  $\mathcal{J}$  est intégrable et même, puisque nous cherchons des courbes holomorphes dans  $(Z^+(M), \mathcal{J})$  ou  $(Z^-(M), \mathcal{J})$  intégrales de la distribution horizontale, lorsque celle-ci -que nous noterons  $H$ - est elle-même holomorphe. Cette exigence impose une condition supplémentaire sur la courbure  $R$  de  $(M, g)$ .

PROPOSITION. Lorsque  $(M, g)$  est autoduale (resp. anti-autoduale), la distribution horizontale  $H$  sur  $(Z^-(M), \mathcal{J})$  (resp.  $(Z^+(M), \mathcal{J})$ ) est holomorphe si et seulement si la métrique  $g$  est une métrique d'Einstein.

Nota. Dire que  $H$  est holomorphe est dire que  $H$  est un sous-fibré holomorphe du fibré tangent holomorphe  $TZ$  de l'espace des twisteurs, i.e. encore, que la projection verticale de  $TZ$  sur le fibré tangent vertical  $T^V Z$  est une 1-forme holomorphe sur  $Z$  à valeurs dans  $T^V Z$  considéré comme un fibré en droites complexes holomorphe sur  $Z$ .

La Proposition peut se démontrer ainsi. L'espace des twisteurs  $Z$  possède une métrique hermitienne naturelle  $\tilde{g}$  qui fait de la projection twistorielle  $\pi$  une submersion riemannienne : nous transportons la métrique  $g$  de  $M$  sur la distribution horizontale et nous considérons sur l'espace vertical  $T^V Z = A^J_x M$  (cf. §2.2) la métrique naturelle définie par

$$(116) \quad \tilde{g}(A, B) = - \text{trace}(A, B) .$$

Les espaces horizontaux et verticaux sont  $\tilde{g}$ -orthogonaux.

A cette métrique hermitienne  $\tilde{g}$  est attachée la connexion unique  $\tilde{D}$  qui est métrique (pour  $\tilde{g}$ ) et induit la structure holomorphe de  $(TZ, \mathcal{J})$  comme nous l'avons indiqué en §2.8.

Cette connexion, la connexion de Chern de  $\tilde{g}$ , induit, à son tour, par projection orthogonale sur le fibré horizontal  $H$ , une connexion  $\tilde{V}$  sur  $H$ . La différence

$$(117) \quad \tilde{b} = \tilde{D} - \tilde{V}$$

est la 1-forme fondamentale de  $H$  dans  $TZ$ . C'est une 1-forme sur  $Z$  à valeurs dans le fibré  $\text{Hom}(H, T^V Z)$ .

$H$  est un sous-fibré holomorphe de  $TZ$  si et seulement si  $\tilde{b}$  est de type  $(1, 0)$ .

Or,  $\tilde{b}$  s'écrit dans la décomposition (57) :

$$\tilde{b}(A)Y = 0$$

$$\tilde{b}(X)Y \text{ est vertical, défini par}$$

$$(118) \quad \tilde{g}(\tilde{b}(X)Y, A) = g(AX, Y) + 1/2 \cdot (R(X, Y) + J_0 R(JX, Y), A)$$

pour  $A \in A^J_x M$  et  $X, Y \in T_x M$ .

Le premier terme du membre de droite de (118) est de type  $(1, 0)$ , le se-

cond de type (0,1) .

Ainsi,  $H$  est holomorphe si et seulement si  $R(X,Y) + J.R(JX,Y)$  est  $J$ -invariant, i.e.

$$(119) \quad R(JX Y + X JY) = J.R(X Y - JX JY)$$

pour tous  $X, Y \in T_x M$  et  $J$  dans la fibre  $Z_x^\pm(M)$  de  $Z^\pm(M)$ . (Nous avons, dans (119), une écriture mixte pour  $R$  qui apparaît comme un homomorphisme de  $\Lambda_x^2 M$  dans  $A_x M$ , espace des endomorphismes symétriques de  $T_x M$ ).

La condition (119) équivaut clairement aux deux conditions

$$(120) \quad \begin{array}{l} \text{a) } R \text{ envoie } \Lambda^{J^+} \text{ dans } \Lambda^{J^-} \\ \text{b) } R|_{\Lambda^{J^-}} \text{ est } J\text{-linéaire.} \end{array} \quad J \in Z_x^\pm(M)$$

Cette dernière condition est vérifiée par hypothèse puisqu'elle équivaut au fait que  $\mathcal{J}$  est intégrable (cf. §2.5).

La première condition détermine, dans l'espace des tenseurs de courbure  $\mathcal{C}_4$ , un sous-espace  $\mathcal{E}_4$   $SO(4)$ -invariant, distinct de  $\mathcal{C}_4$  (on le vérifie directement) et comprenant de façon évidente la somme  $U \oplus W^+ \oplus W^-$ .

Ainsi,  $\mathcal{E}_4$  est caractérisé, dans  $\mathcal{C}_4$ , par la condition

$$(121) \quad S = 0$$

qui équivaut à la condition d'Einstein.

Remarque . Nous voyons, sur (118), que  $\tilde{b}$  n'est jamais de type (0,1). Nous en déduisons que le fibré tangent vertical n'est jamais un sous-fibré vectoriel holomorphe du fibré tangent (holomorphe)  $TZ$  .

8. Les variétés riemanniennes complètes de dimension 4 orientées, qui sont à la fois  $\pm$ -autoduales et d'Einstein ne sont connues que lorsque la courbure scalaire (constante)  $u$  est positive ou lorsqu'elle est nulle. Pour  $u > 0$ , elles se réduisent aux seules  $S^4$  et  $CP^2$  canoniques, dont nous avons étudié les espaces de twisteurs.

Pour  $u = 0$ , elles se limitent aux variétés et aux surfaces  $K3$  (et leurs quotients discrets).

Pour  $u < 0$ , elles comprennent les espaces hyperboliques réels et complexes.

(ces derniers, comme  $CP^2$ , étant autoduaux). On ne sait pas s'il en existe d'autres.

(Les résultats ci-dessus sont dûs indépendamment à N.Hitchin et Friedrich-Kurke [Hi], [F-K].

Voici donc les limitations qui semblent naturelles concernant la variété-but  $M$ .

9. En ce qui concerne la variété-source  $(\Sigma, J)$  -que nous supposons compacte désormais, de genre  $g$  (que nous ne confondrons pas avec la métrique de  $M$ !)-, on sait que la sphère de Riemann  $S^2$  ( $g=0$ ) se distingue de toutes les autres surfaces de Riemann par le fait qu'elle n'admet aucune 1-forme holomorphe non-nulle (ni, de façon générale, aucun objet holomorphe covariant).

En particulier, toute application harmonique de source  $S^2$  est conforme. En effet, la partie  $J$ -anti-invariante de  $f^*g$  (celle que nous négligeons dans le calcul de l'énergie) est holomorphe quand  $f$  est harmonique, donc nulle si  $(\Sigma, J)$  est la sphère de Riemann.

On peut montrer, en se fondant sur le même argument, que

(P1) Toute application harmonique de  $S^2$  dans la sphère  $S^4$  canonique est superminimale (à droite ou à gauche, le passage de l'un à l'autre s'effectuant par composition avec l'antipodie, cf. §2.6).

(P2) Toute application harmonique de  $S^2$  dans le plan projectif complexe  $CP^2$  est  $\pm$ -holomorphe (donc superminimal à droite), ou superminimal à gauche.

(Résultats dûs, avec un langage légèrement différent à E.Calabi et J.Eells-J.Wood respectivement [Ca], [E-W].

Comme il n'existe aucune application harmonique non-constante de  $S^2$  dans un espace à courbure sectionnelle négative ou nulle, nous sommes ainsi amenés à nous intéresser particulièrement, dans le cadre de la théorie que nous développons, aux applications harmoniques de  $S^2$  dans  $S^4$  ou  $CP^2$ .

Par ailleurs, il existe, comme nous allons voir, des applications harmoniques superminimales de n'importe quelle surface de Riemann compacte  $(\Sigma, J)$  dans  $CP^2$  ou  $S^4$ .

Assez curieusement, ce sont, pour autant que je sache, les seules applications harmoniques connues de  $(\Sigma, J)$  dans  $S^4$  ou  $CP^2$  (si on excepte

celles dont l'image est contenue dans une sous-variété totalement géodésique de dimension inférieure).

10. Les pseudo-immersions superminimales à gauche de  $(\Sigma, J)$  dans  $\mathbb{C}P^2$  sont, par définition, les projections des courbes holomorphes horizontales de  $D_3 = Z^-(\mathbb{C}P^2)$ .

Nous avons vu (cf. §2.7) que la distribution horizontale est intrinsèquement attachée à  $D_3$ , indépendamment de son interprétation twistorielle.

Soit  $F$  une application holomorphe horizontale de  $(\Sigma, J)$  dans  $D_3$ . Ses projections par  $p_1$  et  $p_2$  (cf. (93)) dans  $\mathbb{C}P^2$  et  $(\mathbb{C}P^2)^*$  sont des courbes holomorphes paramétrées par  $(\Sigma, J)$  que nous notons  $C$  et  $C^*$  respectivement.

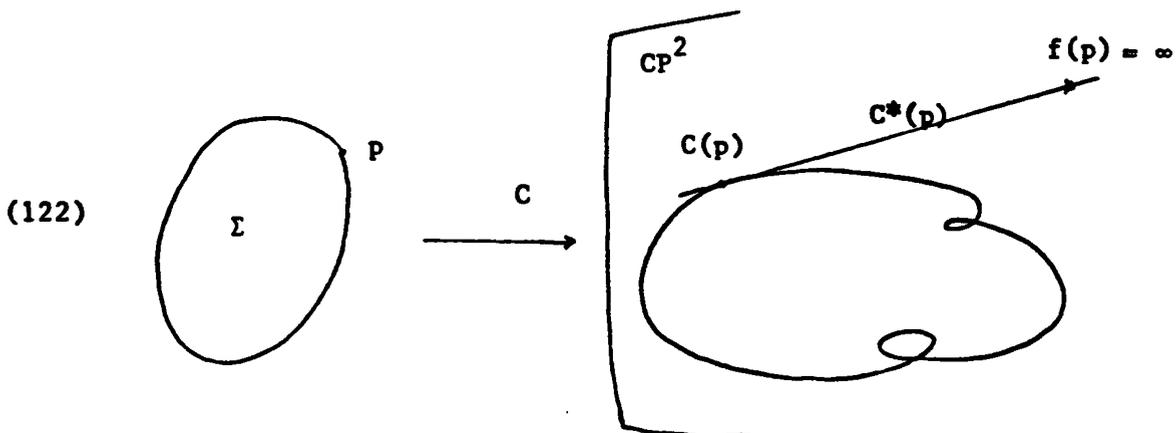
Dire que  $F$  est horizontale est exactement dire que les courbes  $C$  et  $C^*$  sont duales l'une de l'autre.

Ainsi, toutes les pseudo-immersions superminimales à gauche  $f$  de  $(\Sigma, J)$  dans  $\mathbb{C}P^2$  - à l'exception des plongements holomorphes canoniques de  $S^2$  dans  $\mathbb{C}P^2$  comme droites projectives, qui sont totalement géodésiques, donc superminimaux à droite et à gauche - sont obtenues par le procédé suivant :

1) considérer une courbe algébrique  $C$  paramétrée par la surface de Riemann  $(\Sigma, J)$ , donc de genre  $g$ , dans  $\mathbb{C}P^2$

$$C : (\Sigma, J) \rightarrow \mathbb{C}P^2 .$$

2) Associer à chaque point  $p$  de  $\Sigma$  le point  $f(p)$  situé à l'infini relativement à  $C(p)$  sur la droite projective  $C^*(p)$  tangente à la courbe  $C$  en  $C(p)$  (=les droites complexes  $C(p)$  et  $f(p)$  de  $\mathbb{C}^3$  sont orthogonales, au sens hermitien, dans le 2-plan  $C^*(p)$ )



En particulier, toutes les applications harmoniques de  $S^2$  dans  $\mathbb{C}P^2$  qui ne sont pas  $\pm$ -holomorphes sont obtenues par ce procédé à partir

d'une courbe plane  $C$  de genre  $0$ .

11. La correspondance de Bryant. Nous avons interprété l'espace projectif complexe  $CP^3 = P(T)$  comme l'espace des twisteurs projectifs au-dessus de la sphère  $S^4$  au moyen d'une structure symplectique hermitienne sur l'espace des twisteurs  $T$  (cf. §1.IV).

Le fait remarquable, qui confère à la distribution horizontale  $H$  de  $P(T)$  un caractère intrinsèque comme dans le cas de  $D_3$ , est que  $H$  peut être déterminée à partir de la seule structure symplectique complexe de  $T$ , i.e. de la seule 2-forme complexe  $(\cdot, \cdot)$  (§1.IV).

Celle-ci détermine, à l'intérieur de  $Z = P(T)$ , une famille de droites projectives particulières dites horizontales qui sont les 2-plans lagrangiens de  $T$ , i.e. les 2-plans isotropes pour  $(\cdot, \cdot)$  (ne pas confondre les divers emplois du mot isotrope utilisés dans ce texte!)

Cette famille constitue une hypersurface complexe  $\mathcal{H}$  dans l'univers complexe  $G$ , sans point commun avec l'univers réel (euclidien)  $S$ .

En chaque point de  $P(T)$ , l'ensemble des droites horizontales passant par ce point détermine la totalité des directions tangentielles horizontales en ce point.

Remarque. Il y a là une analogie frappante avec le cas de  $CP^2$  (§2.7) où l'espace des drapeaux  $D_3$  joue à la fois les rôles joués ici par et par l'espace des twisteurs projectifs  $Z = P(T)$ .

Dans les deux cas,  $G \setminus \mathcal{H}$  d'une part,  $\Gamma \setminus D_3$  d'autre part, constituent une famille à 4 paramètres complexes de courbes complexes (isomorphes à  $CP^1$ ) dans les espaces de twisteurs projectifs correspondants, laquelle détermine en tout point l'ensemble des directions tangentielles non-horizontales.

Seule diffère la façon dont les directions horizontales sont associées aux points des hypersurfaces complexes  $\mathcal{H}$  ou  $D_3$ .

En fait, l'analogie va plus loin : il existe une correspondance birationnelle  $\mathcal{R}$  entre les espaces de twisteurs projectifs  $D_3$  et  $CP^3$  (de  $CP^2$  et  $S^4$  respectivement) qui préserve les distributions horizontales.

En particulier, toute courbe holomorphe horizontale dans l'un de ces deux espaces de twisteurs - que l'on peut toujours considérer, quitte à modifier les éléments constitutifs de la correspondance  $\mathcal{R}$ , en position générale par rapport à  $\mathcal{R}$ , i.e. évitant les éléments singuliers de  $\mathcal{R}$  (qui n'est évidemment pas un isomorphisme de variétés complexe) - est isomorphe (comme variété complexe cette fois!) à une courbe holomorphe horizontale de l'autre espace.

Ainsi, toutes les pseudo-immersions superminimales à gauche dans le plan projectif complexe  $\mathbb{C}P^2$  que nous avons construites précédemment peuvent se réaliser comme des pseudo-immersions superminimales dans la sphère  $S^4$  au moyen de la correspondance  $\mathcal{R}$ , suivant le schéma :

$$(123) \quad \begin{array}{ccc} & D_3 & \xrightarrow{\mathcal{R}} \mathbb{C}P^3 \\ \nearrow F=\tau^- & \downarrow \pi^- & \downarrow \pi^- \\ \Sigma & \xrightarrow{f} \mathbb{C}P^2 & \searrow \pi^- \\ & \searrow f^{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \circ \tau^- & S^4 \end{array}$$

Si  $f$  est une immersion en  $p$  (=si une des courbes paramétrées  $C$  ou  $C^*$  est régulière en  $p$ ),  $f$  est aussi une immersion.

Ainsi, toutes les surfaces de Riemann compactes peuvent être immergées comme surfaces superminimales dans la sphère  $S^4$ .

Ce résultat est dû à R. Bryant [Br] ainsi que les formules de passage de  $f$  à  $f^{\mathcal{R}}$  (voir aussi [La]).

Une construction géométrique fondée sur la géométrie des droites horizontales de  $\mathbb{C}P^3$ , c'est-à-dire sur la géométrie symplectique complexe de l'espace des twisteurs  $C^4=T$ , se trouve dans [Ga]<sub>1</sub>.

12. Nous avons déjà noté que nous ne connaissons pas, jusqu'à présent, d'autres façons de fabriquer des pseudo-immersions minimales d'une surface de Riemann dans  $S^4$  (qui ne soit pas contenue dans  $S^3$ ). Cela est d'autant plus regrettable que nous n'avons aucun espoir d'obtenir, de cette manière, des plongements minimaux, ni même des pseudo-immersions injectives, dans  $S^4$  (à l'exception des 2-sphères équatoriales). Nous avons, en effet, la

PROPOSITION 1. Aucune pseudo-immersion superminimale d'une surface de Riemann compacte dans la sphère canonique  $S^4$  n'est injective en dehors des 2-sphères équatoriales.

En particulier, il n'existe aucune application harmonique injective de  $S^2$  dans  $S^4$ , en dehors des sphères équatoriales.

Les seuls plongements holomorphes de  $S^2$  dans  $\mathbb{C}P^2$  sont les droites projectives et les coniques (=quadriques de  $\mathbb{C}P^2$ ), mais il existe beaucoup d'autres applications holomorphes injectives de  $S^2$  dans  $\mathbb{C}P^2$  avec un indice de ramification  $m$  quelconque. Par exemple, la courbe

$$(126) \quad (u:v) \rightarrow (u^{m+1}v : u^{m+2} : v^{m+2}) \in \mathbb{C}P^2 .$$

Nous avons néanmoins l'analogue de la Proposition 1 sous la forme de la PROPOSITION 2. Il n'existe aucune pseudo-immersion superminimale à gauche injective d'une surface de Riemann compacte dans le plan projectif complexe en dehors des droites projectives (qui sont totalement géodésiques).

En particulier, il n'existe aucune application harmonique injective qui ne soit pas  $\pm$ -holomorphe de  $S^2$  dans  $\mathbb{C}P^2$ .

Les démonstrations de ces deux propositions figurent respectivement en [G-L] et en [Ga]<sub>2</sub>. Elles sont tout à fait similaires. En voici l'argument.

Dans les deux cas, nous construisons, dans l'univers complexe  $G$  ou  $\Gamma$ , considérés comme variétés de "droites" dans l'espace des twisteurs projectifs  $\mathbb{C}P^3$  ou  $D_3$ , la variété des sécantes  $\text{Sec}(F)$  du relèvement holomorphe horizontal  $F$  de la pseudo-immersion superminimale  $f$  de  $\Sigma$  dans  $S^4$  ou  $\mathbb{C}P^2$ .

Cette variété est une surface complexe paramétrée par le produit  $\Sigma \times \Sigma$  (ou, si on préfère, le produit symétrique  $\Sigma \circlearrowleft \Sigma$ ), mais l'application qui, au couple  $(p_1, p_2) \in \Sigma \times \Sigma$ , associe la sécante correspondante dans  $G$  ou  $\Gamma$  n'est pas partout définie, en particulier, aux points de la diagonale où  $f$  est singulière (et aussi, dans le second cas, aux points  $(p_1, p_2)$  tels que les drapeaux  $F(p_1)$  et  $F(p_2)$  ont un élément commun). Nous définissons alors  $\text{Sec}(F)$  comme la fermeture d'un graphe dans le produit  $\Sigma \times \Sigma \times G$  ou  $\Sigma \times \Sigma \times \Gamma$ , faisant naître ainsi, dans  $G$  ou  $\Gamma$ , des sécantes parasites aux points où  $f$  est singulières.

Nous montrons alors que ces éléments parasites sont horizontaux, i.e. contenus dans l'hypersurface horizontale  $\mathcal{H}$  dans le premier cas,  $D_3$  dans le second.

Ceci constitue une des difficultés techniques des deux démonstrations qui se résolve de façon spécifique dans les deux situations envisagées.

Nota. Si nous renforçons l'hypothèse des Propositions 1 et 2 en supposant que  $f$  est une immersion (i.e. si nous cherchons des plongements superminimaux) la méthode que nous proposons donne le résultat très simplement. D'autres arguments de nature différentes ont été proposés dans ce cas, [Ve] pour  $S^4$  et [We] pour  $\mathbb{C}P^2$ .

Le point précédent ayant été montré, nous voyons que si  $f$  est injective,

aucun élément vertical (=réel) de  $G$  ou  $\Gamma$  ne peut figurer dans  $\text{Sec}(F)$ . Il reste alors à calculer le nombre d'intersection, dans l'homologie entière  $H_4(G, \mathbb{Z})$  ou  $H_4(\Gamma, \mathbb{Z})$  de  $G$  ou  $\Gamma$  (isomorphes respectivement à  $\mathbb{Z}^2$  et  $\mathbb{Z}^3$ ), des classes d'homologie déterminées par la variété analytique  $\text{Sec}(F)$  et l'univers réel de  $G$  ou  $\Gamma$ , i.e.  $S^4 = G^{\mathbb{R}}$  et  $\mathbb{C}P^2 = \Gamma^{\mathbb{R}}$  et montrer que ce nombre n'est pas nul en dehors des exceptions citées dans l'énoncé (là encore, les techniques de calcul sont spécifiques de chacune des deux situations).

Remarque. La seconde partie des Propositions 1 et 2 demeure si  $S^2$  est remplacée par une surface de Riemann quelconque  $(\Sigma, J)$ , si on suppose en plus que l'indice de ramification  $m$  de  $f$  est supérieur à  $3(g-1)$  dans la Proposition 1 ou supérieur à  $4(g-1)$  dans la Proposition 2 (où  $g$  est le genre de  $\Sigma$ ), cf. [Ga]<sub>2</sub>.

(Cette bibliographie n'est en rien exhaustive . Elle ne contient que les ouvrages expressément cités dans le texte).

- [At] M.F.Atiyah . Geometry of Yang-Mills fields . Lezioni Fermiane.  
Pisa 1979 .
- [A-H-S] M.F.Atiyah,N.J.Hitchin et I.M.Singer. Self-duality in four-dimensional geometry . Proc.Royal Soc.London, Ser.A,362 (1978),425-461.
- [Br] R.Bryant. Conformal and minimal immersions of compact surfaces into the 4-sphere. J.Diff.Geo.17 (1982),455-473 .
- [Ca] E.Calabi. Minimal immersions of surfaces in euclidean spheres. J.Diff.Geo. 1 (1967),111-125 .
- [E-S]<sub>1</sub> J.Eells et S.Salamon. Constructions twistorielles des applications harmoniques . C.R.Acad.Sc.Paris 296 (1983), 685-687 .
- [E-S]<sub>2</sub> J.Eells et S.Salamon. Twistorial constructions of harmonic maps of surfaces into four-manifolds. (à paraître dans Ann.Sc. Norm.Sup. Pisa ).
- [E-W] J.Eells et J.C.Wood. Harmonic maps from surfaces to complex projective spaces. Adv.in Math.49 (1983),217-263.
- [F-K] Th.Friedrich et H.Kurke. Compact four-dimensional self-dual Einstein manifolds with positive scalar curvature.(preprint Akademie der Wissenschaften der DDR )
- [Ga]<sub>1</sub> P.Gauduchon . La correspondance de Bryant. (à paraître dans le Séminaire de Géométrie Différentielle de l'Ecole Polytechnique 83-84 , publié par J.P.Bourguignon et H.Blaine Lawson Jr.).
- [Ga]<sub>2</sub> P.Gauduchon. Pseudo-immersions superminimales d'une surface de Riemann dans une variété riemannienne de dimension 4. Bull. de la S.M.F. Fasc.4,t.114 (1986), à paraître.
- [G-L] P.Gauduchon et H.Blaine Lawson,Jr. . Topologically non-singular minimal cones. Ind.U.Math.J. Vol.34,n°4 (1985),915-927.
- [Hi] N.J.Hitchin. Kahlerian twistor spaces. Proc.London Math.Soc.(3)43 (1981), 133-150. Cf.aussi A.Besse. Einstein manifolds.Ch.13. Ergebnisse der Math.10 (Nouvelle Série). Springer-Verlag(1986).
- [La] H.Blaine Lawson,Jr. Surfaces minimales et la construction de Calabi-Penrose. Séminaire Bourbaki n°624 (1984).

- [Sa] S.Salamon. Topics in four-dimensional Riemannian Geometry . Geometry Seminar Luigi Bianchi (1982). Lecture Notes Springer 1022.
- [S-T] I.M.Singer et J.A.Thorpe. The curvature of 4-dimensional Einstein spaces . Dans Global Analysis in honor of K.Kodaira . Edited by D.C.Spencer and S.Yanaga. Princeton Math.Series n°29 (1969).
- [Ve] J.L.Verdier. Two-dimensional  $\sigma$ -models and harmonic maps from  $S^2$  to  $S^{2n}$  . Lecture Notes in Physics. 180, 136-141, Springer (1982).
- [We] S.Webster. Minimal surfaces in a Kähler surface . J.Diff.Geom. 20 (1984), 463-470 .
- [W1] R.O.Wells, Jr. Complex geometry in mathematical physics. Presses de l'Université de Montréal, 78 (1982).