

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

MARC BURGER

## Grandes valeurs propres du laplacien et graphes

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 4 (1985-1986), p. 95-100

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1985-1986\\_\\_4\\_\\_95\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1985-1986__4__95_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1985-1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## GRANDES VALEURS PROPRES DU LAPLACIEN ET GRAPHS

par *Marc BURGER*

Depuis [Se] on sait que si  $\Gamma$  est un sous-groupe arithmétique de  $SL(2, \mathbf{R})$  la première valeur propre  $\lambda_1$  du laplacien de la surface de Riemann associée est grande i.e.  $\lambda_1 > 3/16$ . Cela répond d'une certaine manière à la question de P. Buser [B] à savoir s'il existe une suite de surfaces de Riemann avec  $S_n$  de genre  $g_n \rightarrow \infty$  et  $\lambda_1(S_n)$  ne tend pas vers 0.

Nous allons traiter ce problème en remarquant que la question analogue pour les graphes se traite aisément moyennant la propriété (T) de Kajdan [D-K]. Nous montrerons alors que si  $M' \rightarrow M$  est un revêtement galoisien de groupe  $G$ , les petites valeurs propres du Laplacien de  $M'$  sont minorées par les valeurs propres de l'opérateur de moyenne d'un graphe naturellement associé à  $G$ . On en déduira que si  $M$  est une variété riemannienne compacte et  $\pi_1(M)$  "suffisamment libre" il existe des revêtements  $M_n \rightarrow M$  tels que  $\text{vol}(M_n) \rightarrow \infty$  et  $\lambda_1(M_n) \geq c > 0$ .

Les résultats exposés ici ont paru (sous une forme un peu différente) dans [Bu].

### 1. La propriété (T)

Soit  $G$  un groupe localement compact et  $\widehat{G}$  l'ensemble de ses classes d'équivalence de représentations unitaires continues irréductibles. On munit  $\widehat{G}$  de la topologie de Fell : soit  $\pi \in \widehat{G}$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $K$  un compact de  $G$  et  $v_1, \dots, v_n$  des vecteurs de l'espace  $\mathcal{H}_\pi$  de  $\pi$ . Alors

$$V(\varepsilon, v_1, \dots, v_n, K; \pi) = \{\omega \in \widehat{G} \mid \exists w_1, \dots, w_n \in \mathcal{H}_\omega \\ \text{avec } |\langle \pi(g)v_i, v_j \rangle - \langle \omega(g)w_i, w_j \rangle| < \varepsilon, \forall i, j, \forall g \in K\}$$

Les ensembles  $V(\varepsilon, v_1, \dots, v_n, K; \pi)$  forment un système fondamental de voisinage de  $\pi$ .

**DÉFINITION.** — On dit que  $G$  a la propriété **(T)** si la représentation identité  $1_G$  est isolée dans  $\widehat{G}$  muni de la topologie de Fell.

On vérifie aisément que dans  $\widehat{G}$  une suite  $\pi_\alpha$  converge vers  $\pi$  si et seulement si pour tout  $v \in \mathcal{X}_\pi$  il existe  $v_\alpha \in \mathcal{X}_{\pi_\alpha}$  tels que la suite  $\langle \pi_\alpha(g)v_\alpha, v_\alpha \rangle$  converge vers  $\langle \pi(g)v, v \rangle$  uniformément sur les parties compactes de  $G$ .

L'intérêt de la propriété **(T)** provient des résultats suivants : Si  $\Gamma$  est discret dénombrable et possède la propriété **(T)** alors

- a)  $\Gamma$  est engendré par un nombre fini de générateurs.
- b) Pour toute représentation orthogonale  $\pi : \Gamma \rightarrow O(n, \mathbb{R})$  on a  $H^1(\Gamma, \pi) = 0$ .
- c)  $\Gamma$  a la propriété FA [S], en particulier n'est pas un amalgame.
- d) si  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de covolume fini de  $G$  et si  $G$  a la propriété **(T)** alors  $\Gamma$  a la propriété **(T)**.

Enfin, cette dernière propriété et le théorème suivant de Kajdan [D-K] montrent que les groupes discrets ayant la propriété **(T)** existent en profusion.

**THÉORÈME.** — Un groupe algébrique semi-simple sur un corps localement compact non discret, dont toutes les composantes simples sont de rang déployé  $\geq 2$ , possède la propriété **(T)**.

En particulier, pour  $n \geq 3$ ,  $SL(n, \mathbb{Z})$ ,  $SP(n, \mathbb{Z})$  possèdent la propriété **(T)**.

## 2. Graphes ayant grande valeur propre

Soit  $\Gamma$  un groupe discret ayant un nombre fini de générateurs  $S$  tel que  $S = S^{-1}$ ,  $\Gamma'$  un sous-groupe normal de  $\Gamma$  et  $\mathcal{G}$  le graphe sur  $\Gamma' \backslash \Gamma$  déduit de  $S$  i.e. les arêtes entre  $\dot{\gamma}$  et  $\dot{\gamma}'$  sont en bijection avec  $\gamma'^{-1}\gamma\Gamma' \cap S$ . Soit pour  $F \in \mathbb{C}[\Gamma' \backslash \Gamma]$ ,

$$MF(\dot{\gamma}) = \sum_{\gamma' \equiv \gamma} F(\dot{\gamma}'),$$

$$Q(F) = \sum_{\gamma' \equiv \gamma} |F(\dot{\gamma}') - F(\dot{\gamma})|^2 = 2((r - M)F, F)$$

où  $r = \text{Card } S$ . On désigne par  $0 < \lambda_1(\mathcal{G}) \leq \lambda_2(\mathcal{G}) \leq \dots$  les valeurs propres de la forme hermitienne  $Q$ . Soit  $\rho$  la représentation régulière de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{C}[\Gamma' \backslash \Gamma]$  et  $\pi$  une représentation irréductible de  $\Gamma$  telle que  $\pi \subseteq \rho$ . Comme  $M$  commute à  $\rho(\gamma)$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,  $M$  laisse invariant la composante isotypique  $\mathbb{C}[\Gamma' \backslash \Gamma, \pi]$  de  $\pi$  dans  $\rho$ . Soient  $0 \leq \lambda_1(\pi) \leq \lambda_2(\pi) \leq \dots$  les valeurs propres de  $Q$  restreinte à ce sous-espace. Il est clair que  $\lambda_1(\pi) = 0$  si et seulement si  $\pi = 1_\Gamma$ .

LEMME. — Soit  $\Gamma_n \triangleleft \Gamma$ ,  $\mathcal{G}_n$ ,  $\pi_n \leq \rho_n$ ,  $\lambda_1(\pi_n)$  comme ci-dessus. Alors  $\pi_n \rightarrow 1_\Gamma$  dans la topologie de Fell de  $\widehat{\Gamma}$  si et seulement si  $\lambda_1(\pi_n) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

En effet :  $\lambda_1(\pi_n) = 2 \sum_{\gamma \in S} (1 - \operatorname{Re} \langle \pi_n(\gamma) f_n, f_n \rangle)$  pour  $f_n$  convenablement choisi. Donc  $\lambda_1(\pi_n) \rightarrow 0$  si et seulement si  $\operatorname{Re} \langle \pi_n(\gamma) f_n, f_n \rangle \rightarrow 1$  pour tout  $\gamma \in S$ . Comme  $S$  engendre  $\Gamma$  cela est équivalent à  $\pi_n \rightarrow 1_\Gamma$ . ■

COROLLAIRE. — Soit  $\Gamma$  un groupe discret ayant la propriété (T),  $S$  un système fini de générateurs de  $\Gamma$  tel que  $S = S^{-1}$ . Alors il existe  $c(S, \Gamma) > 0$  tel que pour tout  $\Gamma' \triangleleft \Gamma$ ,  $\lambda_1(\mathcal{G}') \geq c(S, \Gamma)$ .

Remarque. — Il y a une construction différente de graphes à grande valeur propre, qui a l'avantage de donner des bornes explicites (en fait les meilleures possibles) de ces valeurs propres.

Soit  $M_2(\Gamma_0(q))$  l'espace des formes automorphes de poids  $z$ ,  $q$  est un premier, et soit  $T(p)$ ,  $p \neq q$  l'opérateur de Hecke agissant dans  $M_2(\Gamma_0(q))$ . On déduit alors des résultats d'Eichler [E 1] qu'il existe une base de  $M_2(\Gamma_0(q))$  dans laquelle la matrice de  $T(p)$  est symétrique à coefficients entiers non négatifs et la somme des lignes est  $p+1$ . Soit  $\mathcal{G}_{p,q}$  le graphe régulier de valence  $p+1$  qui lui correspond. Le nombre de composantes connexes de  $\mathcal{G}_{p,q}$  est égal au nombre de cusps de  $\Gamma_0(q)$ . Prenons une composante  $\mathcal{G}'_{p,q}$ . Alors la valeur propre  $p+1$  de l'opérateur de moyenne est de multiplicité 1 et les autres valeurs propres correspondent à des formes paraboliques propres pour  $T(p)$ , i.e. d'après [E 2] ces valeurs propres sont inférieures ou égales à  $2\sqrt{p}$ . Par ailleurs, si  $q \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{diam}(\mathcal{G}'_{p,q}) \rightarrow \infty$  et si  $\lambda_1(\mathcal{G}'_{p,q})$  est la première valeur propre  $< p+1$  de l'opérateur de moyenne de  $\mathcal{G}'_{p,q}$  alors  $\lambda_1 > 2\sqrt{p} - c/d^2$ ,  $d = \operatorname{diam}(\mathcal{G}'_{p,q})$ .

En résumé, on peut construire pour chaque  $p$  des graphes réguliers de valence  $p+1$ , connexes,  $\mathcal{G}_{p,n}$  tel que si  $\lambda_1(p, n)$  est la première valeur propre de l'opérateur de moyenne de  $\mathcal{G}_{p,n}$  inférieure à  $p+1$  on a  $\lambda_1(p, n) \leq 2\sqrt{p}$  et  $\operatorname{diam}(\mathcal{G}_{p,n}) \rightarrow \infty$  pour  $n \rightarrow \infty$ .

Par ailleurs, on montre aisément :

LEMME. — Si  $\mathcal{G}$  est un graphe régulier de valence  $p+1$ , de diamètre  $d$  et  $p+1 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$  le spectre de l'opérateur de moyenne de  $\mathcal{G}$ , alors

$$\lambda_1 > 2\sqrt{p} - c/d^2.$$

### 3. Grande valeur propre de surfaces

Soit  $M' \rightarrow M$  un revêtement galoisien de variétés riemanniennes compactes de groupe  $G$ . Soit  $\widetilde{M}$  le revêtement universel de  $M$ ,  $x_0 \in \widetilde{M}$ ,

$$\mathcal{F}(x_0) = \left\{ x \in \widetilde{M} \mid d(x, x_0) < d(x, \gamma x_0), \forall \gamma \in G - \{e\} \right\}$$

$\mathcal{F} = p'(\overline{\mathcal{F}(x_0)})$  où  $p'$  est la projection de  $\widetilde{M}$  sur  $M'$ . On munit alors  $G$  d'une structure de graphe  $\mathcal{G}$  en posant  $\gamma \equiv \gamma'$  si  $\gamma \neq \gamma'$  et  $\gamma'^{-1}\gamma\mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ . On pourrait aussi exiger que  $\gamma'^{-1}\gamma\mathcal{F}$  rencontre  $\mathcal{F}$  en une sous-variété à bord de dimension  $n-1$ , ( $n = \dim M$ ). Comme  $G$  agit transitivement sur  $\mathcal{G}$  ce graphe est régulier de valence  $r$ . Soit alors  $A$  l'opérateur de moyenne de  $\mathcal{G}$  et

$$B = \frac{(r-A)(r+2+A)}{(r+1)^2}.$$

Il est facile de voir que  $B$  est semi-défini positif et que 0 est valeur propre de multiplicité 1. Soit alors  $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$  le spectre de  $B$ .

**PROPOSITION.** — *Il existe des constantes  $c_1(M)$ ,  $c_2(M)$  positives telles que si  $\lambda_i(M')$ ,  $i^{\text{ème}}$  valeur propre du Laplacien de  $M'$ , est telle que  $\lambda_i(M') < c_1(M)$  alors*

$$\lambda_i(M') \geq c_2(M)\mu_i(B).$$

**COROLLAIRE.** — *Soit  $M' \rightarrow M$  un revêtement galoisien de groupe  $G$  de variétés riemanniennes compactes,  $\mathcal{G}$  le graphe du revêtement,  $Q$  la forme hermitienne canonique sur  $\mathbb{C}[\mathcal{G}]$ ,  $\pi$  une représentation irréductible de  $G$ ,  $\lambda_1(\pi, \mathcal{G})$  la plus petite valeur propre de  $Q$  dans la composante isotypique de  $\pi$  dans  $\mathbb{C}[\mathcal{G}]$ ,  $\lambda_1(\pi, M')$  la plus petite valeur propre de  $\Delta$  dans la composante isotypique de  $\pi$  dans  $L^2(M')$  alors :*

$$\lambda_1(\pi, M') \geq c(M)\lambda_1(\pi, \mathcal{G}).$$

En ce qui concerne la proposition, soit  $V_\theta = \cup_{g' \equiv_\theta g} g'\mathcal{F} \cup \mathcal{F}$ . On remarque alors qu'il existe une constante  $c_2(M) > 0$  telle que  $\lambda_1^N(V_\theta) \geq c_2(M)$  et  $\lambda_1^N(\mathcal{F}) \geq c_2(M)$  où  $\lambda_1^N$  est la première valeur propre non nulle du problème de Neumann.

Si  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  est le spectre du Laplacien de  $M'$  et  $\varphi_0, \varphi_1, \dots$  un système orthonormé complet de fonctions propres, on remarque que l'application

$$\begin{aligned} L^2(M') &\rightarrow \mathbb{C}[\mathcal{G}] \\ f &\rightarrow F \end{aligned}$$

où  $F(g) = \int_{g, \mathcal{F}} f$  restreinte au sous-espace  $\oplus_{\lambda_i < c_1(M)} \mathbb{C}\varphi_i$ ,  $y$  est injective ( $c_1(M) \leq \lambda_1^N(\mathcal{F})$ ).

Soit alors  $\Phi_0, \Phi_1, \dots$  un système orthonormé de fonctions propres de  $B$  et soit  $j$  avec  $\lambda_j < c_1(M)$ ,  $f \in \oplus_{k=0}^j \mathbb{R}\varphi_k$ ,  $f \neq 0$  avec  $F$  orthogonale à  $\Phi_0, \dots, \Phi_{j-1}$ .

Alors :

$$\begin{aligned} \int_{V_g} \|\nabla f(x)\|^2 dx &\geq c_2(M) \int_{V_g} \left[ f(x) - \frac{1}{m(V_g)} \int_{V_g} f \right]^2 dx \\ &= c_2(M) \left\{ \int_{V_g} f(x)^2 dx - \frac{1}{m(V_g)} \left( \int_{V_g} f \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

En sommant sur  $g \in G$  :

$$\begin{aligned} (r+1) \int_{M'} \|\nabla f(x)\|^2 dx &\geq c_2(M) \left\{ (r+1) \int_{M'} f(x)^2 dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{m(M)(r+1)} \sum_g (AF(g) + F(g))^2 \right\} \end{aligned}$$

i.e.

$$\lambda_j \geq c_2(M) \left\{ 1 - \frac{(r+1)^{-2} \sum_g (AF(g) + F(g))^2}{m(M) \int_{M'} f(x)^2 dx} \right\}.$$

L'inégalité ci-dessus jointe à :  $\int_{M'} f(x)^2 dx \geq \frac{1}{m(M)} \sum_g F(g)^2$  fournit le résultat. ■

Le corollaire se déduit aisément de la proposition en remarquant que l'application  $f \rightarrow F$  est  $G$ -équivariante et que le minimum du spectre de  $B$  dans un sous-espace  $A$ -invariant est contrôlé par le minimum du spectre de  $r - A$  dans celui-ci.

**COROLLAIRE.** — *Pour toute surface de Riemann  $S$  de genre  $g \geq 2$  il existe  $S_n \rightarrow S$  revêtements galoisiens tels que  $\text{genre}(S_n) \rightarrow \infty$  et  $\lambda_1(S_n) \geq c > 0$  pour tout  $n$ .*

En effet,  $\pi_1(S)$  a pour quotient le groupe libre à 2 générateurs et donc  $SL(3, \mathbf{Z})$ . Soit alors  $\Gamma_p \triangleleft \pi_1(S)$  tel que  $\pi_1(S)/\Gamma_p = SL(3, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ . Comme  $SL(3, \mathbf{Z})$  a la propriété (T), la première valeur propre  $\lambda_1(\mathcal{G}_p)$  du graphe de  $\pi_1(S)/\Gamma_p$  est minorée par une constante positive indépendante de  $p$ . Si  $S_p$  est le revêtement de  $S$  correspondant à  $\Gamma_p$  on aura  $\lambda_1(S_p) \geq c > 0$  pour tout  $p$ .

## Bibliographie

- [B] P. BUSER. — *On Cheeger's inequality  $\lambda_1 \geq h^2/4$* , Proc. Sympos. Pure Math., **36** (1980), 29-77.
- [Bu] M. BURGER. — *Estimation de petites valeurs propres du Laplacien d'un revêtement de variétés riemanniennes compactes*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér.I Math., **302** (1986), 191-194.
- [D-K] DELAROCHE-KIRILLOV. — *Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés*, Sémin. Bourbaki, 20ème année, n°343, 1967-68.
- [E 1] M. EICHLER. — *The basis problem for modular forms and the traces of the Hecke operators*, Lecture notes in Math. (Springer), **320** (1973), 75-151.
- [E 2] M. EICHLER. — *Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzeta-funktion*, Arch. Math. (Basel), **5** (1954), 355-366.
- [S] J. P. SERRE. — *Arbres, amalgames,  $SL_2$* , Astérisque n°46, 1977.
- [Se] A. SELBERG. — *On the estimation of Fourier coefficients of modular forms*, Proc. Sympos. Pure Math., **8** (1965), 1-15.

—◇—

Marc BURGER  
Mathematisches Institut  
Rheinsprung 21  
BASEL