SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

GILLES COURTOIS

Peut-on entendre les trous d'un tambour ?

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 5 (1986-1987), p. 19-24
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1986-1987__5__19_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1986–1987 (19–24)

PEUT-ON ENTENDRE LES TROUS D'UN TAMBOUR?

par *Gilles COURTOIS*

On peut penser qu'un tambour est un disque M de l'espace euclidien $\mathbf{R}^2$. Le son du tambour M est caractérisé par les valeurs propres $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ du problème

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta f = \lambda f \ \text{ sur } M \\ f/\partial M = 0 \text{ ou } \dfrac{\partial f}{\partial \nu/\partial M} = 0 \end{cases}$$

où $\partial/\partial\nu$ est la dérivée suivant la normale à ∂M .

Le tambour troué, $M \setminus A$, où A est une partie de M , a un son caractérisé par les valeurs propres $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$ du problème :

$$(2)\qquad \begin{cases} \Delta f = \lambda f \ \text{ sur } M \setminus A \\ f/\partial M = 0 \text{ ou } \partial f/\partial \nu = 0 \\ f/A = 0 \end{cases}$$

Dans le cas où A est un ouvert à bord régulier, on aurait pu choisir la condition $\dfrac{\partial f}{\partial n/A} = 0$ où $\partial/\partial n$ est la dérivée suivant la normale à ∂A , *cf.* [Ae 1]. Une première question se pose : quelle est la bonne condition de petitesse sur A telle que :

$$(I)\qquad A \text{ petit } \Longleftrightarrow \lambda_k \approx \lambda_k(A) \text{ pour tout } k \geqslant 1 \ .$$

Exemple 1. — Dans [R–T], J. Rauch et M. Taylor ont établi que si M est un domaine borné de $\mathbf{R}^m$ à bord régulier et si A est compact, la bonne condition de petitesse sur A est que la capacité électrostatique de A soit proche de zéro; plus précisément,

$$(3)\qquad \operatorname{cap}_0 A \approx 0 \Longrightarrow \lambda_k(A) \approx \lambda_k \text{ pour tout } k \geqslant 1$$

où la capacité électrostatique $\operatorname{cap}_0 A$ de A est définie par

$$(4)\qquad \operatorname{cap}_0 A = \inf \left[\int_M |\nabla u|^2 \ / \ u/A = 1 \ , \ u/\partial M = 0 \right]$$

Exemple 2. — Lorsque A est le voisinage tubulaire d'une sous-variété N de M de codimension $p \geqslant 2$, *i.e.* $A = A_\varepsilon = T_\varepsilon N$, on peut montrer, *cf.* [Cs 2] et [C–F4] que :

$$\lambda_k(T_\varepsilon N) - \lambda_k = \varphi_k = \varphi_p(\varepsilon) \int_N f_k^2 + o(\varphi_p(\varepsilon)) \tag{5}$$

où $\varphi_p(\varepsilon)$ désigne la capacité électrostatique de la boule euclidienne de rayon ε de $\mathbf{R}^p$, *i.e.* $\varphi_p(\varepsilon) = (p-2)\mathrm{vol}\, S^{p-1}\varepsilon^{p-2}$ si $p \geqslant 3$ et $\varphi_p(\varepsilon) = 2\pi|\log\varepsilon|^{-1}$ si $p = 2$ et où chaque f_k est une fonction propre de L^2-norme 1 associée à la valeur propre λ_k . Lorsque λ_k est simple, le choix de f_k est évident; lorsque $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_{k+l}$ est multiple, on choisit $f_k, f_{k+1}, \ldots, f_{k+l}$ formant une base orthonornée de l'espace propre associé à λ_k qui diagonalise la forme quadratique $f \to \int_N f^2$.

On voit ainsi dans ces deux exemples que la proximité de $\lambda_k(A)$ et λ_k pour tout k est liée à la notion de capacité.

Nous nous plaçons dans la suite dans le cas où M est une variété riemannienne compacte sans bord. Pour toute partie A de M , on définit la capacité de A , notée cap A par :

$$\mathrm{cap}\ A = \inf\left[\int_M |\nabla u|^2 \ / \ u \in H^1(M)\ ,\ u/A = 1\ ,\ \int_M u = 0\right] \tag{6}$$

Remarque. — $u/A = 1$ signifie qu'il existe un ouvert contenant A (qui dépend de u) sur lequel $u \equiv 1$, *cf.* [Cs 3] p.17.

En réponse à la question (I), nous avons le

THÉORÈME 1. — *Soit $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ une famille de parties de M . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) cap $A_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$

(ii) $\lambda_1(A_\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \lambda_1 = 0$

(iii) $\lambda_k(A_\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \lambda_k$ *pour tout* $k \geqslant 1$.

Schéma de preuve. — Rappelons que $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ est le spectre de la forme quadratique $q(g) = \int_M |\nabla g|^2$ définie sur $H^1(M)$ et que $\{\lambda_k(A_\varepsilon)\}_{k=1}^\infty$ est le spectre de q définie sur $H_0^1(M \setminus A_\varepsilon)$ où $H_0^1(M \setminus A_\varepsilon)$ est le sous-espace de $H^1(M)$ formé des fonctions "nulles sur A_ε", *i.e.* le complété dans $H^1(M)$ de l'espace des fonctions g telles que $(1-g)/A = 1$ au sens de la remarque précédente.

En particulier, le principe du mini-max dit que :

$$\lambda_k[\text{resp.}\,\lambda_k(A_\varepsilon)] = \inf_{\left\{\begin{smallmatrix} E\subset H^1(M)\ [\text{resp. } H_0^1(M\setminus A_\varepsilon)] \\ \dim E = k \end{smallmatrix}\right.} \max_{g\in E\setminus\{0\}} \left(\int_M |\nabla g|^2 / \int_M g^2\right) . \tag{7}$$

Le théorème 1 se résume au fait que cap $A_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ équivaut à ce que le sous-espace $H_0^1(M \setminus A_\varepsilon)$ "remplit" de plus en plus $H^1(M)$ [au sens où : $\forall f \in H^1(M)$, $\exists f_\varepsilon \in H_0^1(M \setminus A_\varepsilon)$, $\lim_{H^1} f_\varepsilon = f$].

Par exemple, si u_{A_ε} désigne la fonction qui réalise la capacité de A_ε , [i.e. cap $A_\varepsilon = \int_M |\nabla u_{A_\varepsilon}|^2$], on voit que lorsque cap A_ε tend vers 0 , la fonction 1 de $H^1(M)$ est limite de $(1 - u_{A_\varepsilon}) \in H_0^1(M \setminus A_\varepsilon)$ puisque, d'après l'inégalité de Poincaré, $\|u_{A_\varepsilon}\|^2_{H^1(M)} \leqslant (1 + \lambda_2^{-1})$cap A_ε . [*cf.* [Cs 3] p.32]. ∎

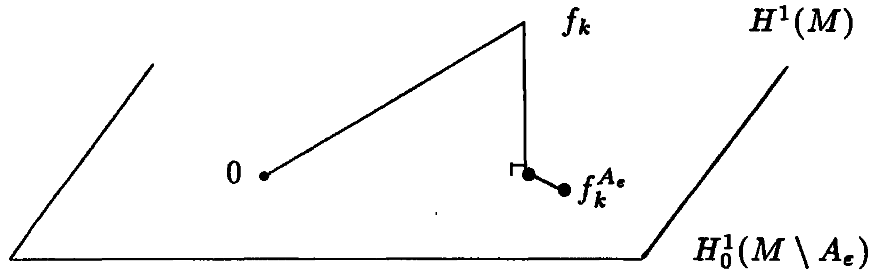
On peut se poser à présent la question suivante :

(*II*) Quel est le comportement asymptotique de $(\lambda_k(A_\varepsilon) - \lambda_k)$ lorsque cap $A_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$?

Nous allons discuter dans le cas où λ_k est simple, pour simplifier.

On a vu que la condition cap $A_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ assure le "remplissage" de $H^1(M)$ par $H_0^1(M \setminus A_\varepsilon)$. En particulier, la fonction propre f_k associée à λ_k peut être approximée par des éléments de $H_0^1(M \setminus A_\varepsilon)$. Plus précisément, on peut montrer que la fonction propre $f_k^{A_\varepsilon}$ associée à $\lambda_k(A_\varepsilon)$ converge au sens de H^1 vers f_k (lorsque λ_k est simple), *cf.* figure 1.

Fig. 1



De plus, nous avons le

THÉORÈME 2. — *Soit $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ une famille de parties de M telles que* cap $A_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$. *Alors*

(*i*) $$\lambda_k(A_\varepsilon) - \lambda_k \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} d^2(f_k, H_0^1(M \setminus A_\varepsilon)) .$$

Si de plus, A_ε est un ouvert à bord lisse par morceaux,

(*ii*) $$d^2(f_k, H_0^1(M \setminus A_\varepsilon)) = \text{cap } A_\varepsilon . \mu_{\alpha_\varepsilon}(f_k^2) + o(\text{cap } A_\varepsilon)$$

où μ_{A_ε} est la mesure capacitaire de A_ε .

Preuve. — *cf.* [Cs 3] p.53. ∎

Remarque. — La mesure capacitaire de A_ε est une mesure positive, portée par ∂A_ε , telle que $\mu_{A_\varepsilon}(\partial A_\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 1$, définie par $\mu_{A_\varepsilon}(\varphi) = (\text{cap } A_\varepsilon)^{-1}\int_{\partial A_\varepsilon} \varphi \frac{\partial u_{A_\varepsilon}}{\partial \nu}$.

Remarque. — L'hypothèse A_ε à bord lisse par morceaux est technique et le résultat (ii) devrait subsister sans cette hypothèse.

Remarque. — Lorsque $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_{k+l}$ est multiple, il faut choisir $f_k, f_{k+1}, \ldots, f_{k+l}$ dans (i) [resp. ii] formant une base orthonormée diagonalisant sur l'espace propre correspondant la forme quadratique

$$f \mapsto d^2(f, H_0^1(M \setminus A_\varepsilon)) \ [\text{resp.}\, f \mapsto \mu_{A_\varepsilon}(f^2)] \ .$$

Exemple. — Lorsque $A_\varepsilon = T_\varepsilon N$ est le ε-voisinage tubulaire d'une sous-variété compacte N de codimension $p \geqslant 2$ de M , on peut estimer cap $T_\varepsilon N$ et μ_{A_ε} :

$$\text{cap } T_\varepsilon N \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \text{vol } N.\varphi_p(\varepsilon) \tag{8}$$

$$\mu_{A_\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{\delta N}{\text{vol } N} \quad \text{faiblement} \tag{9}$$

où δ_N est définie par $\delta_N(\varphi) = \int_N \varphi$.

De (8) et (9) on déduit

$$\lambda_k(T_\varepsilon N) - \lambda_k = \varphi_p(\varepsilon). \int_N f_k^2 + r_{N,M}(\varepsilon).\varphi_p(\varepsilon) \tag{10}$$

où $\lim_{\varepsilon\to 0} r_{N,M}(\varepsilon) = 0$.

En fait, le premier terme dans (10), *i.e.* $\varphi_p(\varepsilon)\int_N f_k^2$, "s'explique" par le fait que lorsque ε tend vers 0 , le voisinage tubulaire $T_\varepsilon N$ "ressemble" localement à $N \times B_p(\varepsilon)$ où $B_p(\varepsilon)$ est la boule de rayon ε de $\mathbf{R}^p$. On voit donc qu'au premier ordre, $(\lambda_k(T_\varepsilon N) - \lambda_k)$ est "euclidien" et il est naturel que la géométrie de M et N apparaisse dans le reste $r_{N,M}(\varepsilon).\varphi_p(\varepsilon)$.

Soit $\alpha = (K, \omega, D, \Lambda, p) \in \mathbf{R}^+ \times (\mathbf{R}_*^+)^3 \times \mathbf{N}$. On dira qu'une variété M et une sous-variété N de codimension p vérifient les hypothèses H_α si $|\sigma(M)| \leqslant K$, $\text{inj}(N, M) \geqslant \omega$, $\text{diam}(M) \leqslant D$, $\Lambda_k(M) \geqslant \Lambda$ où $\sigma(M)$, $d(M)$ désignent la courbure sectionnelle et le diamètre de M , $\text{inj}(N, M)$ désigne le rayon d'injectivité du plongement de N dans M , et où $\Lambda_k(M)$ est l'écart entre λ_k et la valeur propre de M la plus proche de λ_k et distincte de λ_k .

THÉORÈME 3. — *Soit $\alpha = (K, \omega, D, \Lambda, p) \in \mathbf{R}^+ \times (\mathbf{R}_*^+)^3 \times \mathbf{N}$. Il existe une fonction explicitable $r_\alpha(\varepsilon)$ vérifiant $\lim_{r\to 0} r_\alpha(\varepsilon) = 0$ et telle que :*

$$|\lambda_k(T_\varepsilon N) - \lambda_k - \varphi_p(\varepsilon)\int_N f_k^2| \leqslant r_\alpha(\varepsilon).\varphi_p(\varepsilon)$$

pour toute variété M et toute sous-variété N de M vérifiant les hypothèses H_α .

Preuve. — *cf.* [Cs 3]. ■

Remarque. — Des exemples montrent que les hypothèses H_α sont toutes nécessaires au sens où si l'une manque, il existe un contre-exemple à la conclusion, *cf.* [Cs 3] p.79.

Bibliographie

[Ae 1] C. ANNÉ. — *Perturbation du spectre $S \setminus TUB^{\epsilon}Y$ (Conditions de Neumann)*, Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, n° 4, Grenoble, rm1985"1986.

[Ae 2] C. ANNÉ. — *Spectre du Laplacien et limite de variété avec perte de dimension*, Preprint Institut Fourier, Grenoble, n° 45, 1985.

[An] ANCONA. — *Théorie du potentiel*, Cours de 3ème cycle , Univ. Paris VI.

[Au] T. AUBIN. — *Non linear analysis on manifolds, Monge-Ampère equation*, Springer Verlag Berlin, 1982.

[Ba] C. BANDLE. — *Isoperimetric inequalities and applications*, Pitman London, 1980.

[Bd] P.H. BÉRARD. — *Spectral geometry : direct and inverse problems*, Lecture Notes in Math. Springer **1207**, 1986.

[Bn] G. BESSON. — *Comportement asymptotique des valeurs propres du laplacien dans un domaine avec un trou*, Bull. Soc. Math. France , **113** (1985), 211-230.

[Cl] I. CHAVEL. — *Eigenvalue in riemannian geometry*, Academic Press, New-York, 1984.

[C–F 1] I. CHAVEL, E.A. FELDMAN. — *Spectra of domains in compact manifolds*, J. Funct. Anal., **30** (1978), 198-222.

[C–F 2] I. CHAVEL, E.A. FELDMAN. — *The Lenz shift and Wiener Sausage in insulated domains*, Warwick Symposium on Stochastic Analysis, 1987.

[C–F 3] I. CHAVEL, E.A. FELDMAN. — *The Lenz shift and Wiener Sausage in riemannian manifolds*, Compositio Math., **60** (1986), 65-84.

[C–F 4] I. CHAVEL, E.A.FELDMAN. — *Spectra of manifolds less a small hole*, preprint, New-York, 1986.

[C–P] J. CHAZARAIN, A. PIRIOU. — *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles*, Gauthier-Villars, Paris, 1981.

[Ck] G. CHOQUET. — *Lecture on analysis, vol. 1*, Benjamin New-York, 1969.

[C–C] B. COLBOIS, Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Sur la multiplicité de la première valeur propre d'une surface de Riemann à courbure constante*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 62, Grenoble , 1986.

[C–H] R. COURANT, D. HILBERT. — *Methods of Mathematical physics*, Wiley-Interscience I 1953, II, 1962.

[Cs 1] G. COURTOIS. — *Estimations du noyau de l'opérateur de la chaleur et du noyau de Green d'une variété riemannienne, application aux variétés privées d'un ϵ-tube*, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math., **303** (1986), 135-138.

[Cs 2] G. COURTOIS. — *Spectre des variétés privées d'un ϵ-tube*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 61, Grenoble , 1986.

[Cs 3] G. COURTOIS. — *Comportement d'une variété riemannienne compacte sous perturbation topologique par excision d'un domaine*, Thèse - Grenoble, 1987.

[DG] G. DEL GROSSO, F. MARCHETTI. — *Asymptotic estimates for the principal eigenvalue of the Laplacian in a geodesic ball*, Appl. Math. Optim., **10** (1983), 37-50.

[G–T] S. GILBARD, N.S. TRUDINGER. — *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer Verlag Berlin, 1983.

[G–P] V. GUILLEMIN, A. POLLACK. — *Differential topology*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey, 1974.

[H–K] E. HEINTZE, H. KARCHER. — *A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **11** (1978), 451-470.

[Kc] M. KAC. — *Probabilistic methods in some problems of scattering theory*, Rocky Mountain J. Math., **4** (1974), 511-537.

[Ko] T. KATO. — *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, 1966.

[L–Y] P. LI, S.T. YAU. — *Eigenvalues of a compact riemannian manifold*, Proc. Sympos. Pure Math., (1980), 205-239.

[M–T] T. MATSUZAWA, S. TANNO. — *Estimates of the first eigenvalue of a big cup domain of a 2-sphere*, Comp. Math., **47** (1982), 95-100.

[M–N–P] V.G. MAZ'YA, S.A. NAZAROV, B.A. PLAMENEVSKII. — *Asympto-tic expansion of the eigenvalues of boundary value problems for the Laplace operator in domains with small holes*, Math. U.S.S.R. Izv., **24** (1985), 321-345.

[Ma] C. MIRANDA. — *Partial differential equation of elliptic type*, Springer Verlag Berlin, 1970.

[Oz 1] S. OZAWA. — *Singular Hadamard's variation of domains and eigenvalues of the Laplacian*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math.I, **56** (1980), 306-310; II **57** (1981), 242-246.

[Oz 2] S. OZAWA. — *Singular variation of domains and eigenvalues of the Laplacian*, Duke Math. J., **48** (1981), 767-778.

[Oz 3] S. OZAWA. — *The first eigenvalues of the laplacian on two dimensional riemannian manifolds*, Tohoku Math. J., **34** (1982), 7-14.

[Oz 4] S. OZAWA. — *Electrostatic capacity and eigenvalues of the Laplacian*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA Math., **30** (1982), 53-62.

[Oz 5] S. OZAWA. — *An asymptotic formula for the eigenvalues of the Laplacian in a three dimensional domain with a small hole*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA Math., **30** (1983), 243-247.

[R–T] J. RAUCH, M. TAYLOR. — *Potential and scattering on wildly perturbed domains*, J. Funct. Anal., **18** (1975), 27-59.

[Sr] F. SPITZER. — *Electrostatic capacity, heat flow and Brownian motion*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, **3** (1964), 110-121.