Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Colette Anné

Introduction aux travaux de Fukaya

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 5 (1986-1987), p. 25-31
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1986-1987__5__25_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1986–1987 (25–31)

INTRODUCTION AUX TRAVAUX DE FUKAYA

par *Colette ANNÉ*

Les théorèmes de finitude sont une approche des obstructions topologiques à l'existence de certaines métriques. Par exemple M. Gromov prouve, voir [G1], qu'on ne peut pas mettre de métrique à courbure sectionnelle positive sur la somme connexe de suffisamment de copies de $S^p \times S^{n-p}$ en donnant une majoration de la somme des nombres de Betti, universelle si la courbure est positive et dépendant en général du diamètre et d'une borne inférieure de la courbure (P. Bérard et S. Gallot ont par la suite amélioré ce résultat, voir [Bé]).

Ces théorèmes ont été inaugurés par A. Weinstein [W]; puis J. Cheeger, [C], montra la finitude des classes de difféomorphisme des variétés vérifiant $\dim M = n$, $\mathrm{Vol}\, M \geq v$, $\mathrm{Diam}\, M \leq D$ et $|K_M| \leq \kappa$. Il restait pour obtenir à partir de ces théorèmes des résultats du type de Rauch à montrer la convergence des métriques. La réponse a été donnée par M. Gromov avec son théomème de compacité ♮ [G2 p.129]: l'espace

$$\mathfrak{M}_{n,\mu,D} = \{(M,g) \text{ var.riem.}/ \dim M = n,\ \mathrm{Diam}\, M \leq D,\ \mathrm{Inj}\, M \geq \mu,\ |K_M| \leq 1\}$$

est compact pour la distance de Lipschitz:

$$d_L(X,Y) = \inf_{f:X\to Y \text{ homéo.}} |\log dil(f)| + |\log dil(f^{-1})|.$$

Citons comme exemple d'application le raffinement que M. Berger en a tiré pour son théorème de la sphère [B]: $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists \varepsilon(n) > 0$ tel que si M est une variété simplement connexe de dimension $2n$ admettant une métrique dont la courbure sectionnelle vérifie $\frac{1}{4} - \varepsilon(n) < K \leq 1$ alors M est homéomorphe à S^{2n} ou difféomorphe à un espace symétrique compact de rang 1.

Pour démontrer son théorème de compacité M. Gromov commence par prouver la précompacité de

$$\mathfrak{M}_{n,D} = \{(M,g) \text{ var.riem.}/ \dim M = n,\ \mathrm{Diam}\, M \leq D,\ \mathrm{Ricci}(g) \geq -(n-1)rg\}$$

♮ Inj représente le rayon d'injectivité.

pour la distance de Hausdorff

$$d_H(X,Y) = \inf_{f:X\to Z \text{ et } h:Y\to Z \text{ isométries}} d_Z(f(X),h(Y)).$$

Ceci se fait en majorant le cardinal d'un ε-réseau maximal quelconque, grâce à l'inégalité de Bishop (cf. [G2] p.65-66).

Ensuite il reste à montrer l'équivalence des deux distances sur $\mathfrak{M}_{n,\mu,D}$, on peut alors utiliser le théorème de J. Cheeger.

Que ce passe-t-il entre $\mathfrak{M}_{n,\mu,D}$ et $\mathfrak{M}_{n,D}$?

1. — Ces méthodes suggèrent un théorème de finitude du type d'homotopie avec Diam $M \leq D$, $K_M \geq \kappa$, Vol $M \geq v$; ceci vient d'être démontré par Grove et Peterson [G P].

2. Collapsing. — K.Fukaya a étudié certaines dégénerescences (ou collapsing) de variétés.

DÉFINITION. — Une variété compacte M dégénère si elle admet une suite de métriques g_k à courbure uniformément bornée et dont le rayon d'injectivité vérifie:

$$\forall m \in M \quad \lim_{k\to\infty} \mathrm{Inj}(g_k) = 0.$$

UN EXEMPLE. — On obtient facilement des exemples en écrasant la fibre de certains fibrés riemanniens si celle-ci est plate, ou bien les orbites de l'action de certains groupes.

Le tore $\mathbf{T}^2$ agit sur la sphère $\mathbf{S}^3 = \{(z_1,z_2) \in C^2,\ |z_1| + |z_2| = 1\}$ par

$$(z_1,z_2) \longmapsto (e^{i\theta}z_1, e^{i\varphi}z_2).$$

Les orbites sont paramétrées par $(\cos t, \sin t)_{t\in[0,\frac{\pi}{2}]}$, il y a deux orbites singulières $\{z_1 = 0\}$ et $\{z_2 = 0\}$. Donnons nous un réel α et multiplions la métrique dans la direction du flot d'isométries engendré par le champs de vecteur $\frac{\partial}{\partial\theta} + \alpha\frac{\partial}{\partial\varphi}$, par ε^2.

$\diamond$ Si $\alpha = 1$ on obtient la fibration de Hopf utilisée par Marcel Berger pour trouver un contre-exemple à la généralisation en dimension impaire du théorème de Klingenberg en exhibant une métrique à courbure pincée et rayon d'injectivité petit en dimension impaire. La limite de la variété quand ε tend vers 0 est une sphère.

$\diamond$ Si α est rationnel les orbites restent compactes et la limite est une sphère.

$\diamond$ Si α est irrationnel l'adhérence d'une orbite non singulière forme un tore plat $\mathbf{T}^2$, la limite pour la convergence de Hausdorff est le segment $[0,\frac{\pi}{2}]$. On peut ici regarder la limite des valeurs propres de l'opérateur de Laplace.

La première valeur propre de la fibre F_t tend vers $+\infty$, il n'y a donc qu'à estimer le quotient de Rayleigh-Ritz des fonctions constantes sur les fibres. Il sort

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\nabla f|^2 \mathrm{Vol}\,(F_t)dt}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f|^2 \mathrm{Vol}\,(F_t)dt} \qquad \mathrm{Vol}\,(F_t) = 4\pi^2 \cos t \sin t$$

le spectre est donc celui de l'opérateur autoadjoint déduit de la forme quadratique $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\nabla f|^2 \mathrm{Vol}\,(F_t)dt$ par rapport au produit scalaire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f|^2 \mathrm{Vol}\,(F_t)dt$ *(c'est la mesure d'intégration qui a changé).*

Théorème de caractérisation. — [C.G] Une variété riemmannienne dégénère si et seulement si elle admet une F-structure de rang strictement positif, cela signifie grossièrement que la variété admet localement des revêtements finis où agissent des tores qui peuvent être différents mais vérifient des conditions de compatibilité *(une définition précise est donné dans l'article de référence).*

K.Fukaya donne une description précise de l'objet limite pour des collapsings bien déterminés. Avant d'énoncer ses résultats rappelons le théorème historique de Gromov des variétés presque plates *(qui décrit un collapsing sur un point)* [G3]:

$\exists\, \varepsilon_n$ tel que $\forall (M,g)$ variété riemmannienne compacte

$$|K| \leq 1, \quad \text{Diam } M \leq \varepsilon_n \Longrightarrow M \text{ infranilvariété}$$

c'est à dire: M admet un revêtement fini qui est le quotient d'un groupe de Lie nilpotent par un sous-groupe discret co-compact (ou nilvariété).

Les résultats de Fukaya. —

[F1] *Il existe $\varepsilon_{n,\mu}$ tel que si M et N sont deux variétés vérifiant:*

$$d_H(M,N) \leq \varepsilon_{n,\mu} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \dim M \leq n,\ |K_M| \leq 1, \\ \dim N \leq n,\ |K_N| \leq 1,\ \text{Inj } N \geq \mu \end{array}$$

alors il existe une fibration $f : M \longrightarrow N$ dont la fibre est une infranilvariété et qui est presque riemannienne (i.e. il existe un encadrement $e^{-\tau\xi}\|\xi\| \leq \|df(\xi)\| \leq e^{\tau\xi}\|\xi\|$ pour les vecteurs ξ orthogonaux à la fibre).

[F2] *Si la variété X est dans le bord de l'ensemble des variétés riemanniennes pointées vérifiant $\dim M \leq n$, Diam $M \leq D$, $|K| \leq 1$ (pour d_H) il existe une variété riemannienne M sur laquelle agit le groupe orthogonal $O(n)$ de telle sorte que X est isométrique à $M/O(n)$; X est une variété stratifiée, et les strates admettent des métriques de classe $C^{1,\alpha}$.*

[F3] *Convergence spectrale. Les variétés sont munies de mesures de probabilité. On dit que les variétés mesurées (M_α, μ_α) convergent vers (M,μ) pour la topologie de Hausdorff mesurée si en plus il existe des applications mesurables $\psi_\alpha : M_\alpha \to M$ et $\psi_\alpha^*(\mu_\alpha)$ converge faiblement vers μ. Alors si les variétés riemanniennes $(M_i, \frac{dv_i}{\mathrm{Vol}\, M_i})$ convergent vers (X,μ) le spectre* *du laplacien sur M_i converge vers celui d'un opérateur sur X défini à partir de μ.*

LA MÉTHODE. — Nous parlerons ici surtout de [F1].

1. Construction de f. — M et N étant comme dans [F1], vérifiant $d_H(M,N) \le \varepsilon$, posons $R = \inf(\frac{\mu}{2}, \frac{\pi}{2})$ et prenons sur M et N des réseaux de points, respectivement $m_1, \dots, m_p$ et $n_1, \dots, n_p$, les approchant à 3ε près et vérifiant:

$$d(m_i, n_i) \le \varepsilon \quad \text{et} \quad i \ne j \Rightarrow d(m_i, m_j) \ge \varepsilon \, \text{et} \, d(n_i, m_j) \ge \varepsilon;$$

choisissons enfin une fonction positive, à support dans [-r,r], de classe C^∞ et égale à 1 sur un voisinage de 0.

On plonge N dans $\mathbf{R}^p$ par $f_N(x) = \Big(h\big(d(x,n_i)\big)\Big)_{1 \le i \le p}$.

En effet f_N est de classe C^∞ et si r et ε sont assez petits c'est un plongement; de plus si $k = \sup_{x \in N} \sharp\{j; \quad d(x,n_j) < r\}$ l'exponentielle normale restreinte au voisinage tubulaire de $f_N(N)$ de rayon $C\sqrt{k}$ réalise un difféomorphisme, pour une constante bien choisie. Enfin la norme de df_N est uniformément bornée et

$$\forall x, y \in N, \quad d(x,y) \le C^{-te} d_{\mathbf{R}^p}\big(f_N(x), f_N(y)\big).$$

Il faut maintenant envoyer M dans ce voisinage tubulaire, mais le rayon d'injectivité de M n'est pas minoré et on ne peut utiliser directement $d(m_i, \ . \ )$; on définit alors

$$d_i(x) = \int_{y \in B(m_i,\varepsilon)} d(x,y) \frac{dy}{\mathrm{Vol}\ B(m_i,\varepsilon)} \qquad \text{de classe } C^1$$

et si $A = \{y \in B(m_i, \varepsilon) \mid y \notin \text{CutLocus } (x)\}$

$$\xi.d_i = \frac{\int_A \xi.d(y, \ . \ )dy}{\mathrm{Vol}\ A}.$$

Ce résultat s'obtient par un raffinement du théorème de Lebesgue: d_i est lipschitzienne, sa dérivée est donc bornée et le Cut Locus est inclu dans un ensemble de mesure nulle. Ecrivons $A = \uparrow \bigcup A_n$. Alors

$$d_j(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_{A_n} d(x,y) \frac{dy}{\mathrm{Vol}\ B(m_i,\varepsilon)}$$

or l'application: $x \mapsto \int_{A_n} d(x,y)dt$ est différentiable, sa différentielle est uniformément bornée et donc $\lim_{n \to +\infty} \int_{A_n} \xi.d(y, \quad)dt$ existe.

On pose alors $f_M(x) = \Big(h\big(d_j(x)\big)\Big)_{1 \le j \le p}$.

$f_M(M) \subset TUB^{3\varepsilon\sqrt{k}} f_N(N)$:

$\forall m \in M \quad \exists n \in N \quad$ tel que $d(m,n) < \varepsilon$

$$\begin{aligned}
|d_j(m) - d(n_j,n)| &= \left|\frac{1}{\mathrm{Vol}\,(B_\varepsilon)} \int_{d(y,m_j)<\varepsilon} \big(d(m,y) - d(n_j,n)\big)\,dy\right| \\
&\leq \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(B_\varepsilon)} \int |d(m,y) - d(m,m_j)| + |d(m,m_j) - d(n,m_j)| \\
&\qquad\qquad + |d(n,m_j) - d(n,n_j)|\,dy \\
&\leq 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

f est définie par:

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{f} & N \\
{\scriptstyle f_M} \downarrow & & \uparrow {\scriptstyle f_N^{-1}} \\
TUB^{3\varepsilon\sqrt{k}} f_N(N) & \xrightarrow{\pi} & f_N(N)
\end{array}$$

n.b: π est de classe C^∞ dès que ε est assez petit.

2. Propriétés de f. —

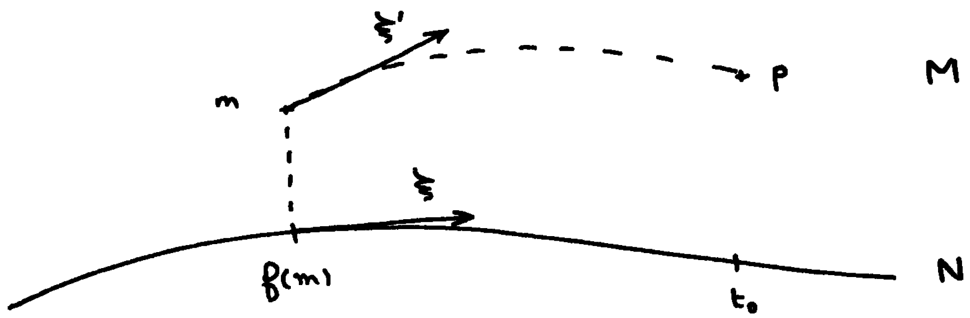
§1- $d\big(f(m),m\big) = O(\varepsilon)$,

§2- f est une submersion et M fibre au dessus de N:

LEMME(2.3). — $\forall m \in M,\ \xi \in T_{f(m)}N, \quad \exists \xi' \in T_m M$

$$\frac{|df_M(\xi) - df_N(\xi')|}{|df_N(\xi')|} < O(r) + O\Big(\frac{\varepsilon}{r}\Big).$$

Donc M est transverse aux fibres normales à N.



IDÉE DE LA DÉMONSTRATION. — Il faut un contrôle des dérivées des fonctions distance entrant dans la définition de f_M et f_N et donc des angles de géodésiques particulières. L'auteur démontre pour cela plusieurs lemmes dont l'ingrédient fondamental est le théorème de Toponogov (ce qui explique les hypothèses de courbure) et dont il ressort deux types importants de géodésiques sur M: les petits lacets et les géodésiques longues dont la distance des extrémités est proche du paramètre.

◇ Si $l_1 : [0,t_1]$ est un petit lacet (d'ordre ∂) et si $l_2 : [0,t_2]$ est une géodésique longue issue du même point et vérifiant $d\big(l_2(0), l_2(t_2)\big) < \nu$ alors

$$|\mathrm{Ang}\ \big(\dot{l}_1(0), \dot{l}_2(0)\big) - \frac{\pi}{2}| \leq O(\nu) + O(\varepsilon) + O(\partial).$$

◇ Si$\{l_i : [0,t_i]\}_{i=3,4}$ sont des géodésiques sur M et $\{l'_i : [0,t'_i]\}_{i=3,4}$ des géodésiques minimisantes sur M qui vérifient
$d(l_i(0), l'_i(0)) < \nu$, $d(l_i(t_i), l'_i(t'_i)) < \nu$ et $|d(l_i(0), l_i(t_i))| < \nu$ alors

$$|\text{Ang}\ (\dot{l}_3(0), \dot{l}_4(0)) - \text{Ang}\ (\dot{l}'_3(0), \dot{l}'_4(0))| < \mathcal{O}(\nu) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

◇ Soit alors $m \in M$, $d(m, f(m)) = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Notons l' la géodésique minimisante sur $[0, t_0]$ de N issue de $f(m)$ et tangente à ξ'; prenons sur M un point p tel que $d(p, l'(t_0)) < \varepsilon$ et l une géodésique sur M de m à p; alors on vérifie que $\xi = \dot{l}(0)$ convient.

§3- La submersion est presque riemannienne.

Il faut définir une horizontale et une verticale. Pour $m \in M$ notons $n = f(m)$ et si N est de dimension k prenons k points $z'_1 \dots z'_k$ sur N tels que $d(n, z'_i)$ soit petite et Grad $d(z'_i, .)_{1 \leq i \leq k}$ forme un repère orthonormé de $T_n N$. Alors si $z_1 \dots z_k$ sont des points de M qui vérifient $d(z_i, z'_i) < \varepsilon$ et si

$$g_i(x) = \int_{y \in B(z_i, \varepsilon)} d(x,y) \frac{dy}{\text{Vol}\ B(z_i, \varepsilon)}$$

notons $\Pi_1(x)$ le sous-espace de $T_x M$ engendré par Grad $g_{i_{1 \leq i \leq k}}$ et $\Pi_2(x)$ son orthogonal, alors

$$\begin{array}{ll} \forall \xi \in \Pi_1(x) |\ |df(\xi)| - |\xi|\ | & < \mathcal{O}(r) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \forall \xi \text{tangent aux fibres} |P_1(\xi)| & \leq |\xi| \mathcal{O}(r) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{array}$$

donc $\xi \in \Pi_1(x) \Rightarrow \exp_x(s\xi)$ est une géodésique du deuxième type (long).

§4- La fibre est une infranilvariété.

f n'est pas de classe C^2, on ne peut donc parler de la seconde forme fondamentale de la fibre et appliquer directement le théorème de Gromov, aussi Fukaya reprend pas à pas le livre de Buser et Karcher [BK] et redémontre le résultat dans sa situation.

3. Les autres résultats. — Pour [F2], si $X = \lim(d_h)M_i$ il faut passer au fibré des repères: FM_i admet une limite M pour d_H et M est une variété (ceci se démontre avec la théorie des pseudo-groupes de M.Gromov et en utilisant le lemme de Margulis), $O(n)$ agit librement sur FM_i donc $O(n)$ agit aussi sur M; $X = M/O(n)$ mais cette action n'est pas forcément libre.

[F3] se fait par des méthodes standard grâce à la formule du Mini-Max, mais la fibration de [F1] n'est pas riemannienne et on ne peut pas, comme dans [A], faire la moyenne sur la fibre pour implanter une fonction de M_i sur X, il faut donc utiliser une section de la submersion ce qui induit quellesque complications techniques.

Je conseille à toute personne intéressée par les questions de collapsing la lecture de l'article très complet de Pierre Pansu [P].

Bibliographie

[G1] M. GROMOV. — *Curvature, diameter and Betti numbers*, Comment.Math. Helvetici, **56** (1981), 179–195.

[Bé] P. BÉRARD. — *Spectral Geometry: Direct and Inverse Problems*, Lecture Notes, 1986.

[W] A. WEINSTEIN. — *On homotopy type of positively pinched manifolds*, Arch.Math. (Basel), **18** (1967), 523–524.

[C] J. CHEEGER. — *Finitness theorems for riemannian manifolds*, Amer.J.Math., **92** (1970), 61–74.

[G2] M. GROMOV, J.LAFONTAINE, P. PANSU. — *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Cedic-Fernand Nathan, 1981.

[B] M. BERGER. — *Sur les variétés riemanniennes pincées juste au-dessous de* $\frac{1}{4}$, Ann.Inst.Fourier, **33** n^o**2** (1983), 135–150.

[GP] K. GROVE, P. PETERSON. — *Bounding homotopy type by geometry (prepub.)*, 1987.

[CG] J. CHEEGER, M. GROMOV. — *Collapsing riemannian manifolds while keeping their curvature bounded I*, J. Diff. Geom., **23** (1986), 309–346.

[G3] M. GROMOV. — *Almost flat manifolds*, J. Diff. Geom., **13** (1978), 231–241.

[F1] K. FUKAYA. — *Collapsing riemannian manifolds to lower dimentional I*, J. Diff. Geom., **25** (1986),?.

[F2] K. FUKAYA. — *A boundary of the set of the riemannian manifolds with bounded curvature and diameter(prepub.)*,1986.

[F3] K. FUKAYA. — *Collapsing of riemannian manifolds and eigenvalues of the Laplace operator*, Invent.Math., **89** (1987), 517–547.

[F4] K. FUKAYA. — *Collapsing riemannian manifolds to one of lower dimensionII*, prepub. Max-Planck Institut n^o10, 1987.

[K] KATSUDA. — *Gromov's convergence theorem and its application*, Nagoya Math.J., **100** (1985), 11–48.

[BK] P. BUSER, H. KARCHER. — *Gromov's almost flat manifolds*, Astérisque n^o81 SMF, 1981.

[A] C. ANNÉ. — *Spectre du Laplacien et écrasement d'anses*, Ann.Scient.E.N.S., **20** (1987), 271–280.

[P] P. PANSU. — *Dégenerescence des variétés riemanniennes, d'après Cheeger et Gromov*, Séminaire Bourbaki n^o618, 1983'84.