Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Yves Carrière

Un survol de la théorie des variétés affines

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 6 (1987-1988), p. 9-22

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1987-1988__6__9_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1987–1988 (9–22)

UN SURVOL DE LA THÉORIE DES VARIÉTÉS AFFINES

par *Yves CARRIÈRE*

Avant-Propos : Ces notes de séminaire ont pour but de donner une introduction sans prétention (et sans démonstrations) à l'aspect topologique de la théorie des variétés affines. Après quelques préliminaires situant les structures affines parmi les (G, X)-structures, nous décrivons les méthodes connues de construction de variétés affines compactes. Nous examinons ensuite les résultats obtenus concernant les trois problèmes fondamentaux de cet aspect de la théorie : nullité de la caractéristique d'Euler, conjecture d'Auslander et conjecture de Markus.

1. Préliminaires

La notion de variété affine (il faudrait rajouter "plate" pour éviter la confusion avec le même terme utilisé en géométrie algébrique) a été introduite vers 1950 en même temps que la notion équivalente de connexion affine plate. La classe des variétés affines fait partie de celle plus large des variétés pourvues d'une (G, X)-structure, notion qui a été semble-t-il clairement dégagée par Ehresmann. Nous allons brièvement rappeler cette notion générale en nous inspirant de [T] (voir aussi [CEG]).

1.1. (G, X)**-structure.** — On dit qu'un groupe d'homéomorphismes G d'une variété X agit *analytiquement* dès que

$$\forall g_1, g_2 \in G, \;\; g_1 = g_2 \text{ sur } U \text{ ouvert de } X, \;\; U \neq \emptyset \;\Rightarrow\; g_1 = g_2.$$

Une (G, X)-structure sur une variété M est la donnée d'un atlas $\{U_i, f_i, g_{ij}\}$ où les cartes $f_i : U_i \longrightarrow X$ sont à valeurs dans les ouverts $f_i(U_i)$ de X et les changements de cartes g_{ij} sont dans G.

Une *variété affine* est une variété pourvue d'une (G, X)-structure où $X = \mathbf{R}^n$ l'espace affine et $G = Aff(\mathbf{R}^n)$ le groupe des transformations affines.

Une liste de (G, X)-structures et terminologie correspondante.

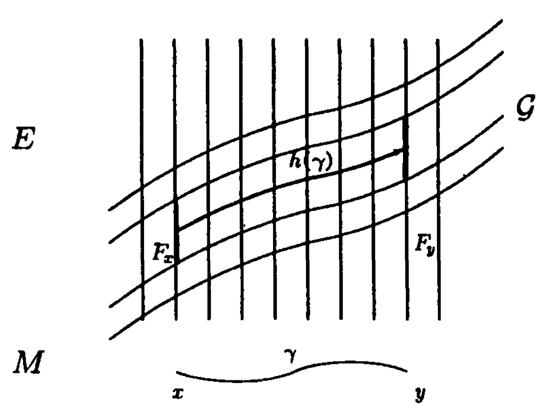
Variété affine...	X	G
ou v. plate	$\mathbf{R}^n$	$Aff(\mathbf{R}^n)$ (déplacements affines)
euclidienne ou v. riem. plate	$\mathbf{R}^n$	$E(n)$ (déplacements euclidiens)
de Lorentz ou v. lorentz. plate	$\mathbf{R}^n$	$E(n-1,1)$ (déplacements lorentziens)
Variété...		
projective réelle	$\mathbf{R}P^n$ l'espace projectif réel	PSL_{n+1} (groupe projectif)
hyperbolique	$\mathbf{H}^n$ l'espace hyperbolique	$SO(n,1)$ (groupe hyperbolique)
elliptique	$\mathbf{S}^n$ la sphère standard	$SO(n+1)$ (groupe orthogonal)
conformément plate	$\mathbf{S}^n$ la sphère standard	$SO(n+1,1)$ (groupe conforme)

1.2. Fibré plat ou fibré feuilleté; holonomie. — Pour les détails voir [CEG], [HT] ou [GH1] par exemple. Un *fibré plat* $E \longrightarrow M$ de fibre F sur une variété de base M est un fibré localement trivial tel que les changements de trivialisations

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \times F \longrightarrow U_i \cap U_j \times F$$

ne dépendent que du second facteur. Ceci veut dire trés exactement qu'en plus du fibré il y a un feuilletage $\mathcal{G}$ transverse aux fibres. Une telle donnée est un *fibré feuilleté* et s'avère équivalente à celle d'un fibré plat. Une autre façon de voir le même objet quit qui conduit encore à une autre appellation est de remarquer que lorsqu'on se déplace dans la base d'un tel fibré la variation des identifications des fibres à une fibre type se fait de manière discrète, c'est-à-dire en se restreignant à un sous-groupe discret (le groupe stuctural) de Homeo(F). Un fibré plat est donc aussi un *fibré à groupe structural discret.*

Voyons E comme un fibré feuilleté



Soit γ un chemin allant de x à y dans M, il permet de définir sans ambiguïté un homéomorphisme $h(\gamma) : F_x \longrightarrow F_y$ obtenu par glissement le long des feuilles de $\mathcal{G}$. Cet homéomorphisme est l'holonomie du chemin γ, il ne dépend que de la classe d'homotopie de γ à extrémités fixes. Ainsi, on obtient une représentation

$$h : \pi_1(M, x_o) \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F) \quad (x_o \text{ point base})$$

la *représentation d'holonomie* dont l'image est le *groupe d'holonomie* Γ. Il est clair que le groupe structural peut être réduit à Γ et que l'on peut dire que E est un (Γ, F)-fibré.

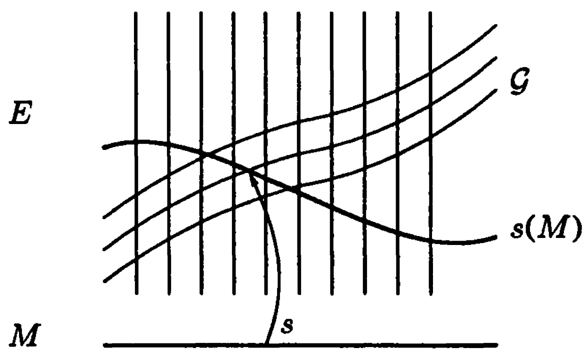
On reconstruit le fibré feuilleté à partir de cette représentation en posant

$$E = \widetilde{M} \times F/(x, y) \sim (\gamma.x, h(\gamma)(y)),\ \gamma \in \pi_1(M)$$

(opération de suspension de Haefliger).

Se donner un fibré feuilleté revient donc à se donner sa représentation d'holonomie $h : \pi_1(M, x_o) \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$.

1.3. Fibré plat (ou feuilleté) associé à une (G, X)-structure. — Soit une (G, X)-structure sur M, alors on construit le fibré E de fibre $F = X$ naturellement associé pour lequel les changements de trivialisations sont les $g_{ij} \in G$. La représentation d'holonomie de ce fibré feuilleté est à valeurs dans G. La (G, X)-structure sur M détermine une section s de $E \longrightarrow M$ transverse au feuilletage $\mathcal{G}$.



Réciproquement, se donner une (G, X)-structure sur M revient à se donner un fibré feuilleté $E \longrightarrow M$ de fibre X et une section transverse au feuilletage $\mathcal{G}$. Cette façon de voir une (G, X)-structure a en particulier son utilité pour aborder les problèmes de déformation.

PROPOSITION (*cf.* [T] ou [CEG]). — *Etant donné une (G, X)-structure sur une variété compacte M, toute perturbation assez proche du morphisme d'holonomie*

$$h : \pi_1(M) \longrightarrow G$$

donne une autre (G, X)-structure sur M.

1.4. Développement d'une (G,X)-structure, complétude. — Une (G,X)-structure sur une variété M en induit une sur n'importe quel revêtement de M. Ceci en particulier pour le revêtement d'holonomie $\widehat{M} \longrightarrow M$, c'est-à-dire pour le revêtement galoisien associé au noyau du morphisme d'holonomie. La (G,X)-structure obtenue sur $\widehat{M}$ n'a plus d'holonomie ce qui signifie quelle peut se décrire par une seule carte

$$D : \widehat{M} \longrightarrow X$$

qui est un difféomorphisme local appelé *développement* ou *application développante* de la structure. Cette application est équivariante par rapport au $\pi_1(M)$ agissant sur $\widehat{M}$ d'un côté et sur X par la représentation d'holonomie de l'autre :

$$\forall \gamma \in \pi_1(M),\ D(\gamma.x) = h(\gamma)(D(x)),\ \forall x \in \widehat{M}.$$

Si on se donne réciproquement un revêtement galoisien $\widehat{M} \longrightarrow M$, un difféomorphisme local $D : \widehat{M} \longrightarrow X$ et une représentation $h : \pi_1(M) \longrightarrow G$ vérifiant la condition d'équivariance, on se donne une (G,X)-structure. Cette façon de voir permet de construire de nombreux exemples disons "assez réguliers" et la proposition 1-3 permet de les perturber en des exemples éventuellement "sauvages" (voir 2-5).

On dit qu'une (G,X)-structure est *complète* si l'application développante D : $\widehat{M} \longrightarrow X$ qui *a priori* n'est qu'un difféomorphisme local est en fait un *revêtement*. On voit donc qu'une variété affine M est complète si et seulement si $M = \mathbf{R}^n/\Gamma$ où $\Gamma \subset Aff(\mathbf{R}^n)$ est le groupe d'holonomie.

2. Exemples connus de variétés affines compactes

2.1. Exemples provenant des groupes de Lie. — Soit G un groupe de Lie opérant librement et transitivement par transformations affines d'une variété affine U. Ceci permet d'identifier G à la variété affine U et d'obtenir sur G une structure affine invariante par translation à gauche. Maintenant, soit Γ un sous-groupe discret cocompact de G, alors clairement $M = U/\Gamma$ est une variété affine compacte. C'est ainsi que l'on construit la structure affine standard d'un tore $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$. De manière plus générale, toute nilvariété admet une structure affine, car d'après N'Boyom [Bo], tout groupe de Lie nilpotent admet une structure affine invariante à gauche. Il en est de même pour certaines solvariétés, mais on ne sait pas encore si c'est le cas pour toutes.

Pour illustrer directement ce procédé de construction, donnons les exemples de Goldman [G1]. Soit dans le plan affine $\mathbf{R}^2$ la parabole $y^2 - 2x = 0$ et $G' \subset Aff(\mathbf{R}^2)$ le groupe des déplacements affines directs qui la préservent. On vérifie que

$$G' = \{\begin{pmatrix} e^{2s} & e^s t \\ 0 & e^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \end{pmatrix},\ s,t \in \mathbf{R}\}$$

(la première matrice est la partie linéaire de la transformation affine, la seconde sa partie de translation). Il est clair que G' est non abélien et agit transitivement sur les ouverts

$$O^+ = \{(x,y),\ y^2 - 2x > 0\} \text{ et } O^- = \{(x,y),\ y^2 - 2x < 0\}$$

On considère alors G l'extension de G' par $\mathbf{R}$, $G \subset Aff(\mathbf{R}^3)$:

$$G = \{ \begin{pmatrix} e^{2s} & e^s t & 0 \\ 0 & e^s & 0 \\ 0 & 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \\ u \end{pmatrix} , \quad s, t, u \in \mathbf{R} \}$$

Il est clair que G agit librement et transitivement sur

$$U^+ = O^+ \times \mathbf{R} \text{ et } U^- = O^- \times \mathbf{R}$$

et on vérifie que G est isomorphe au groupe des déplacements de Lorentz $E(1,1)$ (caractérisé comme le seul groupe de Lie résoluble unimodulaire de dimension 3 ayant un centre trivial). Ce groupe admet une infinité de sous-groupes discrets cocompacts. Pour chacun d'eux Γ

$$M_\Gamma^+ = U^+/\Gamma \text{ et } M_\Gamma^- = U^-/\Gamma$$

sont des variétés affines incomplètes de dimension 3.

2.2. Suspension d'un automorphisme affine. — Une matrice A de $SL(\mathbf{Z}^2)$ détermine un automorphisme affine du tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. La variété

$$\mathbf{T}_A^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{T}^2/(t,v) \sim (t+1, Av)$$

est un fibré en $\mathbf{T}^2$ sur $\mathbf{S}^1$. On peut encore écrire

$$\mathbf{T}_A^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2/\Gamma$$

où Γ est le sous-groupe de $Aff(\mathbf{R}^3)$ engendré par les translations de vecteurs $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ et la transformation $(t,v) \longrightarrow (t+1, Av)$. Donc $\mathbf{T}_A^3$ est une variété affine complète. En faisant varier A sur tout $SL_2(\mathbf{Z})$, on obtient que tout fibré en $\mathbf{T}^2$ sur $\mathbf{S}^1$ admet une structure affine complète.

Remarquons que les exemples de Goldman du numéro précédent donnent *topologiquement* les variétés $\mathbf{T}_A^3$ pour $A, |trA| > 2$ sur lesquelles on a donc à la fois (au moins) une structure complète et une structure incomplète.

2.3. Variétés de Hopf. — Ce sont de loin les exemples les plus simples de variétés affines compactes incomplètes

$$V_h^n = \mathbf{R}^n - \{0\}/h$$

où h est une homothétie de rapport > 1.

Topologiquement, $V_h^n \simeq \mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^1$. Le rapport d'homothétie (> 1) classifie les structures affines trouvées sur cette variété topologique.

2.4. Exemples provenant des variétés projectives. — Dans [Be1], Benzécri a le premier remarqué que si une variété M admet une structure projective réelle alors $M \times \mathbf{S}^1$ admet une stucture affine. En effet, dire que M a une structure projective c'est dire qu'il existe un développement $D : \widehat{M} \longrightarrow \mathbf{R}P^n$ partant du revêtement d'holonomie $\widehat{M}$, équivariant par rapport à la représentation d'holonomie $h : \pi_1(M) \longrightarrow PSL_{n+1}$ (*cf.* 1-4). Cette application donne une application $D_1 : \widehat{M} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ équivariante par rapport au relevé de h dans $SL(\mathbf{R}^{n+1})$. Ceci détermine une stucture affine sur $M \times \mathbf{R}$. On constate maintenant que les homothéties agissent affinement sur cette variété en laissant fixe le premier facteur, il suffit d'en prendre alors une non triviale pour obtenir au quotient une structure affine sur $M \times \mathbf{S}^1$. C'est ainsi que l'on obtient le résultat suivant : Si M est une variété hyperbolique, alors M a une structure projective naturelle et donc $M \times \mathbf{S}^1$ a une structure affine. En particulier, bien qu'une surface Σ orientable de genre > 1 n'ait pas de structure affine ([Be1], voir plus bas), $\Sigma \times \mathbf{S}^1$ en a une (incomplète).

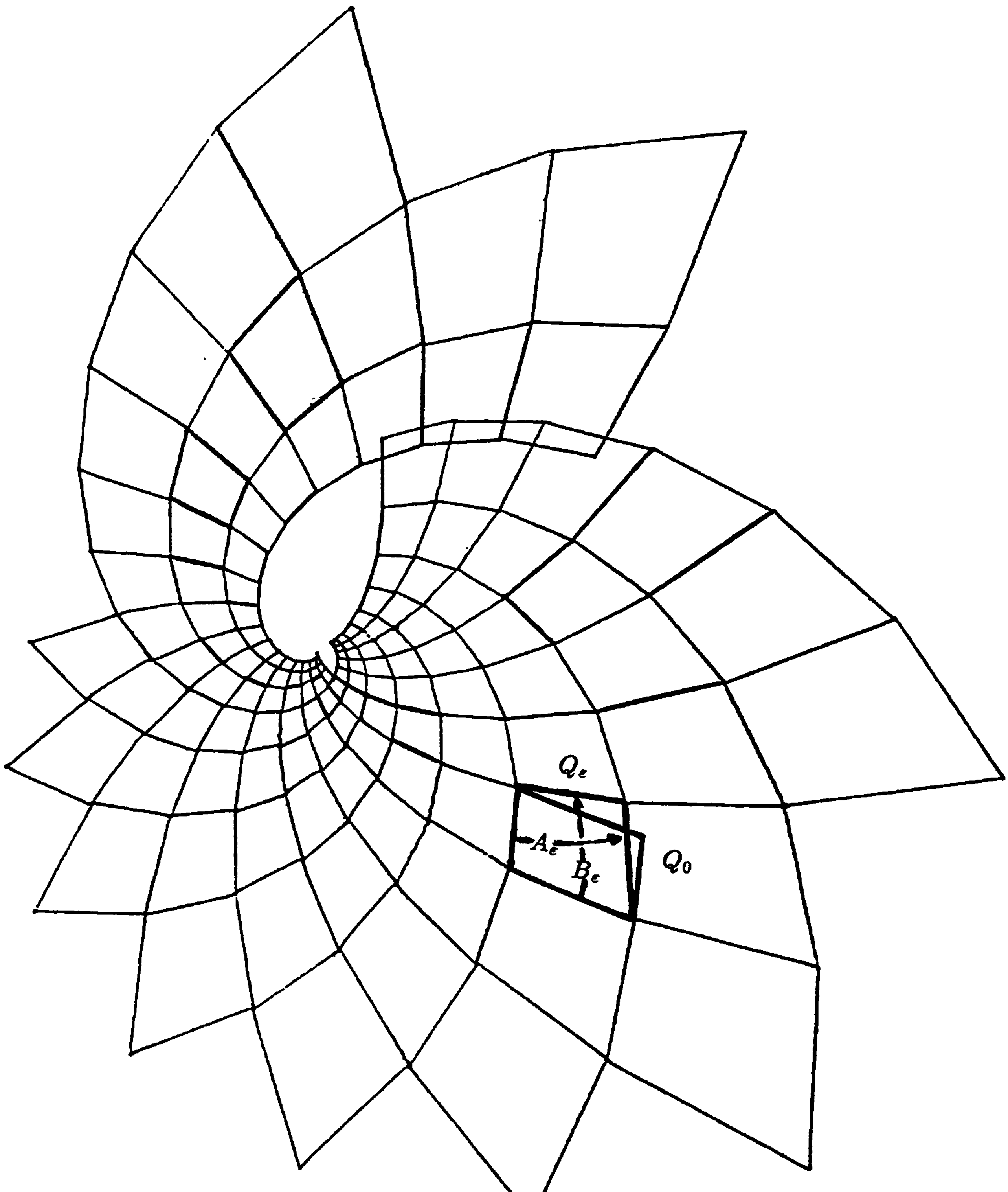
Dans [ST], Sullivan et Thurston construisent des structures projectives assez "sauvages" du tore $\mathbf{T}^2$ qui induisent donc des structures affines aussi "sauvages" sur $\mathbf{T}^3$. Voir [G2] pour des structures projectives construites par les mêmes méthodes sur le fibré unitaire tangent d'une surface.

2.5. Structures affines sur $\mathbf{T}^2$. — Celles qui sont complètes ont été classifiées par Kuiper [Kui] : en plus de la stucture standard il y a uniquement celle obtenue par la méthode décrite en 2-1 en considérant la réalisation suivante du groupe de Lie $G = \mathbf{R}^2$ comme groupe de transformations affines opérant librement et transitivement sur $\mathbf{R}^2$:

$$G = \{\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^2/2 + t \\ s \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbf{R}\}.$$

Les stuctures affines générales sur $\mathbf{T}^2$ ont été classifiées par Nagano et Yagi [NY]. Pour avoir une idée de la complexité possible de telles structures, donnons l'exemple suivant dû à Smillie et Thurston (*cf.* [T]) et qui illustre bien la proposition 1-3.

Ce type d'exemple est obtenu en perturbant la structure affine standard de $\mathbf{T}^2$ dont le domaine fondamental est, disons, un parallélogramme Q_0 et le groupe d'holonomie a pour générateurs les translations τ_1 et τ_2 qui identifient les côtés opposés de Q_0. On perturbe légèrement Q_0 pour obtenir un quadrilatère Q_ε et on choisit deux éléments A_ε et $B_\varepsilon \in Aff(\mathbf{R}^2)$ qui sont de légères perturbations de τ_1 et τ_2, qui *commutent* (on perturbe la représentation d'holonomie) et qui identifient les côtés opposés de Q_ε. On peut par exemple choisir pour A_ε et B_ε des similitudes vérifiant la dernière condition, elles satisferont automatiquement les autres. On obtient une structure affine sur $\mathbf{T}^2$ dont le développement est donné par une figure du type suivant tirée de [T] où l'on voit qu'il n'est ni injectif ni surjectif :



$A_0 = \tau_1, \ B_0 = \tau_2$

3. Caractéristique d'Euler et volume simplicial

3.1. La caractéristique d'Euler d'une surface affine est nulle. — En 1955, Benzécri dans sa thèse (*cf.* [Be1]) a prouvé par des moyens très géométriques que la seule surface orientable compacte admettant une structure affine est le tore. Un peu plus tard, Milnor a démontré le

THÉORÈME (Milnor [M1] 1958). — *Pour qu'un fibré vectoriel E de rang 2 sur une surface compacte orientable Σ de genre g soit plat, il faut et il suffit que :*
$$|\chi(E)| < g$$
où χ désigne la caractéristique d'Euler.

Ceci redonne le résultat de Benzécri. En effet, si Σ est affine, en particulier son fibré tangent est un fibré vectoriel plat et d'après le théorème on a alors :
$$|2(1-g)| = \chi(T(\Sigma)) < g \Rightarrow g = 1.$$

Milnor remarquait aussi dans le même article que les classes de Pontriaguine d'un fibré vectoriel plat quelconque sur une variété compacte sont nulles. Donc restait la conjecture de la nullité de la caractéristique d'Euler d'une variété affine compacte, et ceci en dimension quelconque.

3.2. Généralisations de l'inégalité de Milnor. — Benzécri [Be2] en 1965 et dix ans après indépendamment Sullivan [Sul] généralisent l'inégalité de Milnor en toutes dimensions :

THÉORÈME (Benzécri-Sullivan [Be2],[Sul]). — *Soit M une variété compacte orientable de dimension n munie d'une triangulation comportant des simplexes de dimensions 0 à $n-1$ et une cellule polyédrale de dimension n homéomorphe à une boule. Soit σ_{n-1} le nombre de simplexes de dimension $n-1$ et E un fibré vectoriel plat de rang n alors*
$$|\chi(E)| < \frac{1}{2}\sigma_{n-1}.$$

Pour une surface, on retrouve l'inégalité de Milnor.

Entre temps, Wood avait obtenu une inégalité plus faible que celle de Milnor pour les fibrés en cercles plats.

THÉORÈME (Wood 1971 [Woo]). — *Soit E un fibré en cercles plat sur une surface Σ, alors on a :*
$$\chi(E) \leqslant \chi(\Sigma).$$

On sait maintenant que ces inégalités proviennent d'une majoration de la norme de cohomologie bornée de la classe d'Euler par le théorème suivant :

THÉORÈME (Gromov [Gr2] 1982). — *Si E est un fibré vectoriel plat de dimension n sur une variété M de même dimension , alors la classe d'Euler $\chi(E)$ est dans la partie bornée de la cohomologie de M et on a plus précisément :*

$$\|\chi(E)\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^n}$$

en particulier, $|\chi(E)| \leqslant \|M\|$ *le volume simplicial de M (voir* [Gr2]*) et donc si σ_n désigne le nombre de simplexes de dimension n intervenant dans une triangulation de M, on a :*

$$|\chi(E)| \leqslant \frac{1}{2^n}\sigma_n.$$

Cette dernière inégalité qui raffine en fait celle de Benzécri-Sullivan avait été remarquée auparavant par Smillie. Il semble raisonnable de conjecturer que le volume simplicial $\|M\|$ d'une variété affine compacte M est nul, ce qui donnerait en corollaire la nullité de la caractéristique d'Euler.

3.3. Les cas où $\chi(M) = 0$. — Le premier cas est celui où la variété affine compacte M est pourvue d'une métrique non-dégénérée plate éventuellement indéfinie. Il y a alors une formule de type Gauss-Bonnet donnant $\chi(M)$ comme une intégrale d'un polynôme (*cf.* [Ch] ou [P]) en la courbure qui ici est nulle d'où $\chi(M) = 0$. Les autres cas connus sont plus difficiles à obtenir. Hirsch et Thurston ont montré le résultat suivant qui a contribué à la naissance de la cohomologie bornée.

THÉORÈME (Hirsch-Thurston [HT] 1974). — *Soit M une variété affine compacte dont le π_1 est un produit libre de groupes résolubles, alors $\chi(M) = 0$.*

Ce résultat est un corollaire du théorème précédent si le π_1 est résoluble, car alors le volume simplicial est nul.

Par ailleurs on a le

THÉORÈME (Kostant-Sullivan [KS] 1975). — *Si l'holonomie d'une variété affine compacte M est sans point fixe alors $\chi(M) = 0$. En particulier ceci est vrai si M est complète.*

Il reste que la conjecture de nullité du volume simplicial dans ce dernier cas est encore ouverte. Pour ce qui est de la nullité de la caractéristique d'Euler dans le cas général, il faut être prudent à cause d'un exemple dû à Smillie [Sm3] qui montre que ceci serait faux en élargissant légèrement la notion de variété plate...

4. Conjecture d'Auslander

Pour les variétés affines compactes complètes une conjecture plus forte (et plus ancienne) que la nullité du volume simplicial est la

CONJECTURE (Auslander). — *Soit M une variété affine compacte et complète, alors M est à revêtement fini près une solvariété (i.e. le quotient d'un groupe de Lie résoluble par un sous-groupe discret cocompact). En particulier, $\pi_1(M)$ est virtuellement résoluble.*

Cette conjecture est vraie en dimension 3 d'après la classification de Fried-Goldman [FG]. Margulis a donné récemment un contrexemple [Marg] à la conjecture étendue par Milnor [M2] au cas complet non compact. Il construit un groupe libre à deux générateurs Γ de déplacements de Lorentz de $\mathbf{R}^3$ tel que $M = \mathbf{R}^3/\Gamma$ est une variété. Le but secret de Margulis semble être de contredire la conjecture d'Auslander.

En dimension $\geqslant 3$, il y a seulement quelques cas particuliers où cette conjecture est résolue. Tout d'abord on a le "vieux" théorème de Bieberbach dont on pourra trouver une démonstration dans [Bu] inspirée directement par [Gr1] (dans le même esprit *cf.* [CD]). Pour une démonstration se rapprochant de l'originale, voir [Wol].

THÉORÈME (Bieberbach [Bi] 1911). — *Soit M une variété riemannienne plate compacte, alors M est à revêtement fini près un tore plat, en particulier $\pi_1(M)$ est virtuellement abélien.*

En fait on peut dire que ce théorème est une partie de la motivation de la conjecture avec des résultats d'Auslander sur les actions simplement transitives et affines de groupes de Lie sur $\mathbf{R}^n$ [A]. Fillmore et Scheuneman [FS] et Suwa [S] ont montré indépendamment que la conjecture était aussi vraie pour le cas des surfaces complexes ($n = 4$ et $\mathrm{L} \subset GL(\mathbf{C}^2)$). On a aussi le résultat plus récent suivant (voir aussi [F3] pour des détails en dimension 4) :

THÉORÈME (Goldman-Kamishima [GK] 1983). — *Soit M une variété lorentzienne plate compacte et complète, alors M est à revêtement fini près une solvariété, en particulier $\pi_1(M)$ est virtuellement polycyclique.*

Nous avons montré (voir plus loin) qu'une variété lorentzienne plate compacte est complète ce qui permet d'énoncer le théorème précédent sans hypothèse de complétude.

Plus récemment encore, D. Fried a montré la conjecture dans [F2] pour le cas où l'holonomie linéaire est distale et M. Wang en dimension quatre lorsqu'une forme quadratique de signature $(2,2)$ est préservée.

A défaut de montrer la conjecture d'Auslander, il serait intéressant de prouver au moins des théorèmes d'annulation de la cohomologie bornée d'une variété affine compacte complète sous d'éventuelles hypothèses additionnelles.

5. Conjecture de Markus

Soit M une variété affine, Γ son groupe d'holonomie et $L(\Gamma) \subset GL(\mathbf{R}^n)$ son groupe d'holonomie linéaire. Se pose la question de savoir quelles propriétés de $L(\Gamma)$ autorisent une relation étroite entre la compacité et la complétude de la variété. Bien entendu, lorsque $L(\Gamma) \subset \mathrm{SO}(n)$, la variété affine M est alors *une variété riemannienne plate* et elle est complète dès qu'elle est compacte (Hopf-Rinow).

L. Markus a conjecturé dans [Mark] que cette propriété (compacité $\Rightarrow$ complétude) restait vraie pour les *variétés lorentziennes plates*, c'est-à-dire lorsque $L(\Gamma) \subset SO(n-1,1)$ le groupe d'isométries de Lorentz. Nous montrons en particulier cette conjecture dans [C]. Remarquons au passage qu'il est facile de construire sur $\mathbf{T}^2$ des métriques lorentziennes (évidemment non plates) non complètes mais que, par ailleurs, d'après J. Marsden [Mars], les variétés pseudo-riemanniennes compactes *homogènes i.e.* ayant un groupe transitif d'isométries sont complètes. Dans le même article, L. Markus a étendu cette conjecture au cas où il existe seulement un *volume parallèle* :

CONJECTURE (L. Markus [Mark] 1962) . — *Si M est une n-variété affine compacte alors : $L(\Gamma) \subset SL(\mathbf{R}^n) \Rightarrow M$* est complète.

Cette conjecture a été démontrée, entre autres, dans les cas particuliers suivants, tous dépendant d'une hypothèse "algébrique" sur Γ (voir [GH2] pour une liste plus exhaustive) :

THÉORÈME. — *La conjecture de Markus est vraie si*

1) Γ est abélien (J. Smillie [Sm1] 1977).

2) Γ est nilpotent (D. Fried, W. Goldman, M. Hirsch [FGH] 1981).

3) Γ est résoluble de rang $\leqslant n$ (W. Goldman, M.Hirsch [GH2] 1986).

4) $L(\Gamma)$ est distal (i.e. orthopotent cf. [F2]*)* (D. Fried [F2] 1986).

L. Markus a en fait conjecturé l'équivalence qui elle aussi a été démontrée dans les cas 1) 2) 3) par les mêmes auteurs (pour 4) c'est automatique) et dans d'autres cas particuliers (*cf.* [GH2] pour une liste plus exhaustive).

Bibliographie

[A] AUSLANDER L. — *Simply transitive groups of affine motions*, Am. J. Math., **99** (1977), 809-821.

[Be1] BENZÉCRI J.P. — *Variétés localement affines et projectives*, Bull. Soc. Math. France, **88** (1960), 229-332.

[Be2] BENZÉCRI J.P. — *Sur la classe d'Euler (ou Stiefel-Whitney) de fibrés affins plats*, C. R. Acad. Sci. Paris, **260** (1965), 5442-5444.

[Bo] BOYOM N. — *Structures affines sur les groupes de Lie nilpotents*, Prépublication Université de Montpellier, 1985.

[Bi] BIEBERBACH L. — *Über die Bewegungsgruppen der Euklidische Räume I*, Math. Ann., **70** (1911), 297-336.

[Bu] BUSER P. — *A geometric proof of Bieberbach's theorems on crystallographic groups*, L'Enseignement Math., **31** (1985), 137-145.

[C] CARRIÈRE Y. — *Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines*, Prépublication Institut Fourier **96**, à paraître dans Inventiones, 1989.

[CD] CARRIÈRE Y., DAL'BO F. — *Généralisations du 1er théorème de Bieberbach sur les groupes cristallographiques*, en préparation, 1988.

[CEG] CANARY R.D, EPSTEIN D.B.A., GREEN P. — *Notes on the notes of Thurston*, in Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space pp. 3-92, Warwick and Durham 1984, London Math. Soc. Lecture Notes Series **111**, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[Ch] CHERN S.S. — *Pseudo-riemannian geometry and Gauss-Bonnet formula*, Ann. Acad. Brazil, **95** (1963), 17-26.

[F1] FRIED D. — *Closed similarity manifolds*, Comment. Math. Helv., **55** (1980), 576-582.

[F2] FRIED D. — *Distality, completeness and affine structures*, J. Diff. Geom., **24** (1986), 265-273.

[F3] FRIED D. — *Flat Spacetimes*, J.Diff. Geom., **26** (1987), 385-396.

[F4] FRIED D. — *Polynomials on affine manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc., **274** (1982), 709-719.

[FG] FRIED D., GOLDMAN W.. — *Three-dimensional affine crystallographic groups*, Adv. in Math., **47** (1983), 1-49.

[FGH] FRIED D., GOLDMAN W., HIRSCH M.. — *Affine manifolds with nilpotent holonomy*, Comment. Math. Helv., **56** (1981), 487-523.

[FS] FILLMORE J.P., SCHEUNEMAN J. — *Fundamental groups of compact complete locally affine complex surfaces*, Pacific J. Math., **44** (1973), 487-496.

[G1] GOLDMAN W.. — *Two examples of affine manifolds*, Pacific J. Math., **94** (1981), 327-330.

[G2] GOLDMAN W.. — *Projective structures with fuchsian holonomy*, J.Diff. Geom., **25** (1987), 297-326.

[GH1] GOLDMAN W., HIRSCH M. — *The radiance obstruction and parallel forms on affine manifolds* , Trans. Amer. Math. Soc., **286** (1984), 629-649.

[GH2] GOLDMAN W., HIRSCH M. — *Affine manifolds and orbits of algebraic groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **295** (1986), 175-190.

[GK] GOLDMAN W., KAMISHIMA Y. — *The fondamental group of a compact flat Lorentz space form is virtually polycyclic*, J.Diff. Geom., **19** (1984), 233-240.

[Gr1] GROMOV M. — *Almost flat manifolds*, J. Diff. Geom., **13** (1978), 231-242.

[Gr2] GROMOV M. — *Volume and bounded cohomology*, Pub. IHES, **56** (1982), 5-100.

[HT] HIRSCH M., THURSTON W. — *Foliated bundles, invariant measures and flat manifolds*, Annals of Math., **101** (1974), 369-390.

[Kob] KOBAYASHI S. — *Projectively invariant distances for affine and projective structures*, in Differential Geometry, pp. 127-152, Banach Center Publications,Polish Scientific Publishers,Warsaw, **2**, 1984.

[Kos] KOSZUL J.L. — *Variétés localement plates et convexité*, Osaka J. Math., **2** (1965), 285-290.

[KS] KOSTANT K., SULLIVAN D. — *The Euler characteristic of an affine space form is zero*, Bull. Amer. Math. Soc., **81** (1975), 937-938.

[Kui] KUIPER N.H. — *Sur les surfaces localement affines*, Colloque de Géométrie différentielle, Strasbourg, pp.79-86, 1953.

[Marg] MARGULIS G.A. — *Complete affine locally flat manifolds with a free fundamental group*, J. Soviet Math., **36** (1987), 129-139.

[Mark] MARKUS L. — *Cosmological models in differential geometry*, mimeographed notes, University of Minnesota, 1962.

[Mars] MARSDEN J. — *On completeness of homogeneous pseudo-riemannian manifolds*, Indiana Math. J., **22** (1065'66), 1973.

[M1] MILNOR J. — *On the existence of a connection with curvature zero*, Comment. Math. Helv., **32** (1958), 215-223.

[M2] MILNOR J. — *On fondamental groups of complete affinely flat manifolds*, Adv. in Math., **25** (1977), 178-187.

[NY] NAGANO T., YAGI K. — *The affine structures on the real two-torus (I)*, Osaka J. Math., **11** (1974), 181-210.

[P] PELLETIER F. — *Sur le théorème de Gauss-Bonnet pour les pseudo-métiques singulières*, Séminaire Théorie Spectrale et Géométrie, Grenoble, pp. 99-105, 1986'87.

[Sm1] SMILLIE J. — *Affinely flat manifolds*, Doctoral Dissertation, University of Chicago, 1977.

[Sm2] SMILLIE J. — *An obstruction to the existence of affine structures*, Invent. Math., **64** (1981), 411-415.

[Sm3] SMILLIE J. — *Flat manifolds with non-zero Euler characteristics*, Comment. Math. Helvetici, **52** (1977), 453-455.

[ST] SULLIVAN D., THURSTON W. — *Manifolds with canonical coordinates : some examples*, L'Enseignement Math., **29** (1983), 15-25.

[Sul] SULLIVAN D. — *A generalization of Milnor's inequality concerning affine foliations and affine manifolds*, Comm. Math. Helv., **51** (1976), 183-189.

[Suw] SUWA T. — *Compact quotient spaces of $\mathbb{C}^2$ by affine transformation groups*, J. Diff. Geom., **10** (1975), 239-252.

[T] THURSTON W. — *The geometry and topology of 3-manifolds*, chapter 3, Princeton University, 1978.

[Wan] WANG M. — *The classification of flat compact space-forms with metric of signature (2,2)*, à paraître, 1988.

[Wol] WOLF J. — *Spaces of constant curvature*, Publish or Perish, Wilmington, 1984.

[Woo] WOOD J. — *Bundles with totally disconnected structure group*, Comment. Math. Helv., **46** (1971), 257-273.

Yves CARRIÈRE
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)