Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

LAURENT GUILLOPÉ

Introduction à l’invariant η

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 7 (1988-1989), p. 103-114

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1988-1989__7__103_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1988–1989 (103–114)

INTRODUCTION À L'INVARIANT η

par *Laurent GUILLOPÉ*

Soit (X, g) variété riemannienne compacte, $E \to X$ un fibré hermitien complexe (de rang fini) et $A : C(E) \to C(E)$ un opérateur différentiel elliptique auto-adjoint d'ordre positif.

Le spectre $\sigma(A)$ de A est discret réel (sans point d'accumulation fini). Afin de mesurer l'asymétrie globale de A à travers son spectre, on introduit la fonction η_A définie par

$$\eta_A(s) = \sum_{\lambda \in \sigma(A), \lambda > 0} \lambda^{-s} - \sum_{\lambda \in \sigma(A), \lambda < 0} |\lambda|^{-s},$$

série absolument convergente pour $\Re e s > \dim X / \operatorname{ord} A$ L'invariant η de A est défini comme étant (l'invariant spectral) $\eta_A(0)$, dont la finitude est donnée par le

THÉORÈME$_\eta$. *La fonction η_A admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$, régulier en $s = 0$.*

Remarque 0.1. — Le théorème est valable pour A pseudo-différentiel d'ordre positif, ayant une demi-droite $\mathbf{R}^+ e^{i\theta}$ (non réelle) d'ellipticité au sens où le spectre du symbole principal $a_p(\Xi)$ est inclus dans $\mathbf{C} - \mathbf{R}^+ e^{i\theta}$ pour tout covecteur Ξ de T^*X. Dans la démonstration du th$_\eta$, on se place dans la catégorie des opérateurs pseudodifférentiels.

Remarque 0.2. — On a

$$\eta_A(s) = \operatorname{tr} A(A^2)^{-(s+1)/2} = \frac{1}{\Gamma((s+1)/2)} \int_0^\infty \operatorname{tr} A e^{-tA^2} t^{(s+1)/2} \frac{dt}{t}$$

soit

$$\eta(A) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^\infty \operatorname{tr} A e^{-tA^2} \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Travail effectué en partie dans le cadre du Contrat CEE GADGET n°SC1–0105–C.

Le théorème$_\eta$ est donc équivalent à l'existence d'un développement asymptotique de la trace de Ae^{-tA^2}, avec nullité des coefficients des termes les plus singuliers.

On notera la propriété d'invariance par homotéthie sur l'opérateur : $\eta(\varepsilon A) = \eta(A)$.

Remarque 0.3. — On n'a pas tenu compte des valeurs propres nulles éventuelles de A, ce qui apparaît regrettable lorsqu'on considère des familles d'opérateurs (A_t), dont une branche de valeur propre peut croiser 0, auquel cas la variation de η est un entier pair. On introduit $\bar{\eta}(A) = \frac{\dim \operatorname{Ker} A + \eta(A)}{2}$ (considéré souvent modulo $\mathbf{Z}$), *l'invariant η réduit*. Cet invariant réduit intervient lorsqu'on utilise $\bar{\eta}$ comme phase du déterminant $\det A$.

Remarque 0.4 (Exemple). — Soit (E, ∇) un fibré hermitien avec connexion hermitienne sur $X = S^1$. Si $\partial/\partial\theta$ note le champ de vecteur unitaire sur S^1, l'opérateur $A = i\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}$ est autoadjoint. D'autre part, en utilisant une base de la fibre E_{x_0} diagonalisant l'holonomie H_{x_0} (unitairement équivalente à $(e^{i\varphi_j})$), on trivialise de manière naturelle le fibré E, transformant l'opérateur A en la somme $\oplus_j - i\frac{d}{d\theta} + \varphi_j$, qui permet de caculer aisément l'invariant réduit $\bar{\eta} = \frac{\operatorname{rg} E}{2} + \frac{\log \det H}{2i\pi}$.

La preuve du théorème$_\eta$, dans sa partie méromorphie, repose sur les résultats de Seeley concernant la fonction ρ d'opérateurs elliptiques semi–bornés (asymétrie totale). Pour obtenir la finitude de $\eta(A)$, on définit, à partir de l'éventuel résidu de la fonction η_A un morphisme de la K–théorie du fibré en sphères cotangentes S^*X dans $\mathbf{C}$, dont la nullité (établie en étudiant sa valeur sur une famille de générateurs de $K(S^*X)$) donnera celle du résidu. La démonstration nécessite de se placer dans la catégorie des opérateurs pseudodifférentiels, où nous avons le théorème$_\eta$ modifié :

THÉORÈME$_\eta$. – *Soit X une variété riemannienne compacte, E fibré hermitien de rang fini sur X et A opérateur pseudodifférentiel d'ordre positif sur $C(E)$, à symbole principal elliptique autoadjoint. La fonction $\eta_A(s)$ est définie pour* $\Re e s > \dim X/\operatorname{ord} A$ *et admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$, régulier en $s = 0$.*

Une ample (mais non exhaustive!) η–bibliographie, constituée à l'occasion des journées η organisées à Palaiseau sous l'égide de GADGET (17–19 avril 1989), clôt ce texte.

1. Les résultats de Seeley ([5])

Soit A un opérateur pseudo–différentiel classique. Son symbole total a admet (dans chaque carte U de X) un développement $a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{\operatorname{ord} A - j}$, où les $a_k(x,\xi)$, $(x \in U, \xi \in \mathbf{R}^n)$ sont homogènes en ξ de degré k. On suppose que le symbole principal (défini comme section du fibré $\operatorname{End}(\pi^* E) \to S^*X$, où π est la projection $S^*X \to X$) admet un rayon d'ellipticité $\mathbf{R}^+e^{i\theta}$ (non réel), *i.e.* rayon ne rencontrant pas le spectre du symbole principal $a_{\operatorname{ord} A}$.

Soit γ un contour de Cauchy (entourant le rayon $\mathbf{R}^+e^{i\theta}$) pour la fonction μ^z (*i.e.*

$\mu^z = 1/2i\pi \int_\gamma u^z/(\mu - u)du$). La fonction A^{-s} définie par

$$A^{-s} = 1/2i\pi \int_\gamma u^{-s}/(A-u)du$$

est à valeurs opérateurs pseudodifférentiels.

Pour $\Re es > \dim X/\operatorname{ord} A$, l'opérateur A^{-s} est de classe trace et la fonction-trace $\rho_A(s) = \operatorname{tr} A^{-s}$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$, régulier en $s = 0$. $\rho(A) = \rho_A(0)$ est l'intégrale sur S^*X d'une forme différentielles ω_A, qui, en coordonnées locales, s'exprime comme une expression polynomiale homogène de degré $\dim X$ en les dérivées des composantes homogènes du symbole de A, si l'on considère $\partial_x^\alpha a_{\operatorname{ord} A - j}$ d' ordre d'homogénéité $|\alpha| + j$.

En particulier, si B est un opérateur d'ordre inférieur à $\operatorname{ord} A - \dim X$, $\rho(A) = \rho(A+B)$.

Dans le cas d'un opérateur semi-borné, les fonctions η et ρ coïncident à une somme finie de valeurs propres près, on a donc le corollaire :

COROLLAIRE 1.1. — *Le théorème$_\eta$ est vrai pour A totalement asymétrique i.e. A semi-borné.*

COROLLAIRE 1.2. — *Avec les hypothèses du théorème$_\eta$, la fonction η_A admet un prolongement méromorphe à* $\mathbf{C}$.

Preuve. — Les opérateurs $|A| = (A^2)^{1/2}, A + 2|A|$ et $A - 2|A|$ sont pseudo-différentiels et semi-bornés. On a

$$\eta_A(s) = \frac{\rho_{A+2|A|}(s) - \rho_{A-2|A|}(s)}{3^{-s} - 1},$$

ce qui permet de conclure avec le corollaire précédent. □

DÉFINITION 1.3. — *On pose* $R(A) = \operatorname{Res}(s = 0, \eta_A(s)) \operatorname{ord} A$.

La normalisation est justifiée par l'égalité

$$\eta_A(s/d) = \eta_{A|A|^{\frac{1-d}{d}}}(s)$$

qui implique $R(A) = R(A|A|^{\frac{1-d}{d}})$. Le résidu $R(A)$ est un invariant local (car égal à $\int_X (\omega_{A+2|A|} - \omega_{A-2|A|})/\log 3$, au contraire de $\eta(A)$ (dont la finitude a été vue dans le cas de fibrés sur S^1).

2. Asymétrie ([6])

On a deux cas simples où l'asymétrie de l'opérateur A est induite par une décomposition géométrique.

A. Asymétrie spectrale triviale. — On suppose que le fibré E est une somme directe $E_+ \oplus E_-$, stable par une décomposition de A en $A = A_+ \oplus A_-$ avec $\pm A_\pm$ semi-bornés positifs. Ceci induit une décomposition de la fonction η_A en la somme de deux fonctions η d'opérateurs semi-bornés, donc régulières en 0 d'après le corollaire 1.2.

B. Asymétrie microlocale triviale. — Le fibré π^*E (de base S^*X) a une décomposition $\pi^*E = L_+ \oplus L_-$, invariante sous l'action du symbole principal et telle $a_{\mathrm{ord}\,A}(\Xi)_{|L_{\pm|\Xi}}$ soit positif. Si $\gamma_\pm$ est un lacet d'indice 1 par rapport à la partie positive du spectre de $\pm a_{\mathrm{ord}\,A}(\Xi)_{|\pi^*E_{|\Xi}}$, la projection de $\pi^*E_{|\Xi}$ sur $L_{\pm|\Xi}$ parallèlement à $L_{\mp|\Xi}$ est donnée par $(2i\pi)^{-1}\int_{\gamma_\pm} dz/(a_{\mathrm{ord}\,A}(\Xi) - z)$.

DÉFINITION 2.1. — *L'opérateur A est dit microlocalement trivial si le(s) fibré(s) $L_\pm$ sur S^*X est isomorphe à un (des) fibré(s) image-réciproque de fibré sur X.*

Exemple 2.2. — Soit d la différentielle extérieure sur les formes différentielles $\Omega^*(X) = C(\Lambda^*(X))$, δ son adjoint riemannien. L'opérateur $A = d + \delta$ a pour symbole principal $\xi \wedge + \xi \lrcorner$. Soit $p_\pm : L_\pm \to \pi^*\Lambda^{2*}(X)$ la projection sur les formes de degré pair. Si $p_\pm\varphi = 0$, la composante de degré impair de φ est nulle aussi (vu $\xi\wedge\varphi + \xi \lrcorner \varphi = \pm\varphi$), et donc aussi φ. On en déduit que $p_\pm$ est un isomorphisme et que A est microlocalement trivial.

En fait, l'opérateur C, opérant par multiplication de $(-1)^k$ sur $\Lambda^k(X)$, anticommute avec $d + \delta$, ainsi le spectre de $d + \delta$ est symétrique et la fonction η_A nulle.

Si X est de dimension impaire orientée, notons par $\omega_X = i^{n+1}e_1 \ldots e_{2n+1}$ la forme volume d'orientation (de norme unité) dans le fibré en algèbres de Clifford $\mathrm{Cliff}_{\mathbf{C}}(TX)$ sur X. Le raisonnement fait pour A ne vaut pas, en fait $i\omega_X A$ n'est pas microlocalement trivial (*cf.* ci-dessous).

Exemple 2.3. — Soit X spinorielle de dimension impaire $2n+1$, $\mathrm{Spin}(X) \to X$ un fibré principal de fibre $\mathrm{Spin}(2n+1)$, $\mathbf{F}$ représentation spinorielle irréductible de $\mathrm{Spin}(2n+1)$ et $F \to X$ le fibré $\mathrm{Spin}(X) \times \mathbf{F}/\mathrm{Spin}(2n+1)$, avec opérateur de Dirac D_X. Notant par $\bullet$ l'action de Clifford sur F, le symbole principal de D_X est $i\xi\,\bullet$.

LEMME 2.4. — *Soit a l'automorphisme du fibré trivial F de fibre $\mathbf{F}$ sur $S^{2n}(\subset \mathbf{R}^{2n+1})$ défini par $a_{|F_\xi} = i\xi\,\bullet$. Le fibré $L_+(F) = \mathrm{Ker}(a-1)$ engendre la K-théorie réduite $\tilde{K}(S^{2n})$ de la sphère S^{2n}.*

Preuve. — Un générateur de $\tilde{K}(S^{2n})$ est décrit de la manière suivante en termes de groupes, espaces homogénes et représentations Spin ([4], p. 195). De l'inclusion $\mathrm{Spin}(2n) \to \mathrm{Spin}(2n+1)$, on déduit la restriction au niveau des anneaux de groupe de représentation $R(\mathrm{Spin}(2n+1)) \to R(\mathrm{Spin}(2n))$. Si Δ_+ note la représentation spinorielle irréductible de $\mathrm{Spin}(2n)$ sur laquelle la forme volume de Clifford opère trivialement, on a plus précisément, en tant qur $R(\mathrm{Spin}(2n+1))$-modules, $R(\mathrm{Spin}(2n)) = R(\mathrm{Spin}(2n+1) + \Delta_+ R(\mathrm{Spin}(2n+1))$. Considérant la sphère S^{2n} comme espace homogène $\mathrm{Spin}(2n)/\mathrm{Spin}(2n+1)$, on en déduit le fibré associé à la représentation Δ_+, qui engendre la K-théorie réduite $\tilde{K}(S^{2n})$.

Pour définir la représentation spinorielle $\mathbf{F}$ de $\mathbf{R}^{2n+1}$, on choisit un axe ξ dans $\mathbf{R}^{2n+1}$ et une forme volume de Clifford $\omega_\perp$ dans $\xi^\perp$, ce qui induit la représentation $\psi : \mathrm{Cliff}(\mathbf{R}^{2n+1}) \to \mathrm{Cliff}(\xi^\perp) \simeq \mathrm{End}(\mathbf{F})$ définie sur les générateurs par $\psi(\xi) = i\omega_\perp$ et

$\psi_{|\xi^\perp} = id$. Les sous-espaces $\Delta_\pm = \mathrm{Ker}(\omega \mp 1)$ de $\mathbf{F}$ sont les composantes irréductibles de $\mathbf{F}$ sous l'action de $\mathrm{Spin}(\xi^\perp)$ (ce sont les deux représentations spinorielles irréductibles de $\mathrm{Spin}(\xi^\perp) \simeq \mathrm{Spin}(2n)$).

Ainsi le sous-espace positif $\mathbf{F}_+$ (relativement à l'action de ξ) est Δ_+ et le fibré image réciproque $\pi_* F_+ \to \mathrm{Spin}(2n+1)$ du fibré $F_+ \to S^{2n}$ par la projection $\pi : \mathrm{Spin}(2n+1) \to S^{2n} = \mathrm{Spin}(2n+1)/\mathrm{Spin}(2n)$, de point base ξ,

$$\pi_* F_+ = \{(\sigma, f), \sigma \in \mathrm{Spin}(2n+1), f \in \mathbf{F}, \sigma\xi \bullet f = f\}$$

est trivialisé par le morphisme

$$(\sigma, f) \in \mathrm{Spin}(2n+1) \times \Delta_+ \to (\sigma, \sigma \bullet f) \in \pi_* F_+,$$

vu que $\sigma \in \mathrm{Spin}(2n+1)$ opère sur $\mathbf{R}^{2n+1}(\subset \mathrm{Cliff}(\mathbf{R}^{2n+1}))$ suivant $\sigma\xi = \sigma \bullet \xi \bullet \sigma^{-1}$.

On obtient ainsi $F_+ \simeq \mathrm{Spin}(2n+1) \times \Delta_+/\mathrm{Spin}(2n)$ et le lemme. □

On en déduit que $(F \to X, D)$ n'est pas microlocalement trivial : sinon, pour $x \in X$, le fibré $L_{+|S^*X_x}$ serait trivial, ce qui n'est pas d'après le lemme.

En tant que $\mathrm{Cliff}(\mathbf{R}^{2n+1})$-module, $\Lambda^*\mathbf{R}^{2n+1}$ est isomorphe à $2^n(\mathbf{F}_+ \oplus \mathbf{F}_-)$, où $\mathbf{F}_+, \mathbf{F}_-$ sont les deux représentations irréductibles de $\mathrm{Cliff}(\mathbf{R}^{2n+1})$, distinguées par l'action (± 1) de la forme volume ω, élément central involutif de l'algèbre de Clifford. L'action de Clifford $\xi\bullet$ sur $\Lambda^*\mathbf{R}^{2n+1}$ s'identifie naturellement à l'action du symbole principal $\xi \wedge + \xi \lrcorner$.

Les représentations $(\mathbf{F}_+, \xi\bullet)$ et $(\mathbf{F}_-, \omega\xi\bullet)$ $(\xi \in \mathbf{R}^{2n+1})$ sont isomorphes, ainsi $(\Lambda^*\mathbf{R}^{2n+1}, \omega\xi\bullet)$ est isomorphe à $2^{n+1}\mathbf{F}_+$, ce qui implique la non trivialité microlocale de $(\Omega(X), i\omega_X A)$ annoncée plus haut.

LEMME 2.5. — *Soit A microlocalement trivial. Pout tout $m > 0$, il existe un pseudodifférentiel P_m d'ordre 0 tel que $P_m A P_m^{-1}$ soit un opérateur spectralement trivial, à un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $-m$ près*

COROLLAIRE 2.6. — *Si A est microlocalement trivial, alors η_A est régulière en 0.*

Preuve du corollaire. — On a $P_m A P_m^{-1} = T_m + r_m$, avec T_m spectralement trivial et $\mathrm{ord}\, r_m < -m$. Le résidu $R(A)$ est un invariant spectral (car $\eta_A = \eta_{P_m A P_m^{-1}}$) et ne dépend que des composantes de degré au plus égal à $\mathrm{ord}\, A - \dim X$ du symbole de A (ainsi $R(T_m + r_m) = R(T_m)$ si $\mathrm{ord}\, r_m < \mathrm{ord}\, T_m - \dim X$) : ainsi pour $m > \dim X - \mathrm{ord}\, A$, on a $R(A) = R(T_m + r_m) = R(T_m) = 0$. □

Preuve du lemme. — A la décomposition $\pi^* E = \pi^* E_+ \oplus \pi^* E_-$ correspond la décomposition matricielle du symbole a de A

$$\begin{pmatrix} a_+ & b \\ c & a_- \end{pmatrix}$$

avec $\sup(\operatorname{ord} b, \operatorname{ord} c) < \operatorname{ord} a_\pm = \operatorname{ord} A$. Dans le produit

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ & b \\ c & a_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ + kc & b - a_+k + ka_- - kck \\ c & a_- - ck \end{pmatrix},$$

on choisit le symbole k homogène, tel que

$$\begin{cases} \operatorname{ord} k = \operatorname{ord} b - \operatorname{ord} a_+ (< 0) \\ \operatorname{ord} b - a_+k + ka_- = 0 \end{cases}$$

ce qui est toujours possible grâce au lemme suivant, dont la démonstration est confiée au lecteur

LEMME 2.7. — *Soient a_1, a_2 deux matrices d'ordre n_1, n_2 resp. dont les spectres sont disjoints. Alors l'opérateur S défini sur l'espace des matrices d'ordre (n_1, n_2) par $Sk = a_1k - ka_2$ est inversible.*

Ainsi par conjugaison par des opérateurs pseudodifférentiels à symboles triangulaires supérieur (comme le précédent) ou inférieur, on fait décroître à volonté les ordres des opérateurs hors de la diagonale de A dans une représentation matricielle adaptée à la décomposition de π^*E. □

3. Le morphisme de K-théorie

Notons par Vect(M) l'espace des fibrés vectoriels sur l'espace M. Un fibré vectoriel de base compacte étant stablement trivial, pour tout P de Vect(S^*X), il existe un Q dans Vect S^*X tel que $P \oplus Q \in \pi^*$ Vect(X). Soit a une section de Isom($P \oplus Q$) dont le noyau positif L_+ soit P (on peut prendre par exemple $p - q$ où p (*resp.* q) est la projection sur P parallélement à Q (*resp.* ...)) et A un opérateur pseudodifférentiel de symbole principal a et d'ordre positif. On pose $R(P) = R(A)$ et on a la proposition

PROPOSITION 3.1. — *L'application R est bien définie sur $K(S^*X)$, s'annulant sur $\pi^*K(X)$.*

Preuve. — Soit pour $i = 1, 2$ un fibré Q_i, un pseudodifférentiel A_i d'ordre d_i satisfaisant aux conditions précédemment énoncées. D'après la normalisation choisie pour le résidu $R(A)$, quitte à remplacer A_i par $A_i|A_i|^{\frac{1-d_i}{d_i}}$, on peut supposer $d_i = 1$. Le couple $(P \oplus Q_1 \oplus P \oplus Q_2, A_1 \oplus -A_2)$ est microlocalemnt trivial : $L_+ = P \oplus Q_2 = \pi^*E_2$. Ainsi $R(A_1 \oplus -A_2) = 0$ et, par additivité de R sur les sommes directes d'opérateurs, on en déduit $R(A_1) = R(A_2)$. Le résidu $R(P)$ est bien défini, autant sur Vect(S^*X) que sur $K(S^*X)$. L'opérateur A correspondant à un élément de π^* Vect(X), est par construction, microlocalement trivial, et donc à $R(A)$ nul. □

La finitude de η_A en $s = 0$ est alors un corollaire de la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2. — *Le morphisme R est identiquement nul sur le quotient $K(S^*X)/\pi^*K(X)$.*

Disons qu'un ensemble d'opérateurs pseudodifférentiels $\{A\}$ engendre un espace de K-théorie si la famille $\{L_+(A)\}$ l'engendre. La proposition précédente est établie en montrant la nullité de R sur des générateurs de la K–théorie, dont une famille est donnée par le lemme topologique général suivant :

LEMME 3.3. — *Soit X variété compacte. Le $K_{\mathbf{Q}}(X)$–module quotient $K_{\mathbf{Q}}(S^*X)/\pi^*K_{\mathbf{Q}}(X)$ est engendré par :*

– *les opérateurs différentiels d'ordre pair, si* $\dim X$ *est paire, ([2], p. 267).*

– *par l'opérateur de signature* $\omega_X(d+\delta)$, *si* $\dim X$ *est impaire ([2], p. 263).*

Grâce à ce lemme, on peut montrer le cas de la dimension paire à partir de la dimension impaire. Soit A différentiel sur X et Q un opérateur pseudodifférentiel sur $C^\infty(F \to S^1)$ d'ordre $\operatorname{ord} A$ et d'indice 1 (un tel opérateur n'est pas différentiel car tout opérateur différentiel sur S^1 est d'indice nul). L'opérateur

$$A \bowtie Q = \begin{pmatrix} A\otimes 1 & 1\otimes Q^* \\ 1\otimes Q & -A\otimes 1 \end{pmatrix}$$

opérant sur $C^\infty(E\otimes F\oplus E\otimes F \to M\times S^1)$ vérifie $\eta_{A\bowtie Q} = \operatorname{Ind} Q \eta_A$ (si $\tilde{Q}$ est inversible, $A \bowtie \tilde{Q}$ est conjugué à son opposé par $\begin{pmatrix} 0 & Q^* \\ -Q^* & 0 \end{pmatrix}$), mais n'est pas pseudodifférentiel (en raison de l'absence de décroissance du symbole de Q dans les directions conormales à S^1). Soit $B = -i\partial/\partial\theta$ et

$$Q(A) = e^{-i\theta}(B + (|B|^{\operatorname{ord} A} + |A|)^{1/\operatorname{ord} A}) + B - (B^{\operatorname{ord} A} + |A|)^{1/\operatorname{ord} A}.$$

Alors $A \bowtie Q(A)(|B|+|A|^{1/\operatorname{ord} A})^{\operatorname{ord} A-1}$ est pseudodifférentiel, avec une fonction η égale à celle de A (en utilisant la propriété précédente dans une décomposition spectrale de A). Ainsi η_A est–elle régulière en $s=0$.

En ce qui concerne la dimension impaire, la nullité de la fonction R sur les opérateurs de Grassmann–Dirac est démontrée de diverses manières :

∗ *à la Atiyah–Patodi–Singer* (qui introduisirent l'invariant η) Le groupe de cobordisme orienté en dimension impaire étant fini, on peut (quitte à prendre un nombre fini d'exemplaires de X, ce qui est sans importance pour examiner la nullité de l'invariant local $R(A)$) supposer que X borde une variété M. L'invariant η_A apparaît comme un terme correcteur à la formule de l'indice classique pour un problème elliptique naturellement associé à A sur la variété M.

∗ *à la Gilkey* On utilise la théorie des invariants orthogonaux, pour affirmer que R est l'intégrale d'une forme dans l'anneau engendré par les formes de Pontriagin, donc de dimension multiple de 4. L'intégrant sur X de dimension impaire, on obtient la nullité de R.

∗ *à la Bismut* En utilisant la supersymétrie grassmannienne (*i.e.* une $\mathbf{Z}_2$–graduation convenable), on montre que les intégrants des termes les plus singuliers intervenant dans le développement de $\operatorname{tr}(Ae^{-ta^2}$ en temps petit sont identiquement nuls (cette propriété n'est pas générique dans l'espace des opérateurs pseudodifférentiels, bien que l'intégration sur X donne toujours zéro).

Nous allons dans le paragraphe suivant esquisser largement la première démarche, pour le cas particulier de l'opérateur $\omega_X(d+\delta)$ sur $\Omega^*(X)$.

4. Le problème elliptique à bord d'Atiyah–Patodi–Singer

En général (voir [3] par *ex.*), un problème elliptique ("classique") sur une variété M à bord $X = \partial M$ est donné par un opérateur $D : \mathcal{C}(E \to M) \to \mathcal{C}(F \to M)$ et une condition au bord, représentée (dans le cas d'un opérateur D d'ordre 1) par un opérateur d'ordre 0 $B : \mathcal{C}(E \to M) \to \mathcal{C}(G \to \partial M)$ *local* (par exemple, projection sur la composante tangentielle dans le cas de l'opérateur d'Euler). Le problème (D, B) est elliptique si, en sus de l'ellipticité de D à l'intérieur, une condition dite de Lopatinski–Schapiro, est vérifiée. Sur ∂M, le symbole principal d_1 de D est de la forme

$$d_1(x, \xi_n dn + \xi) = \beta(\xi_n + a_1(\Xi))$$

avec $\Xi = (x, \xi) \in T^*X$, dn vecteur conormal à ∂M, $\beta \in \mathrm{Hom}(\pi^* E_{|\Xi}, \pi^* F_{|\Xi})$ et $a_1 \in \mathrm{End}(\pi^* E_{|\Xi})$. Si $b(\Xi) : \pi^* E_{|\Xi} \to \pi^* G_{|\Xi}$ est le symbole principal de B et $K_+(a_1)_{|\Xi}$ la somme des espaces propres généralisés de $a_1(\Xi)$ à valeurs propres de partie réelle positive, la condition de Lopatinski–Schapiro énonce l'inversiblité de $b(\Xi)$ opérant de $K_+(a_1)_{|\Xi}$ dans $\pi^* G_{|\Xi}$, condition qui implique, si elle est vérifiée, la trivialité microlocale de $\pi^* E_{|\partial M}$ relativement au symbole principal a_1.

On munit la variété M d'une métrique riemannienne de type produit au voisinage de son bord. Soit $\frac{\partial}{\partial n}$ le vecteur normal (et dn son dual) à X, $\omega_X, \omega_M = dn\omega_X$ les formes volumes dans les algèbres de Clifford $\mathrm{Cliff}(T^*X), \mathrm{Cliff}(T^*M)$. On introduit $\Lambda^{\pm}(M) = \mathrm{Ker}(\omega_M \bullet \mp 1)$ et on considère l'opérateur de signature $D_M = d + \delta$: $\mathcal{C}(\Lambda^+(M)) \to \mathcal{C}(\Lambda^-(M))$.

L'application, qui associe à la forme $\varphi \in \Lambda^*(X)$ la forme $\varphi \pm \omega_M \varphi$ de $\Lambda(M)_{|X}$, est un isomorphisme de $\Lambda^*(X)$ sur $\Lambda^{\pm}(M)_{|X}$, qui induit un isomorphisme de $p^*\Lambda^*(X)$ sur $\Lambda^{\pm}(M)$ au voisinage de X (p notant la projection normale sur le bord, projection définie sur un voisinage de ∂M). Dans ce voisinage, le symbole principal d_M de D_M (rapporté à $p^*\Lambda^*(X)$ via les isomorphismes précédents) est de la forme

$$d_M(\xi_n dn + \xi) = i\omega_X \bullet (-\xi_n + \omega_X \xi \bullet), \xi \in T^*X.$$

(en fait, D_M étant un opérateur naturel, on a $D_M \simeq dn \bullet (\frac{\partial}{\partial n} + \omega_X(d + \delta)_X)$) et, pour toute condition au bord, la condition de Lopatinski–Schapiro n'est pas vérifiée, vu la non trivialité microlocale de $A_X = i\omega_X(d + \delta)_X$ vue dans la partie 2.

Atiyah–Patodi–Singer introduisent la condition au bord B sur $\mathcal{C}(\Lambda^*(X))$ consistant en la projection L^2 sur l'espace positif relativement à l'opérateur A_X.

On a alors le théorème :

THÉORÈME 4.1 ([1]). - *Le problème (D_M, B) est Fredholm et*

$$(*) \qquad \mathrm{Ind}(D_M, B) = \int_M \omega_{D_M} - \bar{\eta}(A_{\partial M})$$

où ω_{D_M} est la forme canonique intervenant dans le théorème de l'indice pour l'opérateur D_M sur la variété close double de M.

La finitude de l'invariant $\eta(A)$ est implicite dans l'énoncé du théorème 4.1

Preuve. — *(Résumé)* L'indice du problème elliptique (D_M, B) a une expression en termes d'opérateurs de la chaleur :

$$\mathrm{Ind}(D_M, B) = \mathrm{tr}(e^{-tD_M D_M^*} - e^{-tD_M^* D_M}),$$

où $D_M D_M^*$ a pour domaine

$$\{u \in L^2, D_M u \in L^2, Bu = 0, D_M D_M^* u \in L^2, B^* D_M u = 0\}$$

On construit une paramétrice de ces opérateurs de la chaleur en recollant une paramétrice intérieure $e_i(t)$ et une paramétrice du collier $e_C(t)$. La première est obtenue à partir d'une paramétrice sur la variété double, la seconde à partir du problème (D_M, B) sur le cylindre $C_\infty = \mathbf{R}^+ \times X$, où l'étude se fait explicitement par séparation des variables en fonction de la théorie spectrale de l'opérateur sur la tranche X *i.e.* $i\omega_X(d_X + \delta_X)$. On a ainsi la formule de trace asymptotique

$$\mathrm{Ind}(P, B) = \lim_{t \to 0^+} \int_M e_i(t) + \int_C e_C(t).$$

L'intégrant du premier terme a un développement asymptotique (intégrable) comme il résulte de la théorie sur une variété close. Le second est, à un terme exponentiellement petit près, équivalent à $e_\infty(t) = \int_{C_\infty} e_{C_\infty}(t)$ pour lequel on a

$$\int_0^\infty (e_\infty(t) + \frac{\dim \mathrm{Ker}\, A}{2}) t^s \frac{dt}{t} = -\frac{\Gamma(s + 1/2)}{2s\sqrt{\pi}} \eta_A(2s).$$

L'existence du développement asymptotique pour $e_\infty(t)$ d'après $(*)$ fournit le prolongement méromorphe de η_A, ainsi que sa finitude en $s = 0$: ainsi pour l'opérateur $i\omega_X(d + \delta)_X$ (non microlocalement trivial) le résidu R est nul. □

Références

[1] ATIYAH M., PATODI V., SINGER I. — *Spectral asymmetry and riemannian geometry I.*, Mat. Proc. Camb. Soc., 77 (1975), 43-69.

[2] GILKEY P. — *Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer index theorem*, Publish or Perish, Wilmington, 1984.

[3] HÖRMANDER L. — *The analysis of linear partial differential operators III*, Springer Verlag, Berlin, 1985.

[4] HUSEMOLLER D. — *Fibre bundles*, Springer Verlag, Berlin, 1974.

[5] SEELEY R. — *Complex powers of an elliptic operator*, Proc. Symp. in Pure Math., **10** (1967), 288-307.

[6] WODZICKI M. — *Spectral asymmetry and zeta functions* , Inv. Math., **66** (1982), 115–135.

η–bibliographie

[1] ATIYAH M. — *The logarithm of the Dedekind η-function*, Math. Ann., **278** (1987), 335-380.

[2] ATIYAH M., DONNELLY H., SINGER I. — *Geometry and analysis of Shimizu L-functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **79** (1982), 5751-5752.

[3] ATIYAH M., DONNELLY H., SINGER I. — *Eta invariants, signature defects of cusps and values of L-functions*, Ann. Math., **118** (1983), 131-177.

[4] ATIYAH M., PATODI V., SINGER I. — *Spectral asymmetry and riemannian geometry*, Bull. London Math. Soc., **5** (1973), 229-234.

[5] ATIYAH M., PATODI V., SINGER I. — *Spectral asymmetry and riemannian geometry I*, Mat. Proc. Camb. Soc., **77** (1975), 43-69.

[6] ATIYAH M., PATODI V., SINGER I. — *Spectral asymmetry and riemannian geometry II*, Mat. Proc. Camb. Soc., **78** (1975), 405-432.

[7] ATIYAH M., PATODI V., SINGER I. — *Spectral asymmetry and riemannian geometry III*, Mat. Proc. Camb. Soc., **79** (1976), 71-99.

[8] BISMUT J–M., BOST J–B. — *Fibrés déterminants, métriques de Quillen et dégénerescence des courbes*, Preprint I.H.E.S, (1988), .

[9] BISMUT J–M., CHEEGER J. — *Invariants êta et indice des familles pour des variétés à bord*, C. R. Acad. Sci. Paris, **305** (1987), 127-130.

[10] BISMUT J–M., CHEEGER J. — *Families index for manifolds with boundary, superconnections and cones*, A paraître dans J. Func. Anal., (1989), .

[11] BISMUT J–M., CHEEGER J. — *η–invariants and their adiabatic limits*, J. Amer. Math. Soc., **2** (1989), 33–70.

[12] BISMUT J–M., FREED D. — *The analysis of elliptic families II. Dirac operators, êta invariants and the holonomy theorem*, Commun. Math. Phys., **107** (1986), 103-163.

[13] BRÜNING J., SEELEY R. — *An index theorem for regular singular operators*, Amer. J. Math., (1987), .

[14] BRÜNING J. — *L^2–index theorems for certain complete manifolds*, A paraître dans J. Differential Geo., (), .

[15] BURGHELEA D., KAPPELER T. — *On the determinant for elliptic differential operators in vector bundles over S^1*, Preprint, (1989), .

[16] CHEEGER J. — *Spectral geometry of singular Riemannian spaces*, J. Differential Geo., **18** (1983), 575–657.

[17] CHEEGER J., GROMOV M. — *On the characteristic numbers of complete manifolds of bounded curvature and finite volume*, Differential geometry and complex analysis, Vol. dedicated to H. E. RAUCH, (1985), 115–154.

[18] CHEEGER J. — *Eta invariants, the adiabatic aproximation and conical singularities*, J. Differential Geo., **26** (1987), 175–221.

[19] CHOU A. W. — *The Dirac operator on spaces with conical singularities and positive curvatures*, Tans. Amer. Math. Soc., **289** (1985), 1–40.

[20] DAI X. — *Ph. D. Thesis, SUNY at Stony Brook*, , (), .

[21] DONNELLY H. — *Spectral geometry and invariants from differential topology*, Bull. London Math. Soc., **5** (1975), 147-150.

[22] DONNELLY H. — *Eta invariant of a fibered manifold*, Topology, **15** (1976), 247-252.

[23] DONNELLY H. — *Eta invariants for G–spaces*, Indiana Univ. Math. J., **27** (1978), 899-918.

[24] DOUGLAS R. — *Elliptic invariants for differential operators*, Proceedings in Pure mathematics, **48** (1988), 275-285.

[25] DOUGLAS R., HURDER S., KAMINKER J. — *Toeplitz operators and the eta invariant : the case of S^1*, Index theory of elliptic operators, foliation and operator algebras, Contemporary mathematics, **70** (1988), 11-42.

[26] DOUGLAS R., WOJCIECHOWSKI K. — *Spectral flow of families of elliptic boudary value problems and adiabatic limits of the η-invariants*, preprint, (), .

[27] GILKEY P. — *The residue of the local eta function at the origin*, Math. Ann., **240** (1979), 183-189.

[28] GILKEY P. — *The residue of the global eta function at the origin*, Adv. in Math., **40** (1981), 290-307.

[29] GILKEY P. — *Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer index theorem*, Publish or Perish, Wilmington, 1984.

[30] GILKEY P. — *The eta invariant and second characteristic classes of locally flat bundles*, Algebraic and differential topology, global differential geometry, Texte zur Math., Teubner, Leipzig, **70** (1984), 49-88.

[31] GILKEY P. — *The eta invariant and the K-theory of odd dimensional spherical space forms*, Inv. Math., **76** (1984), 421-453.

[32] GILKEY P. — *The eta invariant for even dimensional Pin_c-manifolds*, Adv. in Math., **58** (1985), 243–284.

[33] GILKEY P. — *The eta invariant and KO of lens spaces*, Math. Zeitschrift, **194** (1987), 309–320.

[34] GILKEY P., SMITH L. — *The eta invariant for a class of elliptic boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983), 85-132.

[35] GILKEY P., SMITH L. — *The twisted index theorem for manifolds with boundary*, J. Differential Geo., **18** (1983), 393-444.

[36] KASSEL . — *Le résidu non commutatif (d'après M. Wodzicki)*, séminaire Bourbaki, (1989), .

[37] KATASE K. — *Eta function on three-sphere*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **57** (1981), 233-237.

[38] KOMURO M. — *On Atiyah-Patodi-Singer eta invariants for S^1-bundles over Riemann surfaces*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1A Math., 30 (1984), 525-548.

[39] KRECK M., STOLZ S. — *A diffeomorphism classification of 7-dimensional homogenous Einstein manifolds with $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$-symmetry*, Ann. Math., 127 (1988), 373–388.

[40] LAZAROV C. — *Spectral invariants for foliations*, Michigan J. Math., **33** (1986), 231-243.

[41] LAZAROV C. — *A relation between index and exotic classes*, Index theory of elliptic operators, foliation and operator algebras, Contemporary mathematics, **70** (1988), 125-144.

[42] MAZZEO R., MELROSE R. — *The adiabatic limit, Hodge cohomology and the Leray's spectral sequence of a fibration*, preprint, (1988), .

[43] MILLSON J. — *Closed geodesics and the eta invariant*, Ann. Math., **108** (1978), 1-39.

[44] MOSCOVICI H., STANTON R. — *Eta invariants of Dirac operators on locally symmetric manifolds*, Inv. Math., **95** (1987), 629-666.

[45] MÜLLER W. — *Signature defects of cusps of Hilbert modular surfaces and values of L-functions at $s = 1$*, J. Differential Geo., **20** (1984), 55-119.

[46] MÜLLER W. — *Manifolds with cusps of rank one*, Lecture notes in Math.1244, 1987.

[47] MÜLLER W. — *L^2-index and resonances*, Lecture notes in Math., **1339** (1988), 203–211.

[48] MÜLLER W. — *L^2-index, eta invariants and values of L-functions*, A paraître dans Contemp. Math, (), .

[49] SINGER I. — The η-invariant and the index, Proc. Conf. on string theory, University of California at San Diego, 1986.

[50] SMITH L. — *The e invariant and finite covering*, Indiana Univ. Math. J., **24** (1975), 659-675.

[51] STERN M. — *L^2-index theorems on locally symmetric spaces*, Inv. Math., **96** (1989), 231–282.

[52] WITTEN E. — *Global gravitational anomalies*, Commun. Math. Phys., **100** (1985), 197-229.

[53] WODZICKI M. — *Local invariants of spectral asymmetry*, Inv. Math., 75 (1984), 143–178.

[54] WODZICKI M. — *Non commutative residues I : Fundamentals*. K–Theory, arithmetic and geometry, séminaire, Moscou 1984-1986, Lecture notes in Math., 1289 (1987), 320–399.

[55] WODZICKI M. — *Spectral asymmetry and zeta functions* , Inv. Math., 66 (1982), 115–135.

[56] WOJCIECHOWSKI K. — *Spectral asymmetry, elliptic boudary value problem, cutting and pasting of elliptic operators*, , (), .

[57] YOSHIDA T. — *The eta invariant of hyperbolic* 3*–manifolds*, Inv. Math., 81 (1985), 473-514.

Laurent GUILLOPÉ
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)