

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

PAUL ALBUQUERQUE

**Support des mesures de Patterson-Sullivan en rang supérieur**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 14 (1995-1996), p. 39-51

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1995-1996\\_\\_14\\_\\_39\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1995-1996__14__39_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1995-1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUPPORT DES MESURES DE PATTERSON-SULLIVAN EN RANG SUPÉRIEUR

*Paul ALBUQUERQUE*

### 0. Introduction

Les mesures de Patterson-Sullivan associées à un sous-groupe discret  $\Gamma$  d'isométries, ont été étudiées de manière extensive dans le cas des espaces hyperboliques réels  $\mathbb{H}^n$  ([Su], [Ni]). Elles reflètent la densité, à grande échelle, des  $\Gamma$ -orbites. On en tire des informations de nature géométrique et ergodique. Ces mesures permettent, en effet, d'établir un lien entre la croissance des  $\Gamma$ -orbites et des propriétés géométriques de l'ensemble limite de  $\Gamma$ , telle que sa dimension de Hausdorff. On peut, par ailleurs, également construire à l'aide des mesures de Patterson-Sullivan, des mesures invariantes pour le flot géodésique sur la surface quotient  $\mathbb{H}^n/\Gamma$ . Ces mesures invariantes sont d'entropie maximale, cette entropie étant aussi liée à la croissance des  $\Gamma$ -orbites.

Certaines notions ont par la suite été généralisées aux espaces hyperboliques au sens de Gromov ([C], voir aussi [Bou] pour les espaces  $\text{CAT}(-1)$ ). Les mesures de Patterson-Sullivan permettent donc d'investiguer la distribution des  $\Gamma$ -orbites en courbure négative. Apparemment, le cas d'espaces avec de la courbure nulle, a été peu traité. Les espaces riemanniens symétriques de type non-compact de rang supérieur constituent une bonne classe d'espaces à étudier. Ils contiennent en effet énormément de sous-espaces euclidiens non-triviaux. Néanmoins, leur géométrie comporte d'importants aspects hyperboliques.

Dans les espaces hyperboliques, le support des mesures de Patterson-Sullivan associées à des sous-groupes discrets cocompacts s'identifie au bord géométrique de l'espace.

Dans ce papier, nous montrons que pour les espaces riemanniens symétriques de type non-compact de rang supérieur, ce support s'identifie naturellement à son bord de Furstenberg, lequel est distinct de son bord géométrique (tandis qu'ils coïncident en rang un). Pour être plus précis, ces mesures sont concentrées sur l'orbite, sous le groupe des isométries de l'espace, du "barycentre" d'une chambre de Weyl à l'infini. Cette orbite coupe les chambres de Weyl à l'infini transversalement. En fait, ces mesures se concentrent sur le lieu du bord géométrique qui correspond aux directions où la divergence des géodésiques est la plus forte, ou de manière équivalente, aux directions où la dilatation du volume riemannien est maximale.

## 1. Mesures de Patterson-Sullivan

Citons [Ni] comme référence pour ce paragraphe.

Soit  $(X, d)$  un espace métrique CAT(0) localement compact. Le bord géométrique  $X(\infty)$  de  $X$  est l'ensemble des classes d'équivalence de rayons géodésiques asymptotes. On note  $\bar{X} := X \cup X(\infty)$  la compactification associée.

Soit  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  un sous-groupe discret du groupe des isométries de  $(X, d)$ . On définit la série de Poincaré associée à  $\Gamma$  :

$$g_s(x, x_0) := \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x, \gamma x_0)} \quad s \in \mathbb{R}, \quad x, x_0 \in X,$$

et l'exposant critique  $\delta$  de  $\Gamma$  :  $\delta = \delta(\Gamma) := \inf\{s \in \mathbb{R} \mid g_s(x, x_0) < \infty\}$ .

Considérons à présent la famille  $\{\mu_{s,x}\}_{s > \delta}$  de mesures orbitales sur  $\bar{X}$  :

$$\mu_{s,x} := \frac{1}{g_s(x_0, x_0)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x, \gamma x_0)} D_{\gamma x_0}, \quad s > \delta,$$

où  $D_{\gamma x_0}$  est une masse de Dirac en  $\gamma x_0$ .

Supposons que la série de Poincaré diverge en  $s = \delta$  (i.e.  $g_\delta(x, x_0) = \infty$ ) et notons  $M^+(\bar{X})$  le cône des mesures boréliennes positives finies sur  $\bar{X}$ . La famille d'applications  $\Gamma$ -équivariantes

$$\begin{aligned} X &\rightarrow M^+(\bar{X}) \\ x &\mapsto \mu_{s,x} \end{aligned}, \quad \delta < s \leq \delta + 1,$$

est équicontinue et uniformément bornée sur les compacts ([Bu]). Cette famille est donc relativement compact dans l'espace des applications continues  $C^0(X, M^+(\bar{X}))$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Soit  $x \mapsto \mu_x$  un point d'accumulation de cette famille lorsque  $s \searrow \delta$ . La mesure  $\mu_x$  a les propriétés suivantes :

- $\mu_x$  est supporté dans l'ensemble limite de  $\Gamma$  (i.e.  $\text{supp}(\mu_x) \subset \overline{\Gamma x_0} \cap X(\infty)$ ).

. Soit  $x, x' \in X$  et  $\xi \in X(\infty)$  représenté par le rayon géodésique  $r(t)$  avec  $r(0) = x_0$ .

Alors :

$$\frac{d\mu_{x'}}{d\mu_x}(\xi) = e^{-\delta B_\xi(x, x')},$$

où  $B_\xi(x, x') = \lim_{t \rightarrow \infty} [d(x, r(t)) - d(x', r(t))]$  est la distance horosphérique entre  $x$  et  $x'$  par rapport à  $\xi$ .

.  $\gamma^* \mu_x = \mu_{\gamma x}, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$

Supposons maintenant que la série de Poincaré converge en  $s = \delta$  (i.e.  $g_\delta(x, x_0) < \infty$ ). Une construction de Patterson ([Pa]), consistant à ajouter une pondération faiblement croissante aux mesures orbitales  $\mu_{s, x}$ , permet alors d'obtenir, après passage à la limite, une famille de mesures également notée  $\{\mu_x\}_{x \in X}$ , jouissant des mêmes propriétés.

On appelle **densité de Patterson-Sullivan** (associée au groupe  $\Gamma$ ) une famille  $\mu = \{\mu_x\}_{x \in X}$  construite ainsi, et **mesure de Patterson-Sullivan** un élément  $\mu_x$  de cette famille.

Dans la suite, nous nous restreindrons au cas où  $X$  est un espace riemannien symétrique de type non-compact de rang  $\geq 2$  et  $\Gamma$  un réseau irréductible. Nous caractériserons dans ce cas, le support des mesures de Patterson-Sullivan.

## 2. Les espaces riemanniens symétriques

### 2.1. Généralités.

Un espace riemannien symétrique  $X$  est une variété riemannienne, complète, avec la propriété que la symétrie riemannienne  $s_x$  en  $x$ , est une isométrie globale de  $X$ , quel que soit  $x \in X$ .

Appelons  $G$  la composante connexe de l'identité du groupe des isométries riemanniennes de  $X$ . Elle admet une structure de groupe de Lie.

Soit  $x_0$  un point-base fixé et  $K \subset G$  le sous-groupe d'isotropie de  $x_0$ . Alors  $K$  est un sous-groupe compact et l'application :

$$G/K \rightarrow X$$

$$gK \mapsto gx_0$$

est un difféomorphisme analytique ([Hel1], p.208).

Définissons  $\sigma \in \text{Aut}(G)$  par  $\sigma(g) = s_{x_0} g s_{x_0}$ . Dénotons par  $\mathfrak{g}$  (resp.  $\mathfrak{k}$ ) l'algèbre de Lie de  $G$  (resp.  $K$ ) et  $\sigma_* \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$  la dérivée en  $e \in G$  de  $\sigma$ . Alors  $\mathfrak{k} = \{\xi \in \mathfrak{g} | \sigma_*(\xi) = \xi\}$ .

Si on pose  $\mathfrak{p} = \{\xi \in \mathfrak{g} | \sigma_*(\xi) = -\xi\}$ , on a la décomposition en somme directe  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ . La projection naturelle  $\pi : G \rightarrow X$  induit un isomorphisme  $d_e \pi|_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \rightarrow T_{x_0} X$

(on a  $d_e\pi(\mathfrak{k}) = \{0\}$ ). On peut alors identifier, via les translations à gauche, les espaces tangents à  $X$  avec  $\mathfrak{p}$  ([Hel1], p.208).

Notons  $Q : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$  et  $Q_{\mathfrak{p}}$  (resp.  $Q_{\mathfrak{k}}$ ) la restriction de  $Q$  à  $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$  (resp.  $\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$ ). La forme  $Q_{\mathfrak{k}}$  est définie négative, car le groupe  $K$  est compact. Les relations de crochet entre  $\mathfrak{k}$  et  $\mathfrak{p}$  implique que  $Q(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$ .

On dit que  $X$  est de **type non-compact** (resp. **compact, euclidien**) si  $Q_{\mathfrak{p}}$  est définie positive (resp. définie négative, identiquement nulle).

On a le théorème de décomposition suivant :

**THÉORÈME 1** ([Hel1], p. 244). — *Soit  $X$  un espace riemannien symétrique simplement connexe. Alors  $X$  est isométrique à un produit riemannien  $X_- \times X_+ \times X_0$  où  $X_-$  est un espace symétrique de type non-compact,  $X_+$  est un espace symétrique de type compact et  $X_0$  est un espace euclidien.*

Ces différents types se caractérisent en termes de courbure sectionnelle. Par exemple,  $X$  est de type non-compact, si et seulement si,  $X$  est sans facteur euclidien de courbure sectionnelle  $\leq 0$ .

Dorénavant  $X$  sera supposé de type non-compact. En particulier  $\mathfrak{g}$  est semi-simple et la décomposition  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  est une **décomposition de Cartan** de  $\mathfrak{g}$ . Relevons encore que le centre  $Z(G)$  de  $G$  est trivial et que la finitude de  $Z(G)$  entraîne que  $K$  est un sous-groupe compact maximal de  $G$ . A une décomposition de Cartan, on peut associer un automorphisme

$$\nu : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \quad \text{tel que } \nu|_{\mathfrak{k}} = \text{id}, \quad \nu|_{\mathfrak{p}} = -\text{id},$$

appelé **involution de Cartan**. On peut alors définir à l'aide de la forme de Killing un produit scalaire  $\text{Ad}(K)$ -invariant sur  $\mathfrak{g}$  :

$$\langle Y|Z \rangle = -Q(Y, \nu(Z)).$$

On obtient ainsi une métrique riemannienne  $G$ -invariante sur  $X$ .

## 2.2. Espaces riemanniens symétriques de type non-compact.

Ce rappel théorique se base essentiellement sur [BGS] (appendix 5).

### STRUCTURE DES PLATS ET DÉCOMPOSITION EN SOUS-ESPACES DE RACINES.

Un **plat** dans  $X$  est une sous-variété euclidienne totalement géodésique de dimension maximale. On appelle cette dimension le **rang** de  $X$ ; on le notera  $\text{rg}(X)$ .

Soit  $F$  un plat contenant  $x_0$ . On dit que  $c : \mathbb{R} \rightarrow F$  avec  $c(0) = x_0$ , est une **géodésique régulière**, si  $F$  est l'unique plat qui la contient, et une **géodésique singulière**, si elle est contenue dans plusieurs plats.

L'espace tangent à  $F$  en  $x_0$  correspond à un sous-espace abélien maximal  $\mathfrak{a}$  de  $\mathfrak{p}$ . On a alors  $F = Ax_0$  où  $A = \exp \mathfrak{a} < G$ . Réciproquement, tout sous-espace abélien maximal de  $\mathfrak{p}$  correspond à un plat par  $x_0$ . Les sous-espaces abéliens maximaux de  $\mathfrak{p}$  sont conjugués par l'action de  $\text{Ad}(K)$ .

En diagonalisant simultanément les opérateurs autoadjoints  $\{\text{ad}H : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, H \in \mathfrak{a}\}$ , on obtient la décomposition en sous-espaces de racines :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \mathfrak{g}_\alpha,$$

où, pour  $\alpha \in \mathfrak{a}^*$  un élément du dual de  $\mathfrak{a}$ , on a posé

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{Y \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}H(Y) = \alpha(H)Y, \forall H \in \mathfrak{a}\} \quad (\text{sous-espace de racines}), \quad m_\alpha = \dim \mathfrak{g}_\alpha,$$

$$\Lambda = \{\alpha \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\} \quad (\text{ensemble des racines}).$$

Le vecteur  $H \in \mathfrak{a}$  est tangent en  $x_0$  à une géodésique singulière, si et seulement si, il existe  $\alpha \in \Lambda$  tel que  $\alpha(H) = 0$ . L'ensemble des éléments singuliers  $\mathfrak{a}_{\text{sing}} = \{H \in \mathfrak{a} \mid \exists \alpha \in \Lambda \text{ avec } \alpha(H) = 0\}$  est donc une réunion finie d'hyperplans  $\{H \in \mathfrak{a} \mid \alpha(H) = 0\}$ , où  $\alpha \in \Lambda$ . Son complémentaire  $\mathfrak{a}_{\text{reg}} = \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{a}_{\text{sing}}$  est l'ensemble des éléments réguliers de  $\mathfrak{a}$ .

On appelle chambre de Weyl de  $\mathfrak{a}$  une composante connexe de  $\mathfrak{a}_{\text{reg}}$ . Une chambre de Weyl de  $F$  de sommet  $x_0$  est l'image, via l'exponentielle riemannienne en  $x_0$ , d'une chambre de Weyl de  $\mathfrak{a}$ .

Fixons une chambre de Weyl  $\mathfrak{a}^+$  dans  $\mathfrak{a}$  et posons  $A^+ = \exp \mathfrak{a}^+$ . Ce choix détermine un sous-ensemble de racines positives  $\Lambda^+ = \{\alpha \in \Lambda \mid \alpha(H) > 0, \forall H \in \mathfrak{a}^+\}$ .

On peut lui associer un sous-groupe unipotent

$$N = \exp \mathfrak{n} \quad \text{où } \mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda^+} \mathfrak{g}_\alpha \text{ est une sous-algèbre nilpotente de } \mathfrak{g}.$$

On a alors la décomposition d'Iwasawa ([Hel1], chap.9, § 1) :  $G = KAN$ .

#### BORD DE FURSTENBERG.

Soit  $M$  le centralisateur et  $M'$  le normalisateur de  $A$  dans  $K$ .  $M$  est le sous-groupe de  $G$  qui fixe le plat  $F$  point par point, tandis que  $M'$  est le sous-groupe de  $G$  qui fixe  $x_0$  et laisse  $F$  globalement invariant. Le groupe de Weyl de  $W = M'/M$  est un groupe fini qui agit simplement transitivement sur les chambres de Weyl de  $(F, x_0)$ .

Considérons à présent l'espace  $CX$  de toutes les chambres de Weyl de  $X$ . L'action de  $G$  sur  $CX$  est transitive et  $M$  est le groupe d'isotropie de la chambre de Weyl  $A^+x_0$  de  $F$ . On peut donc identifier  $CX$  avec l'espace homogène  $G/M$ .

On dira que deux chambres de Weyl sont asymptotes si elles sont à distance de Hausdorff bornée. On définit alors le bord de Furstenberg de  $X$  comme l'ensemble des

classes d'équivalence de chambres de Weyl asymptotes ([Mos], [Fu]). Il existe une unique chambre de Weyl de sommet  $x_0$  dans chaque classe d'équivalence.

Le groupe  $G$  agit transitivement sur le bord de Furstenberg de  $X$  et  $P = MAN$  est le groupe d'isotropie de la classe de  $A^+x_0$  (i.e.  $P = \{g \in G \mid gA^+x_0 \text{ asymptote à } A^+x_0\}$ ). En fait,  $P$  est aussi le groupe d'isotropie de n'importe quel point  $\xi$  de  $A^+x_0(\infty) \subset X(\infty)$ . Ainsi on peut identifier le bord de Furstenberg de  $X$  à  $G/P = K/M$ , mais également à l'orbite  $G\xi = K\xi$  de  $\xi$  dans  $X(\infty)$ .

### 3. Support des mesures de Patterson-Sullivan

Rappelons que  $X = G/K$  est un espace symétrique de type non-compact de rang  $\text{rg}(X) \geq 2$  et  $x_0 \in X$  un point-base fixé. On considère la densité de Patterson-Sullivan  $\mu$  associée à un réseau irréductible  $\Gamma$  de  $G$ .

Notations.

On écrira  $E(n, s) \asymp E'(n, s)$ , s'il existe des constantes  $C_1, C_2$  telles que  $C_1 E(n, s) \leq E'(n, s) \leq C_2 E(n, s)$ . Ces constantes seront toujours indépendantes de  $n$  et  $s$ . Lorsqu'il n'y aura pas lieu d'explicitier une constante, elle sera simplement notée *const*.

L'énoncé du théorème suivant dont nous donnons une démonstration, nous a été proposé par Marc Burger.

**THÉORÈME 2.** — *Soit  $\mu$  la densité de Patterson-Sullivan associée à un réseau irréductible  $\Gamma$  de  $G$ . Alors*

$$\text{supp}(\mu_x) = Gc(\infty) = Kc(\infty), \quad \forall x \in X,$$

où  $c(t) = \exp t(b/\|b\|)x_0$  et  $b \in \mathfrak{a}^+$  est le vecteur dual à la forme linéaire  $\sum_{\alpha \in \Lambda^+} m_\alpha \alpha$  ( $b$  est appelé barycentre de la chambre de Weyl  $\mathfrak{a}^+$ ).

*Preuve.* — Les mesures de Patterson-Sullivan  $\mu_x$  étant absolument continues les unes par rapport aux autres, on peut supposer  $x = x_0$ .

On définit le cône d'axe  $u \in \mathfrak{a}^+$  ( $\|u\| = 1$ ) et d'ouverture  $\psi$  ( $\psi$  petit) :

$$C_{u,\psi} = \bigcup_{n \geq 1} C_{u,\psi}(n) \subset A^+,$$

où

$$C_{u,\psi}(n) = \{\exp H \mid \langle H, u \rangle \geq \|H\| \cos \psi, n-1 \leq \|H\| < n, H \in \mathfrak{a}^+\},$$

et la couronne obtenue en enlevant à la boule de rayon  $n$  centrée en  $x_0$  celle de rayon  $n-1$  :

$$\text{Cour}(n) = B(x_0, n) \setminus B(x_0, n-1) \subset X.$$

On commence par montrer que

$$\mu_{x_0}((KC_{u,\psi}x_0)(\infty)) = 0, \text{ si } \exp b \notin C_{u,\psi},$$

i.e.  $\text{supp}(\mu_{x_0}) \subset Gc(\infty)$ .

Dorénavant, on écrira simplement  $C$  (resp.  $C(n)$ ) à la place de  $C_{u,\psi}$  (resp.  $C_{u,\psi}(n)$ ). Comme  $\mu_{x_0}$  est une limite faible de  $\{\mu_{s,x_0}\}_{s>\delta}$  dans  $\bar{X}$ , on a ([Bill]) :

$$\mu_{x_0}((KCx_0)(\infty)) = \lim_{s \searrow \delta} \mu_{s,x_0}(KCx_0).$$

On est donc ramené à estimer la série de Poincaré  $g_s(x_0, x_0)$  et la série

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x_0, \gamma x_0)} D_{\gamma x_0}(KCx_0).$$

Effectuons une première estimation :

$$g_s(x_0, x_0) \asymp \sum_{n>0} e^{-sn} |\Gamma x_0 \cap \text{Cour}(n)|,$$

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x_0, \gamma x_0)} D_{\gamma x_0}(KCx_0) \asymp \sum_{n>0} e^{-sn} |\Gamma x_0 \cap KC(n)x_0|.$$

Un théorème de A.Eskin et C.Mac-Mullen ([Esk]), permet d'effectuer une deuxième estimation en approximant le nombre de points de l'orbite de  $\Gamma x_0$  dans  $\text{Cour}(n)$  (resp.  $KC(n)x_0$ ) par le volume de  $\text{Cour}(n)$  (resp.  $KC(n)x_0$ ).

**PROPOSITION 3.** — Soit  $v_{max}$  le vecteur unité de  $\exp^{-1}(C)$  qui maximise  $\langle b, \cdot \rangle$ . Alors :

$$\text{Vol}(KC(n)) \leq \text{const} \cdot n^{\text{rg}(X)} e^{-\langle b, v_{max} \rangle n}, \quad \forall n > 0.$$

Plus précisément :

$$\text{Vol}(KC(n)) \asymp n^{\frac{\text{rg}(X)-1}{2}} e^{-\|b\|n}, \quad \text{si } \exp b \in C, \quad \forall n > 0.$$

En particulier :

$$\text{Vol}(\text{Cour}(n)) \asymp n^{\frac{\text{rg}(X)-1}{2}} e^{-\|b\|n}, \quad \forall n > 0.$$

*Preuve.* — en annexe. ■

**PROPOSITION 4.**

$$\begin{aligned} |\Gamma x_0 \cap \text{Cour}(n)| &\asymp \text{Vol}(\text{Cour}(n)) \\ |\Gamma x_0 \cap KC(n)x_0| &\asymp \text{Vol}(KC(n)x_0), \end{aligned} \quad \forall n > 0.$$



*Preuve.* — en annexe. ■

On a comme conséquence que

$$g_s(x_0, x_0) \asymp \sum_{n>0} n^{\frac{\text{rg}(X)-1}{2}} e^{(-s+\|b\|)n}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} g_s(x_0, x_0) &= \infty && \text{pour } s \leq \|b\|, \\ g_s(x_0, x_0) &< \infty && \text{pour } s > \|b\|. \end{aligned}$$

Donc  $\delta = \|b\|$  et  $\Gamma$  est de type divergent (i.e.  $g_\delta(x, x_0) = \infty$ ).

On peut maintenant achever la preuve du théorème.

Si  $\exp b \notin C$  (i.e.  $\langle b|v_{max} \rangle < \|b\|$ ), alors en utilisant les propositions 3) et 4), on a :

$$\begin{aligned} \mu_{x_0}((KCx_0)(\infty)) &= \lim_{s \searrow \delta} \frac{1}{g_s(x_0, x_0)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x_0, \gamma x_0)} D_{\gamma x_0}(KCx_0) \\ &\leq \text{const} \cdot \lim_{s \searrow \delta} \left( \frac{\sum_{n>0} n^{\text{rg}(X)} e^{(-s+\langle b|v_{max} \rangle)n}}{\sum_{n>0} n^{\frac{\text{rg}(X)-1}{2}} e^{(-s+\|b\|)n}} \right). \end{aligned}$$

Dans le passage à la limite  $s \searrow \delta = \|b\|$ , le numérateur reste fini tandis que le dénominateur diverge, car  $\langle b|v_{max} \rangle < \|b\|$ . Donc,  $\mu_{x_0}((KCx_0)(\infty)) = 0$ . Nous avons ainsi montré que le support de  $\mu_{x_0}$  est contenu dans  $Kc(\infty)$  où  $c(t) = \exp t(b/\|b\|)x_0$ . Ce support est un fermé  $\Gamma$ -invariant dans  $Kc(\infty)$ . Or  $\Gamma$  agit minimalement sur  $Kc(\infty)$  ([Mos]). Par conséquent,  $\text{supp}(\mu_{x_0}) = Kc(\infty) = Gc(\infty)$  (noter que  $ANc(\infty) = c(\infty)$ ). ■

**COROLLAIRE 5.** — Une densité de Patterson-Sullivan  $\mu$  associée à un réseau  $\Gamma$  de  $G$  appartient à la classe de la mesure de probabilité  $K$ -invariante sur  $Gc(\infty)$ . En fait,  $\mu_{x_0}$  est égal à cette mesure de probabilité  $K$ -invariante.

## 4. Unicité des densités de Patterson-Sullivan

Une densité conforme  $\mu$   $\Gamma$ -invariante de dimension  $\beta$  sur  $X(\infty)$  (en abrégé, une  $\beta$ -densité) est une application continue  $\Gamma$ -équivariante

$$\begin{aligned} \mu : X &\rightarrow M^+(X(\infty)) \\ x &\mapsto \mu_x \end{aligned} \quad \text{telle que } \frac{d\mu_{x'}}{d\mu_x(\xi)} = e^{-\beta B_\xi(x, x')}, \quad \forall x \in X, \xi \in X(\infty),$$

où  $B_\xi(x, x')$  est la distance horosphérique entre  $x$  et  $x'$  par rapport à  $\xi$  et  $M^+(X(\infty))$  est le cône des mesures boréliennes positives finies sur  $X(\infty)$ .

La construction de Patterson, donnée au § 1, fournit des exemples de densités conformes  $\Gamma$ -invariantes de dimension  $\delta$  à support dans l'ensemble limite de  $\Gamma$ .

Rappelons que  $c$  est un rayon géodésique avec  $\dot{c}(0) = b/\|b\|$ .

**THÉORÈME 6 ([A1]).** — Soit  $\Gamma$  un réseau irréductible de  $G$ . Alors  $\delta = \|b\|$ , et l'orbite  $Gc(\infty) \subset X(\infty)$  est le support de toute  $\delta$ -densité.

Il est important de mentionner que toute densité est forcément de dimension  $\geq \delta$ . Supposons que  $\mu$  est une  $\delta$ -densité. Alors l'action de  $\Gamma$  sur  $Gc(\infty)$  est ergodique par rapport à  $\mu$  ([Moo]). Il en découle qu'il existe une unique densité conforme  $\Gamma$ -invariante de dimension  $\delta$  (à multiplication par une constante près). Celle-ci peut donc être obtenue par la construction de Patterson, ou directement à partir de la mesure de probabilité  $K$ -invariante sur  $Gc(\infty)$ . Si  $\mu$  est une  $\beta$ -densité avec  $\beta > \delta$ , alors  $\mu$  est singulière par rapport à la mesure de probabilité  $K$ -invariante sur  $Gc(\infty)$ . Pour plus de détails voir [A1].

## 5. Annexes

### 5.1. Formule d'intégration.

Soit  $X = G/K$  un espace symétrique de type non-compact de rang  $\text{rg}(X)$ . Le groupe semi-simple  $G$  admet la décomposition suivante ([Hel1], chap.9, § 1):

$$G = KAK \quad (\text{décomposition polaire}).$$

Posons  $G' = KA'K$  où  $A' = \exp(a_{\text{reg}})$ . Le sous-espace  $X' = G'x_0$  est un ouvert dense de  $X$  et l'application :

$$\begin{aligned} K/M \times A^+ &\rightarrow X' \\ (kM, a) &\mapsto kax_0 \end{aligned}$$

est un difféomorphisme.

Il en découle la formule d'intégration :

**THÉORÈME 7 ([Hel2], chap.1, § 5).**

$$\int_X f(x) dx = \int_{K/M} \left( \int_{A^+} f(kax_0) \prod_{\alpha \in \Lambda^+} [\sinh \alpha(\exp^{-1}(a))]^{m_\alpha} da \right) dk_M, \quad \forall f \in C_c(X)$$

où  $dk_M$  est la mesure  $K$ -invariante sur  $K/M$ ,

$dx$  est l'élément de volume riemannien sur  $X$ ,

$da$  est la mesure invariante à gauche sur  $A$ .

Nous obtiendrons, grâce à cette formule, des estimations asymptotiques de volume. Pour tout  $H \in \mathfrak{a}^+$  tel que  $\alpha(H) \geq \text{const} > 0$ ,  $\forall \alpha \in \Lambda^+$ , on a

$$\prod_{\alpha \in \Lambda^+} [\sinh \alpha(H)]^{m_\alpha} \asymp \prod_{\alpha \in \Lambda^+} e^{m_\alpha \alpha(H)} = \exp\left[\sum_{\alpha \in \Lambda^+} m_\alpha \alpha(H)\right] = e^{(b|H)}.$$

Soit  $A^b = \exp \mathfrak{a}^b$  un sous-ensemble de mesure finie positive de  $A^+$  satisfaisant  $\alpha(\mathfrak{a}^b) \geq \text{const}$ ,  $\forall \alpha \in \Lambda^+$ . Posons  $a = \exp H$ ,  $da = \exp_*(dH)$ . Alors

$$\begin{aligned} \text{Vol}(KA^b x_0) &= \int_{K/M} \left( \int_{A^+} \chi_{KA^b x_0}(ka x_0) \prod_{\alpha \in \Lambda^+} [\sinh \alpha(\exp^{-1}(a))]^{m_\alpha} da \right) dk_M \\ &= \int_{K/M} \chi_K(k) dk_M \int_{A^+} \chi_{A^b x_0}(a x_0) \prod_{\alpha \in \Lambda^+} [\sinh \alpha(\exp^{-1}(a))]^{m_\alpha} da \\ &= \text{const} \cdot \int_{\mathfrak{a}^b} \prod_{\alpha \in \Lambda^+} [\sinh \alpha(H)]^{m_\alpha} d\mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\text{Vol}(KA^b x_0) \asymp \text{const} \cdot \int_{\mathfrak{a}^b} e^{(b|H)} dH.$$

## 5.2. Preuve des propositions 3) et 4).

LEMME TECHNIQUE. — Soit  $d < 1$  et  $l \geq -1$  un entier. Alors :

$$\int_d^1 e^{rs} (1-s^2)^{\frac{l}{2}} ds \asymp \frac{e^r}{r^{\frac{l}{2}+1}},$$

pour  $r > 0$  assez grand.

Preuve. — Il suffit d'utiliser une méthode de pente raide. ■

PROPOSITION 3. — Soit  $v_{max}$  le vecteur unité de  $\exp^{-1}(C)$  qui maximise  $\langle b, \cdot \rangle$ . Alors :

$$\text{Vol}(KC(n)) \leq \text{const} \cdot n^{\text{rg}(X)} e^{-(b|v_{max})n}, \quad \forall n > 0.$$

Plus précisément, si  $b \in C$ , alors :

$$\text{Vol}(KC(n)) \asymp n^{\frac{\text{rg}(X)-1}{2}} e^{-\|b\|n}, \quad \forall n > 0.$$

En particulier :

$$\text{Vol}(\text{Cour}(n)) \asymp n^{\frac{\text{rg}(X)-1}{2}} e^{-\|b\|n}, \quad \forall n > 0.$$

Preuve. — Posons  $\exp(\mathcal{C}(n)) = C(n)$  et  $\exp C = C$

D'après ce qui a été dit au § 5.1, il suffit d'estimer  $\int_{C(n)} e^{(b|H)} dH$ .

Utilisons des coordonnées sphériques :

$$H_1 = \frac{H}{\|H\|}, \quad r = \|H\|.$$

$$\text{On a: } \int_{\mathcal{C}(n)} e^{\langle b|H \rangle} dH = \int_{n-1}^n \int_{\mathcal{C}} e^{\langle b|H_1 \rangle r} dH_1 r^{\text{rg}(X)-1} dr \leq \text{const} \cdot n^{\text{rg}(X)-1} e^{\langle b|v_{\max} \rangle n}$$

(rappelons que  $\text{rg}(X)$  est le rang de  $X$ ).

Supposons que  $b \in \mathcal{C}$  (i.e.  $\langle b|v_{\max} \rangle = \|b\|$ ), et effectuons le changement de variables :

$$s = \langle b|H_1 \rangle, \quad H'_1 = H_1 - sb_1$$

Pour  $s = \langle b|H_1 \rangle \approx 1$ ,  $\pi_s := \{H_1 \in \mathcal{C} \mid s = \langle b|H_1 \rangle\}$  est une sphère de dimension  $\text{rg}(X) - 2$  et de rayon  $\sqrt{1 - s^2}$ , contenue dans l'orthogonal de  $b$ .

$$\int_{\mathcal{C}} e^{\langle b|H_1 \rangle r} dH_1 = \int_{\langle b|v_{\min} \rangle}^1 e^{\|b\|rs} \left( \int_{\pi_s} dH'_1 \right) \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}} \asymp \int_{1-h^2}^1 e^{\|b\|rs} (1 - s^2)^{\frac{\text{rg}(X)-3}{2}} ds,$$

ceci pour  $r$  assez grand, et d'après le lemme technique on a :

$$\int_{1-h^2}^1 e^{\|b\|rs} (1 - s^2)^{\frac{\text{rg}(X)-3}{2}} ds \asymp \frac{e^{\|b\|r}}{r^{\frac{\text{rg}(X)-1}{2}}}.$$

Ainsi,

$$\int_{\mathcal{C}(n)} e^{\langle b|H \rangle} dH \asymp n^{\frac{\text{rg}(X)-1}{2}} e^{\|b\|n}, \quad \text{si } b \in \mathcal{C}.$$

■

**PROPOSITION 4.**

$$\begin{aligned} |\Gamma x_0 \cap \text{Cour}(n)| &\asymp \text{Vol}(\text{Cour}(n)) \\ |\Gamma x_0 \cap \text{KC}(n)_{x_0}| &\asymp \text{Vol}(\text{KC}(n)_{x_0}), \quad \forall n > 0. \end{aligned}$$

La preuve de cette proposition nécessite quelques résultats préliminaires.

**DÉFINITION.** — Une suite de sous-ensembles  $\{C(n)\}_{n>0}$  de  $X$  est dite bien arrondie si :  $\forall \varepsilon > 0, \exists U$  un voisinage de l'identité  $e$  dans  $G$  tel que :

$$\frac{\text{Vol}(U\partial C(n))}{\text{Vol}(C(n))} \leq \varepsilon, \quad \forall n > 0,$$

où  $\partial C(n)$  désigne le bord de  $C(n)$  dans  $X$ . Il est important de signaler que  $U$  ne dépend pas de  $n$ .

On veut utiliser un cas particulier d'un théorème de comptage de A.Eskin et C.McMullen ([Esk]).

**PROPOSITION i).** — Soit  $X = G/K$  un espace riemannien symétrique de type non-compact et  $\Gamma$  un réseau irréductible dans  $G$ .

Si  $\{C(n)\}_{n>0}$  est une suite bien arrondie de sous-ensembles avec  $\text{Vol}(C(n)) \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ , alors

$$\text{Vol}(C(n)) \asymp |\Gamma x_0 \cap C(n)|.$$

Dans la suite, nous appliquerons ce résultat aux suites  $\{KC(n)x_0\}_{n>0}$  et  $\{\text{Cour}(n)\}_{n>0}$ .

Notons  $\partial^\varepsilon(KC(n)x_0)$  un  $\varepsilon$ -voisinage du bord de  $KC(n)x_0$  défini de la manière suivante :

$$\partial^\varepsilon(KC(n)x_0) = KT_1x_0 \cup KT_2x_0 \cup KT_3x_0,$$

où  $T_i = \exp \mathfrak{T}_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) avec

$$\mathfrak{T}_1 = \{H \in \mathfrak{a}^+ \mid \langle H|u \rangle \geq \|H\| \cos \psi - \varepsilon/2, \quad n - \varepsilon/2 \leq \|H\| \leq n + \varepsilon/2\},$$

$$\mathfrak{T}_2 = \{H \in \mathfrak{a}^+ \mid \langle H|u \rangle \geq \|H\| \cos \psi - \varepsilon/2, \quad n - 1 - \varepsilon/2 \leq \|H\| \leq n - 1 + \varepsilon/2\},$$

$$\mathfrak{T}_3 = \{H \in \mathfrak{a}^+ \mid |\langle H|u \rangle - \|H\| \cos \psi| \leq \varepsilon/2, \quad n - 1 - \varepsilon/2 \leq \|H\| \leq n + \varepsilon/2\}.$$

LEMME ii). —  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists U$  un voisinage de  $e$  dans  $G$  tel que :

$$U\partial(KC(n)x_0) \subset \partial^\varepsilon(KC(n)x_0).$$

*Preuve du lemme ii).* — Soit  $\exp(rH_1)x_0 \in \partial C(n)$ .

Comme  $\mathfrak{a}$  est  $\text{Ad}(K)$ -invariant, on a  $k \exp(rH_1)x_0 \in \partial(KC(n)x_0)$ ,  $\forall k \in K$ .

Soit  $g \in G$  qu'on écrit  $g = kam$  dans la décomposition  $G = KAN$ .

Le lemme découle alors du fait suivant ([BGS], appendix 5) :

$$\begin{aligned} d(x_0, ax_0) &\geq d(k \exp(rH_1)x_0, kam \exp(rH_1)x_0) = d(\exp(rH_1)x_0, am \exp(rH_1)x_0) \\ &\rightarrow d(x_0, ax_0) \quad \text{quand } r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

■

LEMME iii).

$$\text{Vol}(KT_i x_0) \asymp \varepsilon \text{Vol}(KC(n)x_0), \quad (i = 1, 2)$$

$$\text{Vol}(KT_3 x_0) \leq \text{const} \cdot \varepsilon \text{Vol}(KC(n)x_0).$$

*Preuve du lemme iii).* — On obtient ces estimations de volumes en effectuant des calculs similaires à ceux donnés dans la preuve de la proposition 3. ■

*Preuve de la proposition 4).* — Par les lemmes ii) et iii), on a :

$\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists U$  un voisinage de  $e$  dans  $G$  tel que :

$$\frac{\text{Vol}(U\partial(KC(n)x_0))}{\text{Vol}(KC(n)x_0)} \leq \frac{\text{Vol}(\partial^\varepsilon(KC(n)x_0))}{n \text{Vol}(KC(n)x_0)} \leq \text{const} \cdot \varepsilon.$$

Ainsi, les suites  $\{KC(n)x_0\}_{n>0}$  et  $\{\text{Cour}(n)\}_{n>0}$  sont bien arrondies. On peut donc leur appliquer la proposition i). ■

## 6. Références

- [A] P. ALBUQUERQUE. — *Patterson-Sullivan Measures in Higher Rank Symmetric Spaces*, Ph.D. Thesis, Univ. of Geneva, Switzerland, (in preparation).
- [Bi] P. BILLINGSLEY. — *Probability and Measure*, New-York, J.Wiley, 1979.
- [BGS] W. BALLMANN, M.GROMOV and V.SCHROEDER. — *Manifolds of Non-positive Curvature*, Birkhäuser, Basel, 1985.
- [Bou] M. BOURDON. — *Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(-1)-espace*, Thèse, Université de Paris-Sud, 1993.
- [Bu] M. BURGER et S.MOZES. — *CAT(-1)-spaces, Divergence Groups and their Commensurators*, J. Amer. Math. Soc. 9, n° 1 (1996), 57-94.
- [C] M. COORNAERT. — *Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov*, Pacific J. of Math. 159, n° 2 (1993), 241-270.
- [Esk] A. ESKIN and C.Mc-MULLEN. — *Mixing, Counting and Equidistribution in Lie Groups*, Duke Math J. 71 (1993), 181-209.
- [Fu] H. FURSTENBERG. — *Boundary Theory and Stochastic Processes*, Proc. Symp. Pure Math. 26 (1973), 193-230.
- [Hel1] S. HELGASON. — *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, New-York, Academic Press, 1978.
- [Hel2] S. HELGASON. — *Groups and Geometric Analysis*, Orlando, Academic Press, 1984.
- [Mos] G.D. MOSTOW. — *Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces*, Annals of Math. Studies, n° 78, Princeton Univ. Press, Princeton N.J., 1973.
- [Moo] C.C. MOORE. — *Ergodicity of Flows on Homogeneous Spaces*, Amer. J. Math. 88 (1966), 154-178.
- [Ni] P.J. NICHOLLS. — *The Ergodic Theory of Discrete Groups*, London Math. Soc. Lect. Notes 143, Cambridge University Press, (1989).
- [Pa] S.J. PATTERSON. — *The Limit Set of a Fuchsian Group*, Acta Math. 136 (1976), 241-273.
- [Su] D. SULLIVAN. — *The Density at Infinity of a Discrete Group of Hyperbolic Motions*, Publ. Math. I.H.E.S. 50 (1979), 171-202.

Paul ALBUQUERQUE  
 Section de Mathématiques  
 Université de Genève  
 2-4 r.du Lièvre  
 Case postale 240  
 1211 Genève 24 (Suisse)  
 e-mail: albuquer@sc2a.unige.ch