Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

NALINI ANANTHARAMAN

Dénombrement de géodésiques fermées, sous contraintes homologiques

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 19 (2000-2001), p. 53-65
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_2000-2001__19__53_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **19** (2001) 53–65

DÉNOMBREMENT DE GÉODÉSIQUES FERMÉES, SOUS CONTRAINTES HOMOLOGIQUES

Nalini ANANTHARAMAN

Le but de cet exposé est de donner quelques résultats de dénombrement des géodésiques fermées d'une variété à courbure négative, avec des contraintes sur la classe d'homologie. Nos premiers résultats viennent s'ajouter au paysage mis en place par Margulis, Pollicott, Sunada,... On tombera ensuite sur des situations que les méthodes usuelles ne savent pas décrire, et l'on proposera quelques manières de les explorer.

Nous considérerons une variété riemannienne V, compacte, à courbure sectionnelle strictement négative (dans la deuxième partie de l'exposé, nous devrons nous restreindre au cas d'une surface). On notera Γ l'ensemble des géodésiques fermées, orientées – il est connu que cet ensemble est dénombrable. Il s'identifie naturellement à l'ensemble des orbites fermées du flot géodésique (ϕ_t), agissant sur le fibré unitaire tangent SV. A chaque élément γ de Γ, on associe sa longueur $l(\gamma)$ et sa classe d'homologie $[\gamma]$ qui est un élément de $H_1(V,\mathbb{Z})$. Pour simplifier, nous ne considérerons que la partie *sans torsion* de la classe d'homologie, qui est un élément à coordonnées entières de l'espace vectoriel $H_1(V,\mathbb{R})$. Nous essaierons alors de décrire la répartition des géodésiques fermées γ en fonction des deux quantités $l(\gamma)$ et $[\gamma]$. Nous serons plus particulièrement intéressés par le *"nombre de rotation"* $\frac{[\gamma]}{l(\gamma)} \in H_1(V,\mathbb{R})$.

L'étude de ce genre de question a été initiée, en courbure négative constante, par Huber, Phillips et Sarnak ([H], [PS]), qui l'ont abordée à partir de la formule des traces de Selberg : celle-ci donne une relation entre les longueurs et classes d'homologie des géodésiques d'une part, le spectre du laplacien d'autre part. En courbure variable, Margulis a généralisé leurs résultats par une approche complètement différente, qui consiste à exploiter la *propriété d'Anosov* du flot géodésique pour décrire la répartition de ses orbites fermées :

THÉORÈME 0.1 ([Mr]). — *Soit $\pi(T)$ le nombre de géodésiques fermées de longueur inférieure à T. Alors il existe un réel $h > 0$ tel que $\pi(T) \sim \frac{e^{hT}}{hT}$ quand $T \longrightarrow +\infty$.*

Classification math. : 37D40, 37D35, 37J50, 37E45.

Le réel h est le taux de croissance exponentiel du volume des boules dans le revêtement universel de V; il s'identifie aussi à l'entropie topologique du flot géodésique.

Ce résultat de dénombrement va de paire avec la propriété d'*équidistribution* suivante : pour $\gamma \in \Gamma$, notons m_γ la mesure de probabilité (ϕ_t)-invariante correspondante sur SV.

THÉORÈME 0.2. — *La famille de mesures de probabilité ϕ-invariantes*

$$\frac{1}{\pi(T)} \sum_{\gamma\in\Gamma, l(\gamma)\leqslant T} m_\gamma$$

converge faiblement, quand $T \longrightarrow \infty$, vers une mesure m : c'est la mesure d'entropie maximale pour le flot géodésique sur SV, c'est-à-dire l'unique mesure invariante d'entropie métrique $h_\phi(m) = h$.

Cette convergence constitue en fait la définition de Bowen de la mesure m. La preuve de Margulis consiste à démontrer la propriété de *mélange* pour la mesure m, puis d'en déduire l'asymptotique du Théorème 1 par des arguments géométriques. Plus tard, Ruelle en a donné une preuve par l'analyse fonctionnelle, qui rappelle par de nombreux traits celles de Huber, Phillips et Sarnak en courbure constante : grâce aux constructions de Bowen et Ratner, on commence par coder les géodésiques par des suites à valeurs dans un alphabet fini, qui forment une chaîne de Markov topologique Σ. On introduit alors un opérateur *de transfert* L sur $C(\Sigma)$, dont le spectre reflète de manière naturelle celui du système dynamique $(SV,(\phi_t),m)$. En particulier, la propriété de mélange de m équivaut à l'existence d'un trou spectral pour L (restreint aux fonctions suffisamment régulières), comme pour le laplacien. D'autre part, il existe une relation, semblable à la formule des traces, qui exprime $tr\,log(Id-L)$ en fonction des longueurs des géodésiques fermées : les deux preuves deviennent alors similaires.

On appelle souvent cette démarche introduite par Ruelle le *formalisme thermodynamique* pour le flot géodésique. En effet, en thermodynamique statistique, des espaces comme Σ apparaissent comme l'espace des configurations d'un gaz sur un réseau; la quantité $h_\phi(m)$ du théorème 2 est l'entropie de l' "état m", et la mesure m d'entropie maximale représente donc un état d'équilibre thermodynamique du système : on l'appelle *mesure d'équilibre*.

Pollicott, Katsuda, Sunada ont mis cette démarche à profit pour obtenir les résultats suivants :

THÉORÈME 0.3 (Katsuda-Sunada [KS], Pollicott [P], Sharp [S],...). — *Étant donnés $\alpha \in H_1(V,\mathbb{Z})$ et $T > 0$, soit $\pi(\alpha,T)$ le nombre de géodésiques fermées γ de longueur $l(\gamma) \leqslant T$ et telles que $[\gamma] = \alpha$. Alors*

$$\pi(\alpha,T) \sim C\frac{e^{hT}}{hT^{d/2+1}}$$

où d est le rang $H_1(V,\mathbb{Z})$, et C une constante ne dépendant pas de α.

Ainsi, l'asymptotique principale du nombre de géodésiques fermées représentant la classe d'homologie α ne dépend pas de α. De plus, les géodésiques de classe α restent "équidistribuées" comme les géodésiques générales :

THÉORÈME 0.4. — *La famille de mesures de probabilité ϕ-invariantes*

$$\frac{1}{\pi(\alpha,T)} \sum_{\gamma\in\Gamma, l(\gamma)\leqslant T[\gamma]=\alpha} m_\gamma$$

converge faiblement, quand $T \longrightarrow \infty$ vers la même mesure m qu'au Théorème 2.

Citons pour terminer cette introduction un théorème de grandes déviations dû à Kifer, qui permet d'évaluer dans un contexte plus général le taux de croissance exponentielle du nombre de géodésiques fermées, sous des contraintes dépendant continûment de la mesure m_γ. On notera $\mathcal{M}_1(SV)$ l'ensemble des mesures de probabilité ϕ-invariantes sur SV; il est muni de la topologie faible.

THÉORÈME 0.5 (Kifer [K]). — *(1) Pour tout compact $K \subset \mathcal{M}_1(SV)$,*

$$\limsup \frac{1}{T} \log \sharp\{\gamma \in \Gamma, l(\gamma) \leqslant T, m_\gamma \in K\} \leqslant \sup_{\nu\in K} h_\phi(\nu)$$

(où $h_\phi(\nu)$ désigne l'entropie métrique de la mesure ν.)

(2) Pour tout ouvert $G \subset \mathcal{M}_1(SV)$,

$$\liminf \frac{1}{T} \log \sharp\{\gamma \in \Gamma, l(\gamma) \leqslant T, m_\gamma \in G\} \geqslant \sup_{\nu\in G} h_\phi(\nu).$$

♣

Énonçons à présent le problème de dénombrement qui nous intéressera par la suite. À chaque géodésique fermée γ, on associera la quantité $\frac{[\gamma]}{l(\gamma)}$, qui est un élément de $H_1(V,\mathbb{R})$ pouvant s'interpréter comme l'enroulement moyen par unité de temps de la courbe γ. Il dépend non seulement de la topologie, mais aussi du paramétrage de la courbe. On peut l'appeler "nombre de rotation", par analogie avec la notion classique de nombre de rotation d'une orbite d'un homéomorphisme du tore. Cette notion coïncide avec celle de *cycle asymptotique* $[\mu]$ d'une mesure μ sur le fibré tangent TV, invariante par (ϕ_t). Rappelons que $[\mu]$ est défini par dualité, par l'identité

$$\langle[\omega],[\mu]\rangle = \int_{SV} \langle\omega,X\rangle\, d\mu(X)$$

pour toute classe de cohomologie $[\omega]$, représentée par une 1-forme fermée ω.

Le nombre de rotation d'une géodésique fermée est donc le cycle asymptotique de la mesure de probabilité correspondante sur SV.

Nous allons fixer $\xi \in H_1(V,\mathbb{R})$ et étudier les géodésiques fermées dont le nombre de rotation est proche de ξ – cette question a été étudiée pour la première fois par Lalley, par analogie avec certaines questions de théorie du renouvellement. Notons que cela n'a d'intérêt que si ξ appartient au compact convexe :

$$C = \{[\nu], \nu \in \mathcal{M}_1(SV)\} \subset H_1(V,\mathbb{R})$$

(on peut montrer que C est la boule unité de la *norme stable* sur $H_1(V,\mathbb{R})$.)

Pour $\xi \in C$ et $\alpha \in H_1(V,\mathbb{R})$, définissons

$$\pi(\xi,\alpha,T) = \sharp\{\gamma \in \Gamma, T-1 \leqslant l(\gamma) \leqslant T, [\gamma] = [T\xi] + \alpha\}$$

où $[T\xi]$ est un élément de $H_1(V,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^d$ proche de $T\xi \in H_1(V,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^d$ (la "partie entière").

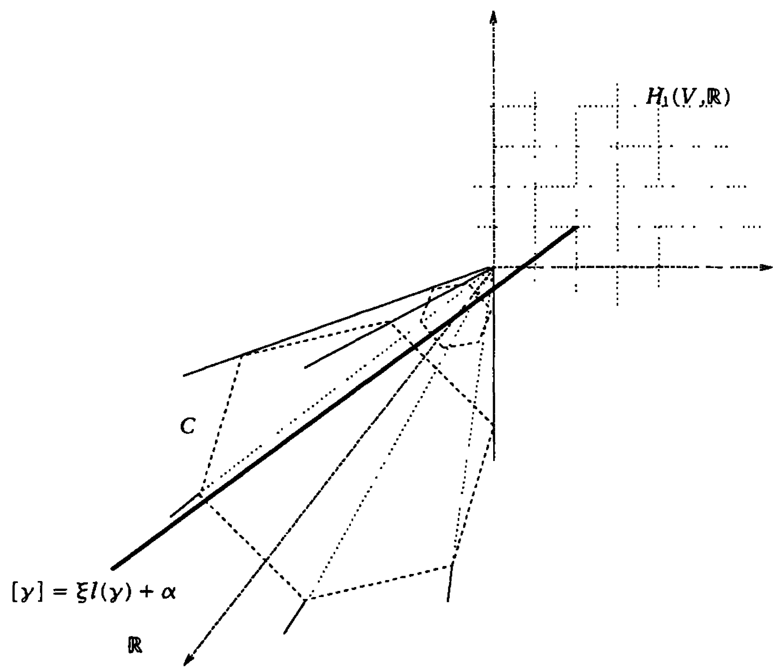

FIG. 1:

Dans $\mathbb{R}^+ \times H_1(V,\mathbb{R})$, les points de la forme $(l(\gamma),[\gamma])$ appartiennent tous à un cône de section C, et nous nous intéressons donc à ceux qui sont proches de la droite $[\gamma] = \xi l(\gamma) + \alpha$ (Figure 1). Le cas $\xi = 0$ correspond bien sûr au Théorème 3.

Le Théorème 5 permet d'obtenir l'estimation suivante :

$$\limsup \frac{1}{T} \log \pi(\xi,\alpha,T) \leqslant H(\xi) := \sup\{h_\phi(\nu), [\nu] = \xi\}. \tag{1}$$

Cette fonction $H : H_1(V,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ sera appelée entropie, et sa transformée de Legendre

$$\begin{array}{rcl} P : H^1(V,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [\omega] & \longmapsto & \sup\limits_{\nu \in \mathcal{M}_1(SV)} h(\nu) + \langle [\omega],[\nu] \rangle \end{array}$$

sera appelée pression.

Babillot et Ledrappier on montré que C était d'intérieur non vide, et que H est analytique, strictement positive, strictement concave sur $\overset{\circ}{C}$. De plus, pour tout ξ appartenant au voisinage ouvert de l'origine $\overset{\circ}{C}$, l'estimation (1) peut-être précisée :

THÉORÈME 0.6 (Lalley [L], Babillot-Ledrappier [BL]). — *Soit* $\xi \in \overset{\circ}{C}$.

(1) On a l'équivalent suivant, quand $T \longrightarrow +\infty$*:*

$$\pi(\xi,\alpha; T) \sim c_0(\xi) \frac{e^{TH(\xi^T)+dH(\xi^T).\alpha}}{T^{d/2+1}}$$

où

- $\xi^T = \frac{[T\xi]}{T} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \xi$
- $dH(\xi^T)$ *est la différentielle de* H *en* ξ^T*, donc un élément du dual* $H^1(V,\mathbb{R})$.
- $d = \dim H_1(V,\mathbb{R})$
- $c_0(\xi)$ *est une constante, dépendant analytiquement de* $\xi \in \overset{\circ}{C}$.

(2) (Equidistribution) *La famille de mesures*

$$\frac{1}{\pi(\xi,\alpha; T)} \sum_{T-1 \leqslant l(\gamma) \leqslant T, [\gamma]=[T\xi]+\alpha} m_\gamma$$

converge faiblement vers une mesure m^ξ*, qui est l'*unique *mesure invariante de probabilité telle que* $[m^\xi] = \xi$ *et* $H(\xi) = h(m^\xi)$*. C'est une mesure d'équilibre : elle minimise l'énergie libre*

$$dH(\xi).[\nu] - h_\phi(\nu) \tag{2}$$

On peut conclure du Théorème 6 que, pour un nombre de rotation fixé à l'*intérieur* de C, le nombre de géodésiques continue à croître de manière exponentielle, mais avec un taux de croissance $H(\xi)$ inférieur à $H(0) = h$.

La mesure m^ξ est de support plein : supp $m^\xi = SV$. Cela implique que les géodésiques fermées de cycle asymptotique proche de ξ sont denses dans SV, pour $\xi \in \overset{\circ}{C}$.

De plus, dans le cas où V est une surface, le Théorème 6 peut être amélioré :

THÉORÈME 0.7. — *([A1]) Si V est de dimension 2, il existe des fonctions analytiques $c_1, c_2, c_3, \cdots$ sur $\overset{\circ}{C} \times H_1(V,\mathbb{R})$ telles que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,*

$$\pi(\xi,\alpha; T) = \frac{e^{TH(\xi^T) - dH(\xi^T).\alpha}}{T^{d/2+1}}\left(c_0(\xi^T) + \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k(\xi^T,\alpha)}{T^k} + O(T^{-(N+1)})\right).$$

Les c_k peuvent, en principe être calculés explicitement en termes des fonctions H et P, de leurs dérivées et de leurs transformées de Fourier – dans la pratique les calculs deviennent vite inextricables. Kotani a remarqué que $c_1(0,\alpha) = -\|\alpha\|^2$ pour une certaine norme euclidienne sur $H_1(V,\mathbb{R})$, ce qui montre qu'il y a plus de géodésiques fermées de classe d'homologie 0.

La preuve de ces résultats suit le schéma introduit par Ruelle, Parry et Pollicott ([PP]) : formalisme thermodynamique et étude du spectre d'opérateurs de transfert, via la propriété de mélange de la mesure m^ξ. Pour le Théorème 7, nous utilisons l'étude fine du spectre réalisée par Dolgopyat ([D]).

♠

Le reste de cet exposé est consacré au cas où $\xi \in \partial C$. Dans ce cas, l'utilisation habituelle du formalisme thermodynamique ne donne pas de résultat : en effet, la classe de cohomologie $-dH(\xi) \in H^1(V,\mathbb{R})$, qui représente le potentiel auquel est soumis le système dans l'énergie libre (2), est envoyée à l'infini quand ξ tend vers le bord de C – c'est-à-dire que $\| dH(\xi) \| \longrightarrow +\infty$, sans plus d'information sur le comportement précis de $dH(\xi)$. On ne sait alors contrôler ni l'entropie $H(\xi)$, ni la pression $P(-dH(\xi))$, ce qui empêche toute approche analytique. Dans le cadre physique, une situation analogue serait de faire tendre la température d'un système vers 0, et d'étudier le comportement limite; dans un cadre général on ne sait tirer que les conclusions les plus immédiates, mais par exemple on ignore si la mesure d'équilibre aura une limite. L'étude de la convergence de la mesure d'équilibre m^ξ, quand ξ tend vers le bord de C, semble intéressante et difficile.

Nous allons voir que l'on peut cependant estimer la quantité $\pi(\xi,\alpha; T)$, pour $\xi \in \partial C$, et quand V est une surface orientable. Les arguments de dénombrement utilisés sont de nature purement combinatoires, et de ce fait nous n'obtenons que des inégalités assez grossières.

Décrivons le bord de C : comme tout convexe, C possède des hyperplans d'appui en chaque point du bord, et nous appellerons *face* l'intersection de C avec un tel hyperplan. Toute face peut donc s'écrire sous la forme $F_\omega = \{\xi \in C, \langle[\omega],[\xi]\rangle = 1\}$ où ω est une 1-forme convenablement normalisée ($[\omega]$ est de norme stable 1 dans $H^1(V,\mathbb{R})$).

On peut associer à la face M_ω deux sous-ensembles compacts de SV, invariants par (ϕ_t) : l'ensemble de Mather $\tilde{M}_\omega$ et l'ensemble d'Aubry $\tilde{A}_\omega$. Le premier est la réunion des supports des mesures correspondant à F_ω :

$$\tilde{M}_\omega = \overline{\cup_{[\nu]\in F_\omega} \operatorname{supp} \nu}$$

Le second est l'ensemble des vecteurs qui sont points d'accumulation d'une suite γ_n d'orbites fermées, vérifiant

$$l(\gamma_n) \longrightarrow +\infty$$

et

$$\langle[\omega],[\gamma_n]\rangle - l(\gamma_n) \longrightarrow 0$$

Pour dénombrer les géodésiques fermées de nombres de rotation proches du bord de C, nous allons d'abord décrire la topologie des ensembles de Mather et d'Aubry.

On peut voir que le bord de C est caractérisé par le principe variationnel suivant : le cycle asymptotique d'une mesure de probabilité ν sur SV, ϕ-invariante, appartient à ∂C si et seulement si ν réalise :

$$\inf\{\int_{TV} \frac{\| v \|^2}{2} d\mu(v), \mu \in \mathcal{M}_1(TV), [\mu] = [\nu]\}$$

Cela signifie que ν minimise l'action (l'intégrale de l'énergie cinétique) parmi les mesures de même cycle asymptotique. Pour une géodésique fermée γ, dire que $[\gamma]/l(\gamma) \in \partial C$ signifie, de manière équivalente, que γ est un représentant minimisant la longueur dans sa classe d'homologie

De même, la face F_ω peut être caractérisée de la sorte : $[\nu] \in F_\omega$ ssi ν réalise

$$\inf\{\int_{TV} \left(\frac{\| v \|^2}{2} - \omega(v)\right) d\mu(v), \mu \in \mathcal{M}_1(TV)\}$$

De telles mesures, minimisant l'action, sont décrites par le théorème de Mather (valable pour des flots hamiltoniens plus généraux) :

THÉORÈME 0.8 (Mather [Mt]). — *Pour toute* 1*-forme fermée* ω, *la projection* $p : SV \to V$, *restreinte à* $\tilde{M}_\omega$, *est injective. Son inverse (défini de* $M_\omega = p(\tilde{M}_\omega)$ *dans* $\tilde{M}_\omega$*) est lipschitzien. En particulier,* p *est un homéomorphisme de* $\tilde{M}_\omega$ *sur* M_ω.

Cela implique que le support d'une mesure, dont le cycle asymptotique est dans ∂C, est une union de géodésiques qui ne présentent pas entre elles d'intersections transverses. Ceci est assez intuitif : par exemple, une géodésique fermée avec une auto-intersection ne peut pas minimiser la longueur dans sa classe d'homologie. Le Théorème 8 implique aussi que le bord de C est assez compliqué : si V est par exemple une surface de genre g, chaque face de C est incluse dans un sous-espace isotrope de $H_1(V,\mathbb{R})$ pour la forme d'intersection. Elle est donc de dimension inférieure à $g - 1 = \dim H_1(V,R)/2 - 1$. Massart a en fait montré qu'il passe une face de dimension $g - 1$ en tout point du bord colinéaire à un point entier ([Ms]).

Désormais, V sera une surface orientable. Le Théorème 8 dit alors que toute mesure minimisant l'action est une *lamination mesurée*. Ceci implique que les mesures minimisant l'action ont une entropie nulle : en effet, leur support est réunion d'un nombre fini de composantes connexes, qui sont soit des géodésiques fermées, soit des suspensions d'un échange d'intervalle minimal (une telle composante s'appelle un *minimal exceptionnel*). Par conséquent, la fonction H s'annule sur le bord de C, et il faut s'attendre à une croissance sous-exponentielle pour $\pi(\xi,\alpha; T)$.

Nous allons montrer que la croissance est polynomiale, dans un certain nombre de cas. Soit désormais F_ω une face contenant ξ.

THÉORÈME 0.9 ([A2]). — *(1) Si M_ω ne contient que des géodésiques fermées, alors il existe un polynôme $Q_{\xi,\alpha}$ tel que, pour tout T,*

$$\pi(\xi,\alpha; T) \leqslant Q_{\xi,\alpha}(T)$$

(2) La projection sur V de l'ensemble des géodésiques de nombre de rotation ξ :

$$\cup_T\{\gamma \in \Gamma, T-1 \leqslant l(\gamma) \leqslant T, [\gamma] = [T\xi] + \alpha\}$$

est nulle part dense dans V (son adhérence est même de mesure de Lebesgue 0). La dimension de Hausdorff de cet ensemble est 1, s'il est non vide.

REMARQUE 0.10. — *Dans le cas d'une surface, dire que M_ω ne contient que des géodésiques fermées signifie exactement que la face F_ω contient dans son intérieur relatif un point colinéaire à un point entier de $H_1(V,\mathbb{R})$.*

Nous allons étendre ce résultat en comptant à présent tous les points qui sont "proches" de la face F_ω. Définissons

$$\pi(\omega,A; T) = \sharp\{\gamma \in \Gamma, l(\gamma) \leqslant T, \langle[\omega],[\gamma]\rangle \geqslant T - A\}$$

ce qui correspond aux points $(l(\gamma),[\gamma])$ situés au voisinage d'un hyperplan d'appui, dans la zone grisée sur la Figure 2.

L'ensemble d'Aubry contient l'ensemble de Mather (ce n'est pas une conséquence directe de la définition, mais résulte des travaux de Mañe ([Mn], ou des travaux plus récents de Fathi : voir plus loin). En fait, l'ensemble d'Aubry est lui aussi une lamination, union de M_ω et d'un nombre fini de géodésiques qui spiralent vers des composantes de M_ω.

THÉORÈME 0.11. — *(1) Si $\tilde{A}_\omega = \tilde{M}_\omega$, et si M_ω ne contient que des géodésiques fermées, alors, pour tout $A \geqslant 0$, $\pi(\omega,A; T)$ croît au plus polynomialement en T.*

(2) Si l'ensemble d'Aubry $\tilde{A}_\omega$ et l'ensemble de Mather $\tilde{M}_\omega$ sont distincts, alors, pour tout $A > 0$ il existe une suite $T_n \longrightarrow \infty$ telle que $\pi(\omega,A; T_n)$ croisse plus vite que tout polynôme en T_n.

Cela laisse ouvertes la question de la croissance de $\pi(\omega,A; T)$, quand $\tilde{A}_\omega = \tilde{M}_\omega$ contient un mininal exceptionnel, ainsi que la question de la croissance de $\pi(\xi,\alpha,T)$ quand tous les ensembles de Mather correspondant aux faces contenant ξ contiennent

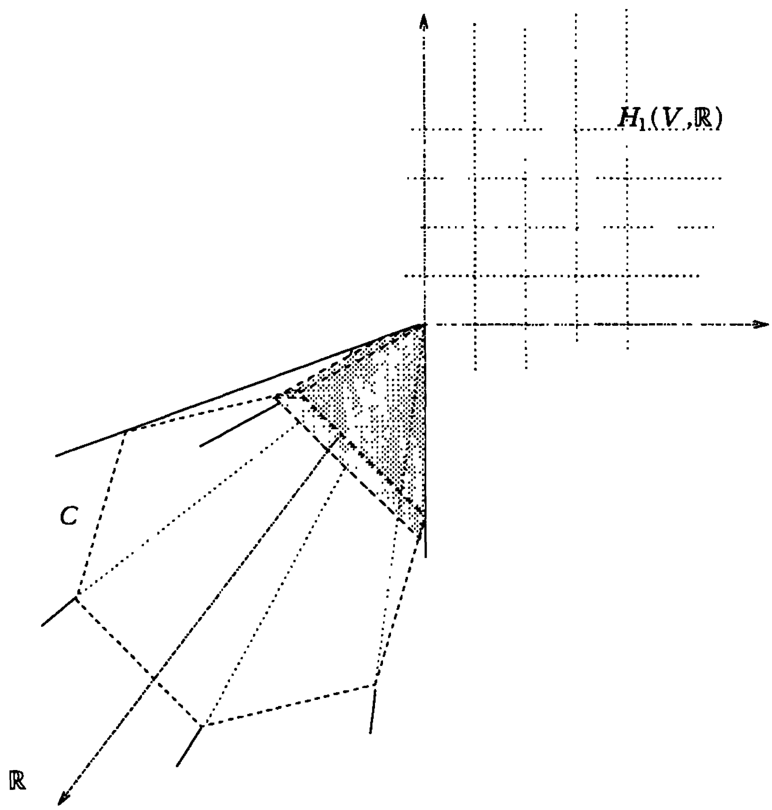

FIG. 2:

un minimal exceptionnel. La difficulté est la suivante : pour montrer les Théorèmes 9 et 11, nous montrons en fait que les géodésiques considérées passent "la plupart du temps" à proximité de l'ensemble d'Aubry. La borne sur la croissance est alors obtenue uniquement en évaluant la croissance d'un voisinage de l'ensemble d'Aubry. Si celui-ci contient un minimal exceptionnel, on a le phénomène suivant :

Théorème 0.12. — *Supposons que l'ensemble de Mather contienne un minimal exceptionnel. Alors, pour tout voisinage* $\tilde{W}$ *de* $\tilde{M}_\omega$, *et pour tout* $\varepsilon \in (0,1)$, *il existe un réel* $h(\tilde{W},\varepsilon) > 0$ *tel que, pour* T *assez grand,*

$$\sharp \{\gamma \subset \tilde{W}, l(\gamma) \leqslant T, \langle [\omega],[\gamma]\rangle \geqslant (1-\varepsilon)T\} \geqslant e^{h(\tilde{W},\varepsilon)T}.$$

En particulier, tout voisinage d'un minimal exceptionnel a une croissance exponentielle.

Bien sûr, les géodésiques considérées dans le Théorème 12 ne satisfont pas toutes aux contraintes qui nous intéressaient initialement, en 9 et 10. Nous savons d'ailleurs que le taux de croissance que nous recherchons est sous-exponentiel. Mais le Théorème 11 explique que nous ayons du mal à généraliser la technique combinatoire utilisée en 9 et 10, quand il existe un minimal exceptionnel.

◆

La preuve des théorèmes 9 et 10 se fait en deux étapes :

(1) Décrire les géodésiques telles que $| \langle [\omega],[\gamma]\rangle - l(\gamma) | \leqslant A$, pour $A \geqslant 0$ donné (c'est-à-dire les géodésiques correspondant à des points $(l(\gamma),[\gamma])$ situés dans la zone grisée sur la Figure 2). Pour cela, on utilise des méthodes d'analyse fonctionnelle qui ne sont pas sans rappeler l'usage du laplacien ou du semi-groupe de la chaleur dans le cas $\xi \in \mathring{C}$ (voir plus loin). On montre alors que de telles géodésiques ne peuvent passer qu'un temps borné "loin" de l'ensemble d'Aubry.

(2) Dénombrer les géodésiques : ce sont des arguments combinatoires, spécifiques à la dimension 2, que nous ne détaillerons pas ici.

Pour (1), nous utilisons les propriétés de deux semi-groupes d'opérateurs non-linéaires : les semi-groupes de Lax-Oleinik (ou Hopf-Lax) $(T_t^-)_{t\geqslant 0}$ et $(T_t^+)_{t\geqslant 0}$, qui donnent les solutions de viscosité lipschitzienne de l'équation de Hamilton-Jacobi pour le Lagrangien $\frac{\|v\|^2}{2} \mp \omega(v)$.

Ces semi-groupes agissent sur l'espace des fonctions continues $C^0(V,\mathbb{R})$:

$$T_t^- u(x) = \inf_{\gamma\in C^1([-t,0],V),\gamma(0)=x} \{u(\gamma(0)) + \int_{-t}^{0} \left(\frac{\| \dot\gamma_v \|^2}{2} - \omega(\dot\gamma_v)\right) dv\}$$

et

$$T_t^+ u(x) = \sup_{\gamma\in C^1([0,t],V),\gamma(0)=x} \{u(\gamma(t)) - \int_{0}^{t} \left(\frac{\| \dot\gamma_v \|^2}{2} - \omega(\dot\gamma_v)\right) dv\}$$

Ces semi-groupes possèdent des "points fixes" qui permettent de décrire de manière remarquable l'ensemble d'Aubry :

THÉORÈME 0.13 (Fathi, [F]). — *(1) Il existe une constante $c(\omega)$ et des fonctions lipschitziennes u_-, u_+ sur V telles que*

$$T_t^- u_- = u_- - c(\omega)t$$

et

$$T_t^+ u_+ = u_+ + c(\omega)t$$

pour tout $t \geqslant 0$. L'existence de telles fonctions caractérise la constante $c(\omega)$ (qui vaut ici le carré de la norme stable de $[\omega]$).

(2) Pour tout "point fixe" u_- de (T_t^-), il existe un unique point fixe u_+ de (T_t^+) tel que u_- et u_+ coïncident sur M_ω. Les points fixes u_- et u_+ sont alors dits conjugués.

(3) L'ensemble d'Aubry est exactement

$$\{x \in V, u_-(x) = u_+(x), \text{pour toute paire } (u_-, u_+) \text{ de points fixes conjugués}\}$$

En particulier, il contient M_ω.

(4) Les semi-groupes de Lax-Oleinik convergent en temps infini : pour tout $u \in C^0(V, \mathbb{R})$, pour tout x,

$$T_t^- u(x) - c(\omega)t \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \inf_{y \in V} \{u(y) + h(y,x)\}$$

où

$$h(y,x) = \sup_{(u_-,u_+) \text{ conjugués}} u_-(x) - u_+(y)$$

La convergence est uniforme en x.

Sur une surface compacte, la description donnée par Fathi permet de dire que A_ω est une lamination orientée, union de M_ω et d'un nombre fini de géodésiques qui spiralent vers des composantes connexes de M_ω.

La caractérisation (3) de l'ensemble d'Aubry, et le phénomène de convergence (4), nous permettent ensuite de montrer ce qui suit : étant donnés $A > 0$ et un voisinage W de l'ensemble d'Aubry, il existe M tel que toute géodésique γ vérifiant $|\langle [\omega],[\gamma]\rangle - l(\gamma)| \leqslant A$ doit passer un temps inférieur à M hors de W. En d'autres termes, une telle géodésique passe presque tout son temps au voisinage de A_ω. C'est alors qu'interviennent les propriétés topologiques de A_ω, et que commence le dénombrement combinatoire...

Pour terminer, soulignons une relation remarquable entre les semi-groupes de Lax-Oleinik et le semi-groupe de la chaleur.

Si ω est une 1-forme harmonique, on considère le "laplacien twisté" :

$$\Delta_\omega f = \Delta f + 2\langle \omega, df\rangle + \| \omega \|^2 f \qquad (3)$$

et le semi-groupe linéaire correspondant $P^t_\omega = \exp \frac{t\Delta_\omega}{2}$. En courbure négative constante, les propriétés spectrales de ces opérateurs peuvent être utilisées, via une variante de la formule des traces, pour estimer $\pi(\xi,\alpha,T)$ quand $\xi \in \overset{\circ}{C}$.

Ces propriétés sont les suivantes, si ω est à valeurs réelles :

THÉORÈME 0.14. — *(1) Il existe un réel $\Lambda(\omega)$ et une mesure de probabilité μ_ω sur V telle que $P^{t*}_\omega \mu_\omega = e^{t\Lambda(\omega)}\mu_\omega$ pour tout $t \geqslant 0$. Il existe une fonction positive h_ω telle que $P^t_\omega h_\omega = e^{t\Lambda(\omega)} h_\omega$ pour tout $t \geqslant 0$. Ces propriétés caractérisent le réel $\Lambda(\omega)$.*

(2) La mesure μ_ω et la fonction h_ω sont uniques, à normalisation près. De plus, $d\mu_\omega = h_{-\omega}dx$. La valeur propre $e^{\Lambda(\omega)}$ est la valeur propre de plus grand module de (P^t_ω), elle est simple et isolée dans le spectre.

(3) La mesure $d\nu_\omega = h_\omega h_{-\omega}dx$ est (à normalisation près) la mesure de probabilité stationnaire pour le "mouvement Brownien twisté", c-à-d la diffusion définie par le semi-groupe Markovien de transition :

$$Q^t f(x) = e^{-t\Lambda(\omega)} h_\omega(x)^{-1} P^t_\omega(h_\omega f)(x)$$

(4) Pour toute fonction continue f sur V, on a la convergence :

$$e^{-t\Lambda(\omega)} P^t_\omega f(x) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} h_\omega(x) \int_V f h_{-\omega}(y)dy$$

uniformément en x.

On remarquera les analogies avec le Théorème 13 concernant les semi-groupes de Lax-Oleinik. Elles ne sont pas étonnantes si l'on connaît le passage à la limite suivant : pour tout $t \geqslant 0$, pour toute fonction continue u, pour tout $x \in V$,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \log (P^{t/\lambda}_{\lambda\omega}.e^{\lambda u})(x) = T^+_t u(x)$$

et

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \log (P^{t/\lambda}_{-\lambda\omega}.e^{-\lambda u})(x) = -T^-_t u(x).$$

Cela se démontre par la méthode de viscosité évanescente (ici c'est $1/\lambda$ qui joue le rôle de la viscosité.)

On peut alors se demander comment relier précisément les Théorèmes 13 et 14 grâce à ce passage à la limite ... On peut par exemple voir que

$$\frac{\Lambda(\lambda\omega)}{\lambda^2} \underset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} c(\omega).$$

On peut aussi montrer que toute valeur d'adhérence faible de la famille de mesures $(\nu_\omega)_{\lambda>0}$ du Théorème 14 est portée par l'ensemble de Mather M_ω; mais on ne sait pas conclure à l'existence d'une limite. Enfin, il serait intéressant de relier, par ce passage à la limite, la croissance de $\pi(\xi,\alpha; T)$ pour $\xi \in \overset{\circ}{C}$ et pour $\xi \in \partial C$. Par exemple, les exposants optimaux de croissance polynomiale (dans le cadre du Théorème 9) auraient, peut-être, une interprétation analytique, reliée aux semi-groupes mentionnés plus hauts...

Bibliographie

[A1] N. Anantharaman, *Precise counting results for closed orbits of Anosov flows*, Ann. Sci. E.N.S. (4) **33**, 33–56, 2000, no. 1.

[A2] N. Anantharaman *Counting geodesics which are optimal in homology*, à paraître dans Erg. Th. Dyn. Syst.

[BL] M. Babillot, F. Ledrappier, *Lalley's theorem on periodic orbits of hyperbolic flows*, Erg. Th. Dyn. Syst. **18**, 17–39, 1998.

[D] D. Dolgopyat, *On decay of correlations in Anosov flows*, Ann. of Math (2) **147**, 357–390, 1998, no. 2.

[F] A. Fathi, *Théorème KAM faible et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **324** (1997), 1043-1046; *Solutions KAM faible et barrières de Peierls*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **325** (1997), 649-652; *Orbites hétéroclines et ensemble de Peierls*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **326** (1998), no. 10, 1213–1216; *Sur la convergence du semi-groupe de Lax-Oleinik* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **327** (1998), no. 3, 267–270.

[H] H. Huber, *Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen (I)*, Math. Ann. **138**, 1–26, 1959, *(II)*, Math. Ann. **142**, 385–398, 1961, *(III)*, Math. Ann. **143**, 463–464, 1961.

[KS] A. Katsuda, T. Sunada, *Closed orbits in homology classes*, Publ. Math. IHES **71**, 5–32, 1990.

[K] Y. Kifer, *Large deviations, averaging and periodic orbits of dynamical systems*, Comm. Math. Phys. **162**, 33–46, 1994.

[L] S. Lalley, *Closed geodesics in homology classes on surfaces of variable negative curvature*, Duke Math. J. **58**, 795–821, 1989.

[Mn] R. Mane, *Generic properties and problems of minimizing measures of Lagrangian systems*, Nonlinearity **9** (2), 273–310, 1996.

[Mr] G. Margulis, *Applications of ergodic theory for the investigation of manifolds of negative curvature*, Funct. Anal. Applic. **3**, 335–336, 1969.

[Ms] D. Massart, *Stable norms of surfaces: local structure of the unit ball at rational directions*, Geom. Funct. Anal. **7**, 996–1010, 1997.

[Mt] J. Mather, *Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems*, Math. Z. **207**, 169–207, 1991.

[PP] W. Parry, M. Pollicott, *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolics dynamics*, Astérisque **187-188**, 1990.

[PS] R. Phillips, P. Sarnak, *Geodesics in homology classes*, Duke Math J. **55**, 287–297, 1987.

[P] M. Pollicott, *Homology and closed geodesics in a compact negatively curved surface*, Amer. J. Math. **113**, 379–385, 1991.

[S] R. Sharp, *Closed orbits in homology classes for Anosov flows*, Erg. Th. and Dyn. Syst. **13**, 387–408, 1993.

Nalini ANANTHARAMAN
U.M.P.A. (C.N.R.S. U.M.R. 5669)
E.N.S. Lyon
46, allée d'Italie
69364 LYON Cedex 07 (France)