Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

PHILIPPE DELANOË

Réarrangements des difféomorphismes sur une variété compacte mesurée

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 22 (2003-2004), p. 53-57
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_2003-2004__22__53_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **22** (2004) 53–57

RÉARRANGEMENTS DES DIFFÉOMORPHISMES SUR UNE VARIÉTÉ COMPACTE MESURÉE

Philippe DELANOË

Résumé

Réarranger un difféomorphisme, sur une variété compacte mesurée, c'est lui en associer un autre qui transporte la mesure de la même façon que lui, ceci de manière lisse quand le difféomorphisme varie, et normalisée par le choix de l'identité quand le difféomorphisme préserve la mesure. Moser fut le premier à construire un tel réarrangement en 1965. Récemment McCann, adaptant une approche inaugurée sur l'espace euclidien par Brenier autour de 1990, en a obtenu un autre dans le contexte du transport de mesures (non lisses!) en introduisant un critère de minimisation associé à une métrique riemannienne : ce réarrangement s'écrit comme l'exponentielle d'un champ de gradients, et l'existence d'un potentiel régulier de ce champ est ouverte. Nous présentons ici une piste pour établir cette régularité.

Ce texte est basé sur un article paru [10] auquel on pourra se reporter pour une présentation détaillée. Cela m'a permis de le rédiger, en français, un peu comme une narration, sans le corset d'aucun sectionnement, et dans l'idée que le lecteur s'initierait au sujet en s'exerçant à suivre le texte, stylo à la main, le traduisant en formules au fur et à mesure.

En présence d'une mesure fixée μ, les difféomorphismes $\mathrm{Diff}(M)$ d'une variété compacte M (tous les objets sont ici lisses) se trouvent partitionnés (de deux manières) en classes d'équivalence, orbites de l'action (à droite ou à gauche) des difféomorphismes qui préservent μ (dont on notera $\mathrm{Diff}_\mu(M)$ le sous-ensemble). En particulier, $\mathrm{Diff}_\mu(M)$ n'est autre que la classe de l'identité I pour cette action ; et les éléments d'une même classe transportent tous la mesure μ (en avant, pour les classes à droite, en arrière, pour celles à gauche) sur la *même mesure-image* – c'est pourquoi deux éléments d'une même classe sont dits *réarrangements* l'un de l'autre, un terme classique (voir *e.g.* le dernier chapitre de [14]) récemment repris par Brenier [1, 2].

Par *règle de réarrangement* à droite (resp. à gauche) sur (M, μ), on entendra une façon lisse de choisir un représentant dans chaque classe à droite (resp. à gauche), avec

2000 Mathematics Subject Classification : 58D05, 53C21, 35A05, 35B65.

la convention normalisatrice de prendre I pour $\mathrm{Diff}_\mu(M)$. Autrement dit, il s'agit d'une *tranche* globale passant par I de l'action à droite (resp. à gauche) de $\mathrm{Diff}_\mu(M)$, en bijection avec l'espace quotient de $\mathrm{Diff}(M)$ par cette action.

L'*existence* d'une règle de réarrangement sur (M, μ) a d'abord été démontrée par Moser [18]. Celui-ci cherchait à prouver que l'ensemble $\mathscr{L}^\mu$ des mesures sur M de même masse totale que μ coincide avec son sous-ensemble

$$\mathscr{L}_\mu = \{\varphi^* \mu, \varphi \in \mathrm{Diff}(M)\} \subset \mathscr{L}^\mu .$$

À cet effet, Moser construit un inverse à droite $\mathscr{M}$ vérifiant $\mathscr{M}(\mu)$ =I, pour l'application naturelle $\varphi \in \mathrm{Diff}(M) \to \varphi^* \mu \in \mathscr{L}^\mu$. Dès lors, l'application :

$$\varphi \in \mathrm{Diff}(M) \to \mathscr{M}(\varphi^* \mu) \in \mathrm{Diff}(M)$$

est une règle de réarrangement (à gauche) sur (M, μ). Techniquement, l'idée de Moser pour sa construction est la suivante. Il relie μ et $\varphi^* \mu$ par un segment μ_t, faisant donc de même pour relier 1 à la densité relative (dérivée de Radon-Nikodym, une fonction sur M) :

$$\rho = \frac{d(\varphi^* \mu)}{d\mu}$$

(soit $\rho_t = t\rho + (1-t)$), et comme on évolue à masse totale constante, il cherche un champ de vecteurs dépendant du temps V tel que l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_t V) = 0$$

soit satisfaite (div désignant l'opérateur divergence relatif à la mesure μ). Cette équation assure que le flot ψ_t de V transporte à tout instant μ_t en arrière sur μ. Il ne reste plus qu'à poser $\mathscr{M} = (\psi_1)^{-1}$. Pour produire le champ V, Moser utilise une métrique riemannienne auxiliaire et la résolution (classique) d'une équation linéaire elliptique (voir [18]).

À ce stade de l'exposé, arrêtons-nous pour une synthèse concernant le quotient de $\mathrm{Diff}(M)$ par l'action (ici à gauche) de $\mathrm{Diff}_\mu(M)$. Complétant l'observation sur la mesure-image par laquelle on a introduit plus haut le terme "réarrangement", le résultat de Moser montre que ce quotient est difféomorphe (*via* une bijection qui définit ici sa topologie) avec $\mathscr{L}^\mu$. On en déduit que $\mathrm{Diff}(M)$ est difféomorphe au produit $\mathrm{Diff}_\mu(M) \times \mathscr{L}^\mu$ et qu'en particulier, $\mathrm{Diff}(M)$ peut donc *se rétracter* sur $\mathrm{Diff}_\mu(M)$ [13]. Explicitement, l'élément $\xi \in \mathrm{Diff}_\mu(M)$ qu'on associera ici à $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ est celui qui permet d'atteindre φ dans sa classe à gauche à partir du réarrangé de Moser $\mathscr{M}(\varphi^* \mu)$. Ainsi, tout difféomorphisme φ donné s'écrit de manière unique :

$$\varphi = \xi \circ \mathscr{M}(\varphi^* \mu) , \ \ \xi \in \mathrm{Diff}_\mu(M) ;$$

on dit qu'on a défini une *factorisation* des difféomorphismes (ici, à gauche, celle d'Ebin–Marsden [13] associée au réarrangement de Moser [18]). Au niveau infinitésimal, tout champ de vecteur V sur M se décompose de manière unique (et orthogonale), en présence de la mesure μ et d'une métrique riemannienne auxiliaire g, en la somme d'un champ dont le flot préserve μ (partie tourbillonaire du champ) et d'un champ de *gradient* (relativement à g). C'est la décomposition de Helmholtz, classique (ancêtre archétypique – issu de l'hydrodynamique plane – de celle, plus fine, de G. de Rham sur les formes différentielles). On voit qu'une factorisation, comme celle d'Ebin–Marsden, est une sorte *d'intégration* de la décomposition de Helmholtz. On montre dans [10] qu'elle lui est bien tangente en l'identité.

Suivant Brenier et McCann [1, 2, 16], on est conduit à une autre approche pour construire une règle de réarrangement, en présence d'emblée d'une métrique riemannienne g sur la variété mesurée (M, μ). Reprenant une idée de Monge [17], le difféomorphisme réarrangé vérifiera un *critère* : il minimisera dans sa classe un coût. En l'occurence, pour les classes à droites, ce coût sera celui de [16] :

$$\mathscr{C}_R(\varphi) = \int_M \left\{d_g[m, \varphi(m)]\right\}^2 d\mu \ ,$$

et pour les classes à gauche, il sera :

$$\mathscr{C}_L(\varphi) = \int_M \left\{d_g[m, \varphi(m)]\right\}^2 d(\varphi^* \mu) \ ,$$

où $d_g(.,.)$ désigne la distance sur M associée à la métrique g. On a alors la caractérisation suivante du minimiseur *i.e.* du difféomorphisme qui, dans une classe donnée, transporte optimalement μ vers la mesure-image de la classe, une caractérisation (résultant de [16]) qui, intuitivement, va cumuler deux effets réduisant le coût, celui du plus court chemin (par l'exponentielle) et celui de l'orthogonalité aux champs tourbillonaires (par le gradient, *cf. supra*, Helmholtz), à savoir :

THÉORÈME 1 (McCann). — *Il existe au plus un difféomorphisme minimiseur du coût dans chaque classe. En outre, si la classe contient une* ***application-gradient****, celle-ci minimise le coût.*

Par *application-gradient* on entend une application de la forme :

$$m \in M \mapsto \exp_m(\mathrm{grad}_m u) \in M$$

où la fonction réelle u est appelée *potentiel* de l'application ; cette dernière sera notée $G(u)$. Arrêtons-nous pour signaler que l'unicité du minimiseur démontrée dans [16] porte plus généralement sur les applications mesurables transportant μ sur la même mesure-image (image directe). Pour des difféomorphismes, on propose dans [10, appendice] une autre démonstration de l'unicité, basée sur un nouveau principe de comparaison des solutions d'EDP elliptiques du second ordre sur M.

Au-delà du théorème précédent, McCann [16] prouve *l'existence* d'une application-gradient dans chaque classe à droite, mais la régularité de son potentiel n'est pas connue ; celui-ci est lipchitzien tout au plus, car doué d'une certaine propriété de convexité. En fait, on montre dans [7] que, $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ étant donné, le potentiel-solution u vérifie l'équation (de type Monge–Ampère) :

$$G(u)_* d\mu = \varphi_* d\mu \ , \tag{1}$$

dont il est solution au sens de Brenier (plus faible qu'au sens d'Aleksandrov ou de viscosité [5]). Qu'en est-il de la lissité *a posteriori* de la solution construite par McCann ? Caffarelli a pu la démontrer dans l'espace euclidien [4, 5] et ses techniques s'étendent au cas riemannien compact *plat* (voir [6, 3]), mais le cas non-plat est ouvert. Pour pallier au manque d'une théorie à données régulières satisfaisante, nous proposons d'étudier directement par la méthode de continuité l'existence d'une solution lisse de l'équation (1), et aussi bien de l'équation correspondante pour les classes à gauche, à savoir :

$$G(u)^* d\mu = \varphi^* d\mu \ . \tag{2}$$

Avec cette approche, on trouvera démontrés dans [10] les deux résultats partiels d'existence suivants :

THÉORÈME 2. — *Une métrique riemannienne g étant donnée sur la variété compacte mesurée (M, μ), il existe un **voisinage** (saturé) de $\mathit{Diff}_\mu(M)$ dans $\mathit{Diff}(M)$ dont chaque classe contient une application-gradient.*

THÉORÈME 3. — *Supposons que M admette une métrique **plate** g_0. Pour toute classe de $\mathit{Diff}(M)$ (relative à la mesure μ), il existe un **voisinage** de g_0 dont toute métrique admet une application-gradient dans la classe.*

Le théorème 2 suit, par inversion locale, d'un résultat d'isomorphisme *linéaire* classique. Le théorème 3, outre un argument de fonction implicite, contient bien sûr un résultat global (celui pour $g = g_0$, plate) ; ce dernier découle (en cas particulier) d'estimations obtenues vers 1980 dans [8, 9].

Conjecturons pour conclure un résultat, actuellement hors de portée et qu'il faudra sans doute affiner (rôle du *signe* de la courbure) :

*Supposons que la variété M admette une métrique riemannienne **analytique réelle** g_0. Il existe un C^2-voisinage (saturé) de $\mathit{Diff}_\mu(M)$ dans $\mathit{Diff}(M)$, de taille contrôlée, dont chaque classe contient une application-gradient. Ce résultat reste vérifié avec toute métrique g assez proche de g_0 (au sens C^4).*

L'hypothèse "g_0 est analytique", remplie par toute métrique d'Einstein (en atlas harmonique) [12], et en particulier sur les *surfaces* (n=2), intervient pour garantir (voir [15, chap. II-6]) la régularité le long d'une géodésique générique $t \mapsto c(t)$ des *directions propres* de l'endomorphisme de Jacobi (symétrique relativement à la métrique) c'est-à-dire de l'endomorphisme $V \mapsto R_0[V, \dot{c}(t)]\dot{c}(t)$ où R_0 est le tenseur de Riemann-Christoffel de g_0. Cette propriété parait essentielle quand on aborde de près l'estimation *a priori* des dérivées secondes du potentiel.

Remerciements. Merci à Gérard Besson et Yann Brenier de m'avoir, chacun à sa façon, encouragé dans ce travail, toujours en cours (voir déja [11]).

Références

[1] Y. BRENIER, Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs, *C. R. Acad. Sci. Paris* série I **305** (1987) 805–808.

[2] Y. BRENIER, Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions, *Comm. Pure Appl. Math.* **44** (1991) 375–417.

[3] Y. BRENIER & G. LOEPER, A geometric approximation to the Euler equations : the Vlasov–Monge–Ampère equation, preprint Nice (2003).

[4] L. CAFFARELLI, Some regularity properties of the solutions of the Monge–Ampère equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **44** (1991) 965–969.

[5] L. CAFFARELLI, The regularity of mappings with a convex potential, *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1992) 99–104.

[6] D. CORDERO-ERAUSQUIN, Sur le transport de mesures périodiques, *C. R. Acad. Sci. Paris* série I **329** (1999) 199–202.

[7] D. CORDERO-ERAUSQUIN, R. MCCANN & M. SCHMUCKENSCHLÄER, A riemannian interpolation inequality à la Borell, Brascamp and Lieb, *Inventiones math.* **146** (2001) 219–257.

[8] PH. DELANOË, Equations du type Monge–Ampère sur les variétés riemanniennes compactes, I, *J. Funct. Anal.* **40** (1981) 358–386.

[9] PH. DELANOË, Equations du type Monge–Ampère sur les variétés riemanniennes compactes, II, *J. Funct. Anal.* **41** (1981) 341–353.

[10] PH. DELANOË, Gradient rearrangement for diffeomorphisms of a compact manifold, *Diff. Geom. Appl.* **20** (2004) 145–165.

[11] PH. DELANOË & GRÉGOIRE LOEPER, Gradient estimates for potentials of invertible gradient-mappings on the sphere, (preprint Nice, Avril 2004).

[12] D. DETURCK & J. KAZDAN, Some regularity theorems in riemannian geometry, *Ann. Sc. Ecole Norm. Sup,* 4ème série **14 :3** (1981) 249-260.

[13] D. EBIN & J. MARSDEN, Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid, *Ann. of Math.* **92** (1970) 102–163.

[14] G. HARDY, J.E. LITTLEWOOD & G. PÓLYA, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, second edition (1952).

[15] T. KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer (corrected from second edit. 1980), Classics in Math. (1995).

[16] R. MCCANN, Polar factorization of maps on riemannian manifolds, *Geom. Funct. Anal.* **11** (2001) 589–608.

[17] G. MONGE, Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris* (1781).

[18] J. MOSER, On the volume elements on a manifold, *Trans. Amer. Math. Soc.* **120** (1965) 286–294.

Philippe DELANOË
Université de Nice – Sophia Antipolis
Laboratoire J.-A. Dieudonné (UMR 6621 du CNRS)
Parc Valrose 06108 NICE Cedex 2

courriel : delphi@math.unice.fr