Société mathématique de France

Comptes rendus des séances de l'année 1924

Séances du Cinquantenaire

TABLE DES MATIÈRES

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

DE L'ANNÉE 1924.

II. Séances ordinaires.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

DE L'ANNÉE 1924.

II. Séances ordinaires.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
11, rue Pierre Curie, PARIS 5e

UNION INTERNATIONALE MATHÉMATIQUE

L'Union internationale mathématique a tenu son Assemblée générale au Congrès international de Mathématiques de Toronto (Ontario, Canada), *le* 15 *août* 1924. *A la suite de cette Assemblée, le Bureau de l'Union Internationale Mathématique est composé comme il suit :*

Présidents d'Honneur :

MM. Lamb, Emile Picard, Volterra, de la Vallée-Poussin, Dickson, Fields et Mittag Leffler.

Président :

M. Pincherle.

Vice-Présidents :

MM. Appell, Young, Bliss, Fehr et Phragmen.

Secrétaire général :

M. Koenigs.

Trésorier :

M. Demoulin.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

SÉANCE DU 9 JANVIER 1924.

PRÉSIDENCE DE M. APPELL.

La Société réunie en Assemblée générale procède au renouvellement de son Bureau et d'une partie du Conseil.

Élection :

Est élu à l'unanimité membre de la Société : M. Julius Wolff, professeur d'Analyse mathématique à l'Université d'Utrecht, présenté par MM. Borel et Arnaud Denjoy.

Communications :

M. Appell communique à l'Assemblée, de la part de M. Montel, une lettre de la Commission de Rapprochement universitaire pour la reconstitution du fonds français de la Bibliothèque de l'Université de Tokyo. L'Assemblée décide de faire don à cette bibliothèque de l'un des exemplaires restant disponibles de la collection complète du *Bulletin* de la Société.

M. le Professeur Charles Jordan, de Budapest : *Sur une question de statistique mathématique.*

La plupart des formules donnant les fréquences ou les probabilités de certaines grandeurs statistiques ont comme point de départ la formule de Laplace

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \sqrt{2npq} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}, \qquad \text{où} \qquad t = \frac{x-np}{\sqrt{2npq}},$$

si x croît indéfiniment avec n de manière que t ait une valeur finie.

Laplace en a déduit des formules approchées donnant la valeur approximative de la probabilité dP pour que l'écart entre une grandeur x et la moyenne arithmétique des observations soit compris entre ξ et $\xi + d\xi$, pour les grandes valeurs de n.

La plus simple de ces formules est la suivante :

$$dP = \frac{d}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2\xi^2}\, d\xi = y\, d\xi. \tag{2}$$

La constante k est tirée de la formule

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2\, dP = \frac{1}{2k^2}. \tag{3}$$

La courbe $y = k e^{-k^2\xi^2}$ est la courbe de fréquence; elle est symétrique. Un grand nombre de phénomènes statistiques suivent cette loi. En poussant l'approximation plus loin, Laplace a obtenu d'autres formules utilisables pour certaines fréquences asymétriques [1]. Plus tard d'autres ont donné de telles formules, entre autres Edgeworth [2], Pearson [3], Kapteyn [4], Bruns [5], Bortkievic et Charlier [6].

Si la probabilité d'un écart entre ξ et $\xi + d\xi$ est donnée par $f(\xi)\, d\xi$, c'est-à-dire si la courbe de fréquence est $y = f(\xi)$, on peut exprimer la fonction y très simplement par des formules dérivant de (1) en la développant suivant les fonctions

$$\varphi_\nu(\xi) = H_\nu(\xi)\, e^{-k_2\xi^2} \qquad (\nu = 0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

où l'on entend par $H_\nu(\xi)$ le polynome d'Hermite de degré ν défini par l'égalité

$$H_\nu(\xi) = e^{k^2\xi^2} \frac{d^\nu}{d\xi^\nu} [e^{-k^2\xi^2}] \quad (^7)$$

Ces polynomes possèdent les propriétés suivantes connues :

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_\nu H_\mu\, e^{-k^2\xi^2}\, d\xi = 0 \qquad (\text{si } \nu \neq \mu),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_\nu^2\, e^{-k^2\xi^2}\, d\xi = 2^\nu \nu!\, \sqrt{\pi}\, k^{2\nu-1}.$$

---

(1) *Théorie analytique des probabilités,* 5e édition, p. 280 et suiv.

(2) *Statistical Journal*, July 1902.

(3) K. Pearson, *On skew variation* [*Philosophical Transactions*, (A), vol. 186, p. 343-414, et vol. 197, p. 442-459].

(4) Kapteyn, *Skew Frequency Curves*, Groningen, 1903. — Kapteyn and Van Uven, *Skew Frequency Curves,* Groningen, 1916.

(5) Bruns, *Wahrscheinlichkeitsrechnung u. Kollektivmasslehre*, p. 108 et suiv.

(6) Charlier, *Grundzüge d. Mathematischen Statistik,* Lund, 1920, p. 67 et suiv.

(7) $H_0 = 1$, $H_1 = -2k^2\xi$, $H_2 = 4k^4\xi^2 - 2k^2$, $H_3 = -8k^6\xi^3 + 12k^4\xi$.

Il en résulte que les coefficients a_n du développement

$$y = e^{-k^2\xi^2}(a_0 H_0 + a_1 H_1 + a_2 H_2 + \ldots)$$

sont donnés par

$$a_\nu = \frac{1}{2^\nu \nu! \sqrt{\pi}\, k^{2\nu-1}} \int_{-\infty}^{\infty} H_\nu y \, d\xi.$$

Remarquons que si ξ représente l'écart entre une grandeur x et la moyenne arithmétique des grandeurs observées, on trouve $a_1 = 0$; de plus, si l'on choisit k conformément à (3), on a aussi $a_2 = 0$.

Désignons par y_n la valeur approchée de y obtenue en s'arrêtant au terme en H_n :

$$y_n = e^{-k^2\xi^2}(a_0 H_0 + a_3 H_3 + \ldots + a_n H_n);$$

$n = 0$ donne la formule symétrique de Laplace; $n = 3$ les formules asymétriques de Laplace et de Edgeworth (ces deux étant au fond identiques); $n = 4$ donne la formule de Charlier.

Dans sa *Kollektivmasslehre*, Bruns a déterminé les conditions dans lesquelles y_n tend pour toutes les valeurs de ξ vers y, si n augmente indéfiniment.

Ce développement est utilisé très souvent; on a même construit des tables donnant les valeurs de $H_\nu e^{-k^2\xi^2}$ pour toutes les valeurs de ξ. (Il faut introduire $t = k\xi$.)

Toutefois ce développement a de nombreux inconvénients :

1° Pour toutes les valeurs de ξ, on a $y \geqq 0$ et $\int_{-\infty}^{\xi} y d\xi < 1$; par contre, y_n peut dépasser ces limites pour certaines valeurs de ξ.

2° En mesurant, comme on le fait habituellement, l'approximation obtenue par la substitution de y_n à y au moyen de l'écart quadratique E_n,

$$E_n = \int_{-\infty}^{\infty} (y - y_n)^2 \, d\xi, \tag{4}$$

cette grandeur ne peut s'exprimer d'une manière simple à l'aide des coefficients a_ν.

3° Les coefficients a_ν n'ont pas la propriété de rendre minimum l'expression (4), c'est-à-dire on pourrait trouver d'autres coefficients donnant une approximation plus grande.

4° Il peut arriver que $E_{n+1} > E_n$, c'est-à-dire que l'approximation obtenue à l'aide de $n + 1$ termes est moins bonne que celle obtenue à l'aide de n termes. Ainsi, par exemple, la formule de Laplace (a_3) donne très souvent de meilleurs résultats que celle de Charlier (a_4).

5° Le coefficient a_ν dépend des moments $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_\nu$ ou

$$\mu_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^\nu y \, d\xi;$$

il ne résulte que les grandeurs s'écartant beaucoup de la moyenne arithmétique ont une influence très grande sur les moments de degré élevé et par suite aussi sur les coefficients correspondants, c'est ce qui a amené M. K. Pearson à rejeter ce développement et à chercher un nouveau point de départ.

On peut remédier à ces inconvénients (sauf au premier) en développant la grandeur y suivant des fonctions

$$\Psi_\nu(\xi) = H_\nu(\xi)\, e^{-\frac{1}{2}k^2\xi^2}$$

Ces fonctions ont, d'après ce qui précède, les propriétés suivantes :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_\nu \Psi_\mu \, d\xi = 0 \qquad (\text{si } \nu \neq \mu),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_\nu^2 \, d\xi = 2^\nu \nu! \sqrt{\pi}\, k^{2\nu-1};$$

et les coefficients du développement

$$y_n = e^{-\frac{1}{2}k^2\xi^2} (b_0 H_0 + b_1 H_1 + \ldots + b_n H_n) \tag{5}$$

sont donnés par la formule

$$b_\nu = \frac{1}{2^\nu \nu! \sqrt{\pi}\, k^{2\nu-1}} \int_{-\infty}^{\infty} H_\nu y \, e^{-\frac{1}{2}k^2\xi^2} \, d\xi.$$

1° On déterminera la constante k par la relation $\mu_2 = \frac{1}{k_2}$ pour que le développement des fréquences de la forme $f(\xi) = a\, e^{-b^2\xi^2}$ se réduise à un seul terme de (5).

2° L'écart quadratique est donné par l'expression suivante :

$$E_n = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \, d\xi - \sum_{\nu=0}^{n} 2^\nu \nu! \sqrt{\pi}\, k^{2\nu-1} b_\nu^2. \tag{6}$$

3° Les coefficients b_ν rendent cet écart minimum.

4° Il résulte de (6) que l'on a toujours $E_{n+1} < F_n$; on peut donc procéder au développement en déterminant les coefficients b_ν l'un après l'autre. On calculera à chaque pas l'erreur correspondante et l'on s'arrêtera dès que l'approximation prescrite sera atteinte.

5° Les grandeurs s'écartant beaucoup de la moyenne ont une influence beaucoup moins grande sur les coefficients b_ν que sur les coefficients a_ν dans le développement précédent.

Remarquons en outre que, dans le cas du présent développement $b_1 \neq 0$ et $b_2 \neq 0$ par suite, les deux premières puissances de y nous livrent quatre constantes au lieu des deux du premier développement; on en conclut qu'avec le second développement on aura moins besoin de recourir aux puissances supérieures de y qu'avec le premier, ce qui simplifie les calculs; et de plus c'est un avantage au point de vue de M. K. Pearson.

SÉANCE DU 23 JANVIER 1924.

PRÉSIDENCE DE M. P. LÉVY.

M. le Président fait connaître les décisions arrêtées dans le dernier Conseil pour le Cinquantenaire de la Société, dont la célébration a été fixée au 24 mai prochain; il informe d'autre part la Société que le Congrès international des Mathématiciens se tiendra à Toronto (Canada) du 11 au 16 août 1924.

Communications :

M. Kogbetliantz : *Sur la sommabilité absolue des séries par la méthode des moyennes arithmétiques* (¹).

La moyenne arithmétique $s_n^{(\delta)}$ d'ordre δ des sommes partielles d'une série $\sum_0^\infty u_n$ peut être envisagée comme $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de terme général $u_n^{(\delta)} = s_n^{(\delta)} - s_{n-1}^{(\delta)}$, ou bien

$$u_n^{(\delta)} = \delta \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{(n+\delta-2)\ldots(n+\delta-k)} \frac{k u_k}{(n+\delta)(n+\delta-1)} \qquad (u_0^{(\delta)} \equiv u_0)$$

et qui est dite la série transformée (C, δ) de la série $\sum_0^\infty u_n$.

(¹) *Comptes rendus*, séance du 14 janvier 1924, p. 295-298.

DÉFINITION : *La série Σu_n est dite absolument sommable par les moyennes arithmétiques d'ordre δ, bref sommable* $|C, \delta|$, *si sa transformée* (C, δ) *converge absolument.*

Exemple. — La série

$$1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^n + \ldots$$

sommable $(C, \delta > 0)$ n'est pas sommable $|C, 1|$, sa transformée $(C, 1)$ étant en effet

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1} + \ldots,$$

et elle n'est sommable $|C, \delta|$ que pour $\delta > 1$.

La sommabilité absolue entraîne la sommabilité du même ordre, mais non celle d'ordre inférieur comme le prouve la série suivante :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2} - \frac{2^k - 1}{k^2} + \overbrace{0 + 0 + \ldots + 0}^{2^k - 2 \text{ zéros}}.$$

Cette série n'est pas sommable $(C, \delta < 1)$ et elle l'est $|C, 1|$.

On démontre les théorèmes suivants :

I. *La sommabilité* $|C, \delta = \alpha|$ *entraîne celle* $|C, \delta > \alpha|$ *et la somme des modules des termes de la série transformée* (C, δ) *ne peut que décroître quand* δ *augmente.*

II. *La série dont la transformée* (C, δ) *est sommable* $|C, \gamma|$ *est elle-même sommable* $|C, \delta + \gamma|$.

III. *La transformée* (C, γ) *d'ordre* $\gamma < \delta$ *d'une série sommable* $|C, \delta|$ *est sommable* $|C, \delta - \gamma|$.

Il est bien connu que la série obtenue par la multiplication de deux séries sommables (C, α) et (C, β) respectivement est sommable $(C, \alpha + \beta + 1)$, mais si l'une des deux séries-facteurs est absolument sommable il est inutile d'ajouter l'unité à la somme $\alpha + \beta$ des ordres de sommabilité des séries-facteurs pour pouvoir sommer leur produit.

IV. *La série-produit des deux séries sommables* (C, δ) *et* $|C, \gamma|$ *respectivement est sommable* $(C, \delta + \gamma)$.

Pour $\delta = \gamma = 0$, ce théorème se réduit au théorème classique de

Mertens. Le cas particulier où $\gamma = 0$, mais $\delta \neq 0$, a été démontré par MM. Hardy et Littlewood [1].

Le théorème classique de Cauchy sur la multiplication de deux séries absolument convergentes se généralise ainsi :

V. *La série-produit de deux séries sommables* $|C, \delta|$ *et* $|C, \gamma|$ *respectivement est sommable* $|C, \delta + \gamma|$.

Le théorème de Cauchy s'en déduit pour $\delta = \gamma = 0$ puisque la sommabilité $|C, 0|$ n'est que la convergence absolue.

Le lien intime existant entre les séries sommables $|C, \delta|$ et les séries absolument convergentes se traduit par le théorème suivant :

VI. *La série obtenue en divisant le terme général* u_n *d'une série sommable* $|C, \delta|$ *par* n^γ, *où* $0 < \gamma \leqq \delta$, *est sommable* $|C, \delta - \gamma|$, *donc absolument convergente pour* $\gamma = \delta$.

M. Armand Cahen : *Sur des fractions continues nouvelles attachées à certaines opérations à une unité près par excès.*

SÉANCE DU 13 FÉVRIER 1924.

PRÉSIDENCE DE M. P. LÉVY.

Communications :

M. P. Lévy : *Sur une méthode permettant de ramener la démonstration du théorème de Fermat à une question d'Analyse.*

En posant

$$f(t) = a_1 \cos t + a_2 \cos 2^p t + \ldots + a_n \cos n^p t + \ldots,$$

$$I = \int_0^{2\pi} f^3(t)\, dt,$$

un calcul facile montre, si la série $f(t)$ est absolument et uniformément convergente, que

$$I = 3\pi \Sigma a_x a_y a_z,$$

---

(1) *Contributions, etc.* (*Proceedings of the London Matem. Society*, vol. XI, 1913, p. 461, th. 35).

Σ désignant une sommation étendue à tous les systèmes d'entiers positifs x, y, z tels que

$$x^p + y^p = z^p.$$

Dès lors, en supposant les a_n tous positifs, l'intégrale I est nulle si le théorème de Fermat est vrai pour l'exposant p, et positive dans le cas contraire. Le théorème de Fermat sera donc démontré pour un exposant p si l'on sait, au moins pour un choix particulier des coefficients a_n, démontrer que l'intégrale I n'est pas positive.

On remarque que, en prenant $a_n = \frac{1}{n^q}$, la formule qui donne I peut s'écrire sous une forme un peu différente. Il suffit de considérer les systèmes d'entiers x, y, z premiers entre eux; mais la somme ainsi obtenue doit être multipliée par $3\pi\zeta(3q)$ au lieu de 3π.

M. Noaillon : *Au sujet de sa Communication précédente sur les fonctions harmoniques entières :* le théorème qu'il avait présenté comme nouveau a déjà été démontré par M. Hadamard (voir les leçons de M. Borel sur les fonctions entières).

SÉANCE DU 27 FÉVRIER 1924.

(Séance réunie de la Société mathématique et du Séminaire de M. Hadamard.)

PRÉSIDENCE DE M. P. LÉVY.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société :

M. Linfield, docteur en philosophie de l'Université de Harvard, présenté par MM. Hadamard et Lebesgue.

M. Herbert Ory, licencié ès sciences de l'Université de Neuchâtel, présenté par MM. Du Pasquier et Crelier.

Communication :

M. Garnier : *Étude de l'équation* (VI) *de M. Painlevé autour de ses singularités transcendantes* (d'après son Mémoire de 1917 dans les *Annales de l'École Normale supérieure*).

SÉANCE DU 12 MARS 1924.

PRÉSIDENCE DE M. P. LÉVY.

SÉANCE DU 26 MARS 1924.

(Séance réunie de la Société mathématique et du Séminaire de M. Hadamard.)

PRÉSIDENCE DE M. P. LÉVY.

Communication :

M. Garnier : *Étude de l'équation* (VI) *de M. Painlevé autour de ses singularités transcendantes.*

SÉANCE DU 9 AVRIL 1924.

PRÉSIDENCE DE M. P. LÉVY.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société :

M. le Colonel d'Artillerie Perrier, présenté par MM. Got et Auric.

M. L.-M. Dey, de Rangoon (Birmanie), présenté comme sociétaire perpétuel par MM. P. Lévy et Hadamard.

Communication (1) :

M. Flamant : *Sur l'équation différentielle fonctionnelle*

$$f'(z) = a(z) f\left(\frac{z}{\sigma}\right) + b(z).$$

SÉANCE DU 14 MAI 1924.

PRÉSIDENCE DE M. P. LÉVY.

Élections.

Sont élus à l'unanimité membres de la Société :

M. Louis Breguet, ingénieur constructeur, président de la Chambre

---

(1) L'objet de cette Communication a été traité avec les développements qui s'y rapportent dans les *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XLVIII, 1924, p. 135-208.

syndicale des industries aéronautiques, présenté par MM. Jouguet et P. Lévy.

M. Tissier, ingénieur général du Génie maritime, directeur de l'Ecole d'Application, présenté par MM. Got et P. Lévy.

Communication :

M. Noaillon : *Sur une formule nouvelle relative aux fonctions entières de genre inférieur à* 2.

SÉANCE DU 28 MAI 1924.

PRÉSIDENCE DE M. P. LÉVY.

Élection :

Est élù à l'unanimité membre de la Société :

M. Monfraix, ingénieur principal d'Artillerie navale, présenté par MM. Got et Béghin.

Communications :

M. Hadamard : « La Note de M. F. Carlson : *Sur quelques suites de polynomes*, parue au n° 21 (19 mai 1924) des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (p. 1674), fait une allusion à une série de travaux de M. Ostrowski. L'indication bibliographique correspondante ayant dû être supprimée, pour des raisons de réglementation, je la rétablis ici : il s'agit de travaux parus dans les *Abhandlungen* du Séminaire de Hambourg en 1922 et dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin en 1923. »

M. Noaillon : *Relations entre les déterminants d'une matrice rectangulaire.*

SÉANCE DU 11 JUIN 1924.

PRÉSIDENCE DE M. P. LÉVY.

Communications :

M. Léon Pomey : I. *Sur un cas particulier du théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique.*

1. Nous allons démontrer certains cas particuliers du théorème de Legendre et Lejeune-Dirichlet par une méthode *élémentaire* basée sur les lemmes suivants :

LEMME I. — *Tout nombre* premier *qui est* diviseur primitif *de l'entier* $x^m \pm y^m$ (c'est-à-dire qui divise $x^m \pm y^m$ à l'exclusion de tout autre nombre binome $x^\mu \pm y^\mu$, où l'exposant μ est un *sous-multiple de* m) *est de la forme* $1 + 2hm$.

La démonstration de cette proposition est bien connue.

LEMME II. — *Étant donnés les deux entiers* $x - y$ *et*

$$\frac{x^\lambda - y^\lambda}{x - y} = P_\lambda(x, y),$$

leur p. g. c. d. $\Delta[x - y, P_\lambda]$ *est (en supposant les entiers* x *et* y *premiers entre eux) un diviseur de l'entier* λ.

En effet, y étant par hypothèse congru (mod Δ) à x, le nombre

$$P_\lambda = x^{m-1} + yx^{m-2} + \ldots + y^{m-1}$$

est congru à λx^{m-1}. Donc Δ divise bien λ, puisqu'il est premier avec x (sans quoi, divisant $x - y$, il diviserait aussi y, contrairement à l'hypothèse). C. Q. F. D.

2. THÉORÈME III. — *Il y a une infinité de nombres premiers; et même de nombres premiers de la forme* $1 + 2hn$, *n étant une puissance* $\mathbf{a}^\alpha$ *d'un nombre premier quelconque* $\mathbf{a}$.

En effet, ν étant un entier arbitraire, posons

$$n^\nu = m, \qquad \mu = \frac{m}{\mathbf{a}} \qquad \text{et} \qquad M = 2^m - 1.$$

Soit ϖ un facteur premier de l'entier $P_a(2^\mu, 1) = \frac{M}{2^\mu - 1}$. Comme le nombre $M_\mu = 2^\mu - 1$ n'est pas divisible par n, il est (lemme II) premier avec $P_a(2^\mu, 1)$ et par suite avec ϖ.

Donc ϖ est évidemment un *diviseur primitif* de $M = 2^m - 1$ et est (lemme I) de la forme $1 + 2kn^\nu$, où ν peut être choisi aussi grand qu'on veut. Il y a donc bien une infinité de nombres premiers ϖ de la forme $1 + 2hn$. C. Q. F. D.

THÉORÈME IV. — *Étant donné un entier* $n = a^\alpha b^\beta$, *qui ne contient que deux facteurs premiers* a *et* b $(2 \leqq a < b)$, *il y a une infinité* *de nombres premiers appartenant à la progression arithmétique* $1 + 2hn$.

Pour le démontrer, il est clair qu'il suffit (en vertu du lemme I) de prouver que l'entier $x^m - 1$ (où $m = n^\nu$) admet, si grand qu'on prenne l'exposant entier ν, un facteur premier ϖ, qui ne divise aucun des deux nombres $M_\mu = x^\mu - 1$, où μ est égal soit à $\frac{m}{a} = \mu_1$, soit à $\frac{m}{b} = \mu_2$ (car tout sous-multiple de m divise μ_1 ou μ_2).

Or cela est facile à voir. On a en effet

$$M = M_{\mu_1} \times P_a(x^{\mu_1}, 1) = M_{\mu_2} \times P_b(x^{\mu_2}, 1).$$

Prenons de plus $x = ab$. Alors M est premier avec a et b. Donc P_a, ne pouvant avoir pour p. g. c. d. avec M_{μ_1} (lemme II) que 1 ou a, est premier avec M_{μ_2}; de même P_b est premier avec M_{μ_2}. Donc P_a et P_b ne sont pas premiers entre eux, sans quoi P_a devrait diviser M_{μ_2}, ce qui est impossible, car on a $2 \leqq a < b$ et par suite

$$M_{\mu_2} \leqq M_{\mu_1} \leqq \sqrt{M} \leqq P_a.$$

Par conséquent P_a et P_b ont au moins un facteur premier commun (> 1), qui est (comme P_a et P_b) premier avec M_{μ_1} et M_{μ_2}, et qui remplit donc bien les conditions exigées pour le nombre ϖ.

C. Q. F. D.

Théorème V. — *Il y a une infinité de nombres premiers appartenant à* l'une au moins des formes $Kn + r$, *où* $n = a^\alpha b^\beta$ *et où* r *est premier avec* n *et différent de* $+1$.

En effet considérons le produit $x = p_1 p_2, \ldots, p_\lambda \times n$ des nombres premiers successifs jusqu'au $\lambda^{\text{ième}}$ et du nombre n. Tout facteur premier ϖ_i du nombre $x^m - 1$ est congru (mod n) à un des nombres r (qui sont premiers avec n), ou à 1. Mais ces nombres r_i ne peuvent être tous égaux à 1, sans quoi $x^m - 1$ serait $\equiv 1 \pmod{n}$, alors que $x^m - 1$ est $\equiv -1$. Donc *l'un au moins des* ϖ_i, *soit* ϖ_0, *est bien congru à un des nombres* $r \neq 1$. D'ailleurs tous les ϖ_i sont $> p_\lambda$ et p_λ est aussi grand qu'on veut, donc ϖ_0 aussi. C. Q. F. D.

II. *Sur les équations différentielles linéaires et leurs applications aux systèmes différentiels.*

M. Noaillon : *Sur un procédé graphique de résolution de l'équation du* 3e *degré déduit du problème de Pappus.*

M. P. Lévy : *Sur la résolution des équations du* 5^e^ *degré par abaques à points alignés.*

SÉANCE DU 25 JUIN 1924.

PRÉSIDENCE DE M. AURIC.

Élection :

Est élu à l'unanimité membre de la Société : M. le Dr Luigi Fantappié, présenté par MM. Hadamard et Chazy.

Communications :

M. Auric : *Sur la probabilité de faire fonctionner* N *éléments par groupes de n éléments.*

Si nous appelons $\left(\frac{N}{n}\right)$ le quotient exact ou approché par défaut de la division de N par n, il est évident qu'on pourra faire fonctionner $\left(\frac{N}{n}\right)$, $\left(\frac{N-1}{n}\right)$, $\left(\frac{N-2}{n}\right)$, $\cdots$ groupes, suivant qu'il y a 0, 1, 2 éléments avariés simultanément.

Appelons p la probabilité (d'ailleurs en principe assez faible) pour qu'un élément déterminé soit avarié; il est clair que $(1-p)$ sera la probabilité pour que cet élément ne soit pas avarié et pour qu'aucun des N éléments ne soit avarié, la probabilité sera $(1-p)^N$; le nombre de groupes probables correspondants sera

$$\left(\frac{N}{n}\right)(1-p)^N = \left(\frac{N}{n}\right)\left[1 - Np + \frac{N(N-1)}{2}p^2\right];$$

comme p est par hypothèse très faible, on peut négliger les puissances supérieures à p^2.

Pour qu'on ait un élément avarié et $N-1$ non avariés, la probabilité est

$$p(1-p)^{N-1} = p[1-(N-1)p]$$

en négligeant les termes en p^3; mais cette hypothèse peut se présenter de N manières différentes, de sorte que la probabilité finale sera

$$Np[1-(N-1)p]$$

et le nombre de groupes probables correspondants

$$\binom{N-1}{n} Np[1-(N-1)p].$$

De même, pour qu'il y ait deux groupes avariés et deux seulement la probabilité est

$$p^2(1-p)^{N-2} = p^2$$

en négligeant les termes en p, p, ..., mais cette hypothèse peut se réaliser de $\frac{N(N-1)}{2}$ manières différentes, de sorte que la probabilité finale sera

$$\frac{N(N-1)}{2}p^2$$

et le nombre de groupes probables correspondants sera

$$\binom{N-2}{n}\frac{N(N-1)}{2}p^2.$$

En additionnant, on trouve aisément pour le nombre total de groupes probables

$$\begin{aligned}\mathfrak{N} = \binom{N}{n} - Np\left[\binom{N}{n} - \binom{N-1}{n}\right] \\ + \frac{N(N-1)}{2}p^2\left[\binom{N}{n} - 2\binom{N-1}{n} + \binom{N-2}{n}\right]\end{aligned}$$

ou en appelant

$$\Delta\binom{N}{n}, \quad \Delta^2\binom{N}{n}, \quad \Delta^3\binom{N}{n}, \quad \dots$$

les différences successives de la suite

$$\binom{N}{n}, \quad \binom{N-1}{n}, \quad \binom{N-2}{n}, \quad \dots,$$

il vient

$$\mathfrak{N} = \binom{N}{n} - Np\,\Delta\binom{N}{n} + \frac{N(N-1)}{2}p^2\,\Delta^2\binom{N}{n},$$

et l'on démontrerait facilement la généralité de cette formule; de sorte qu'on pourrait écrire symboliquement

$$\mathfrak{N} = \left[1 - p\,\Delta\binom{N}{n}\right]^N$$

avec les conventions

$$\left[\Delta\binom{N}{n}\right]^h = \Delta^h\binom{N}{n}$$

et

$$1 = \left[\Delta\left(\frac{N}{n}\right)\right]^0 = \Delta^0\left(\frac{N}{n}\right) = \left(\frac{N}{n}\right).$$

M. Bidnatzky : *Sur le produit de k fonctions donnant la représentation conforme d'un cercle.*

M. Mandelbrojt : *Sur une série de coefficients positifs.*

M. Léon Pomey : *Sur le dernier théorème de Fermat.*

M. Hadamard :

« Dans la Note de M. Schouten (*Comptes rendus*, t. 178, n° 25, 16 juin 1924, p. 2044-2046), l'allusion à M. Weyl (p. 2046, ligne 7) était accompagnée d'une référence bibliographique, savoir : *Gött. Nachr.*, 1921, p. 99-112.

» Dans la Note de M. A. Bloch (même numéro des *Comptes rendus*, p. 2051-2052), l'allusion à M. Landau (note 3 au bas de la page 2051) était accompagnée d'une référence bibliographique : *Circolo Matem. di Palermo*, 1922.

» Ces deux indications ayant été supprimées pour des raisons de réglementation, nous les rétablissons ici. »

SÉANCE DU 9 JUILLET 1924.

PRÉSIDENCE DE M. P. LÉVY.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société :

M. le Général Gossot, présenté par MM. Hadamard et P. Lévy.

M. Razmadzé, présenté par MM. Chazy et P. Lévy.

SÉANCE DU 22 OCTOBRE 1924.

PRÉSIDENCE DE M. P. LÉVY.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société :

M. B. P. Gerasimovič, professeur d'astronomie à l'Université de Kharkow, présenté par MM. Kryloff et Auric.

M. R. Cord, conservateur des hypothèques à Nyons, présenté par MM. Got et P. Lévy.

M. G. Polyà, de Zürich, présenté par MM. P. Lévy et Montel.

M. H. Malet, ingénieur des Ponts et Chaussées, présenté par M. d'Ocagne, membre de l'Institut, et M. le général Emery.

M. Tzénoff, professeur à l'Université de Sofia, présenté par MM. P. Lévy et Chazy.

Communications :

I. M. Kryloff : Analyse d'une Note de M. Léon Loïtzianski, *Sur le développement d'une racine d'une équation en série procédant suivant des fonctions orthogonales.*

Le but de cet article est l'exposition d'une méthode pratique de l'inversion approchée de la fonction

$$f(x) = y, \tag{1}$$

continue avec sa première dérivée dans l'intervalle $x = a$, $x = b$ et monotone dans cet intervalle. Posons dans la suite $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$; $\beta - \alpha = h \neq 0$.

1. Soit $\varphi_m(y)$ un système orthogonal et normé de fonctions relatif à l'intervalle (α, β), pour lequel est déjà démontré le théorème général du développement de la fonction arbitraire, continue avec sa première dérivée dans cet intervalle.

THÉORÈME. — *La série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k \varphi_k(y), \tag{2}$$

où

$$g_k = b\,\Phi_k(\beta) - \int_a^b \Phi_k[f(x)]\,dx, \qquad \Phi_k(y) = \int_\alpha^y \varphi_k(y)\,dy, \tag{3}$$

converge absolument et uniformément dans l'intervalle et présente l'inverse de la fonction $f(x)$, c'est-à-dire la solution par rapport à x de l'équation (1).

En effet, d'après le théorème général d'existence de la fonction implicite, il s'ensuit que l'équation (1), vu les suppositions faites à propos de $f(x)$, détermine x en fonction de y continue avec sa première dérivée dans l'intervalle (α, β). Donc x se développe en série absolument et uniformément convergente (2); les coefficients (3) se calculent alors immédiatement :

$$g_k = \int_\alpha^\beta x(y)\,\varphi_k(y)\,dy = \int_\alpha^\beta x(y)\,d\Phi_k(y)$$
$$= b\,\Phi_k(\beta) - \int_a^b \Phi_k[f(x)]\,dx. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — Le signe de α est contraire à celui de β; on obtient la racine de l'équation $f(x) = 0$, séparée dans l'intervalle (a, b),

$$(4) \qquad x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} g_k\,\varphi_k(0).$$

2. L'application de ce résultat dans le cas particulier de la série trigonométrique à l'équation de Kepler est bien connue (Bessel, Schlömilch, Appell). Les fonctions transcendantes de Bessel à plusieurs variables, qui s'y rencontrent, rendent la méthode très incommode au point de vue du calcul effectif. *On peut éviter l'introduction des fonctions transcendantes nouvelles, en appliquant le théorème précédent aux systèmes des polynomes*, par exemple aux polynomes de Legendre, qui sont en pratique les plus simples.

Soit $U_k(y)$ le $k^{\text{ième}}$ polynome de Legendre, normé dans l'intervalle (α, β) et $\Phi_k(y) = \int_\alpha^y U_k(y)\,dy$. On a évidemment :

$$\Phi_k(\beta) = 0 \quad (k > 0), \qquad \Phi_0(\beta) = \sqrt{h} \qquad (h = \beta - \alpha).$$

On obtient, d'après (3),

$$(5) \qquad \begin{cases} g_0 = b\sqrt{h} - \int_a^b \Phi_0[f(x)]\,dx, \\ g_k = -\int_a^b \Phi_k[f(x)]\,dx \qquad (k > 0). \end{cases}$$

En introduisant la suite des intégrales définies :

$$(6) \qquad \lambda_k = \int_a^b [f(x)^k]\,dx, \qquad \lambda_0 = b - a,$$

désignons par le symbole $\Phi_k\{\lambda\}$ le résultat du remplacement dans $\Phi_k(y)$ de y^k par λ_k, alors on aura, d'après (5) et (6),

$$(7) \qquad \begin{cases} g_0 = b\sqrt{h} - \Phi_0\{\lambda\}, \\ g_k = -\Phi_k\{\lambda\}. \end{cases}$$

Le problème en question se réduit de cette manière au calcul de la suite (6), ce qui ne présente pas de difficultés. La résolution de l'équation (1) a la forme

$$x = b - \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k \{ \lambda \} \, U_k(y) \tag{8}$$

ou, en utilisant les expressions bien connues des polynomes,

$$x = b - \frac{1}{h}(\lambda_1 - \alpha\lambda_0) - \frac{3}{h^3}[\lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda_1 + \alpha\beta\lambda_0](2y - \alpha - \beta) - \ldots \tag{9}$$

La méthode exposée n'introduit pas de fonctions transcendantes.

3. Exemple. — *L'équation généralisée de Kepler*

$$f(x) \equiv x - e_1 \sin x - e_2 \sin 2x - \ldots - e_m \sin mx - \ldots = y. \tag{10}$$

On pose $a = 0$, $b = \pi$, de sorte que $\alpha = 0$, $\beta = \pi$. Pour les valeurs e_m, qui satisfont dans l'intervalle $(0, \pi)$ à la condition

$$f'(x) \equiv 1 - e_1 \cos x - 2e_2 \cos 2x - \ldots \neq 0,$$

la méthode précédente donne

$$\begin{aligned} x = {} & \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\left(e_1 + \frac{e_3}{3} + \frac{e_5}{5} + \ldots\right) \\ & + \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2\pi^2}(e_1^2 + e_2^2 + \ldots) \right. \\ & \left. - \frac{3}{\pi^2}\left(e_2 + \frac{e_4}{2} + \frac{e_6}{3} + \ldots\right)\right](2y - \pi) - \ldots \end{aligned} \tag{11}$$

En posant $e_1 = e$, $e_2 = e_3, \ldots = 0$, on aura la résolution de l'équation classique de Kepler $x - e \sin x = y$, sous forme d'une série

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{2e}{\pi} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3e^2}{2\pi^2}\right)(2y - \pi) - \ldots \tag{11'}$$

En comparant les séries trigonométriques de Bessel et de Schlömilch avec (11), (11'), on se persuade de l'avantage de cette dernière.

4. Il est souvent plus simple, au point de vue du calcul effectif, de réduire les polynomes de Legendre à un intervalle donné, par exemple $(0, 1)$. Pour cela, considérons l'équation

$$F(x) = z, \qquad F(x) = \frac{f(x) - \alpha}{h}, \qquad z = \frac{y - \alpha}{h} \qquad (h = \beta - \alpha) \tag{12}$$

équivalente à (1). En remarquant que $F(a) = 0$, $F(b) = 1$, on conclut que l'équation (12), ou, ce qui est la même chose, l'équation (1), est résolue par la série

$$(13) \qquad x = b - \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k \{ \lambda \} \, U_k\left(\frac{y-\alpha}{h}\right),$$

où $U_k(z)$ correspond à l'intervalle (0, 1); les valeurs de $U_k(z)$ se trouvent dans les tables des fonctions usuelles,

$$(14) \quad \Phi_k \{ \lambda \} = \sqrt{2k+1} \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \frac{(2k-r)\ldots(k-r+2)}{(k-r)!\, r!} \lambda_{k-r+1}$$

et

$$(15 \qquad \lambda_m = \frac{1}{h^m} \int_a^b [f(x) - \alpha]^m \, dx.$$

II. M. Kryloff: *Sur les racines de la transcendante de Fredholm dans la théorie des équations intégrales.*

En se basant sur une transformation d'une intégrale multiple (sous le signe de laquelle se trouve le produit de deux déterminants), découverte jadis par M. Andreeff et redécouverte récemment par M. Ogura (*Tokokie Math. Journal*, 1920), l'auteur établit certaines propriétés de la transcendante de Fredholm $D(\lambda)$ se rapportant aux noyaux de la forme

$$k(x, y) = \int_a^b \alpha(x, z)\, \beta(y, z)\, dz$$

moyennant certaines conditions restrictives imposées aux fonctions

$$\alpha(x, z) \quad \text{et} \quad \beta(y, z).$$

M. Coblyn : *Réflexions sur le second principe de la thermodynamique.*

M. Razmadzé : *Sur les extrémales discontinues dans le calcul des variations.*

Congrès de Toronto.

M. Chazy fait un bref compte rendu du Congrès international de mathématiques, tenu à Toronto du 11 au 16 août, sur l'invitation et avec le généreux concours de l'Université de Toronto et du Royal Canadian Institute, et de la séance du 16 août de l'Union internationale mathématique; nous donnons sur la couverture de ce fascicule la composition du nouveau Bureau de cette Union.

SÉANCE DU 12 NOVEMBRE 1924.

PRÉSIDENCE DE M. P. LÉVY.

Élection :

Est élu à l'unanimité membre de la Société, M. Byrne, présenté par MM. Hadamard et P. Lévy.

Communications :

M. P. Lévy : *Sur une question de calcul des variations* (¹) à propos de la Communication précédente de M. Razmadzé.

M. Kiveliovitch : *Sur un procédé élémentaire pour trouver des solutions de l'équation de Fermat :*

$$ax^2 + 1 = y^2.$$

M. P. Lévy : *Sur les probabilités relatives aux nombres entiers et à la fonction* $\zeta(s)$ *de Riemann.*

Nous dirons que la probabilité que p nombres entiers pris au hasard soient premiers entre eux est a si la probabilité $\alpha(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ calculée en les supposant respectivement au plus égaux à n_1, $n_2, \ldots, n_p$, tend vers a lorsque ces nombres deviennent infinis suivant une loi quelconque.

On voit aisément que la probabilité pour que m nombres soient premiers entre eux dans leur ensemble est $\frac{1}{m(\zeta)}$, résultat énoncé par Cesaro pour $m = 2$; la probabilité que leur plus grand commun diviseur soit n est $\frac{1}{n^m \zeta(m)}$. Ce plus grand commun diviseur a donc une loi de probabilité bien déterminée; sa moyenne, finie si $m > 2$, est $\frac{\zeta(m-1)}{\zeta(m)}$; la moyenne de sa puissance $p^{\text{ième}}$, finie si $m > p + 3$, est $\frac{\zeta(m-p}{\zeta(m)}$. La probabilité qu'il divise m' entiers pris au hasard est $\frac{\zeta(m+m')}{\zeta(m)}$.

On peut obtenir des relations relatives à la fonction $\zeta(s)$ en calculant des probabilités de deux manières différentes. La probabilité que le plus grand commun diviseur de s nombres soit n et soit premier

---

(¹) Cette Communication a fait l'objet d'une Note à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, 17 novembre 1924).

avec d'autres nombres est

$$\frac{1}{n^s\zeta(s)}\varphi(n, s') = \frac{1}{n^s\zeta(s)}\left(1-\frac{1}{\alpha^{s'}}\right)\left(1-\frac{1}{\beta^{s'}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\lambda^{s'}}\right),$$

α, β, ..., λ désignant les facteurs premiers de n, chacun d'eux ne figurant qu'une fois, quel que soit son ordre de multiplicité. Faisant la somme de ces expressions, pour tous les entiers n, on trouve évidemment la probabilité que $s+s'$ nombres entiers soient premiers entre eux. On a ainsi, en groupant tous les entiers n ayant les mêmes facteurs premiers,

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+s')} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s}\,\frac{\varphi(n, s')}{\varphi(n, s)},$$

$\mu(n)$ désignant la fonction arithmétique égale à $(-1)^p$ si n est le produit de p facteurs premiers distincts et nulle dans le cas contraire.

Le raisonnement précédent suppose s et s' entiers. Mais la formule obtenue, qui est une égalité entre deux expressions réductibles à des séries de Dirichlet, ne peut être vraie pour des valeurs de s et s' dépassant indépendamment l'une de l'autre toute limite que si elle est vraie identiquement. Elle l'est donc, tant que la série considérée est convergente, et sûrement lorsque s et $s+s'$ sont >1.

Si l'on dérive q fois par rapport à s' et que l'on fasse $s'=0$ dans la formule obtenue, on trouve

$$(-1)^q\zeta(s)\frac{d^q}{ds^q}\frac{1}{\zeta(s)} = \sum{}^{(q)} \frac{\mu(n)(\log n)^{(q)}}{(\alpha^s-1)(\beta^s-1)\ldots(\lambda^s-1)},$$

$(\log n)^{(q)}$ désignant la somme des termes du développement de

$$(\log n)^q = (\log\alpha + \log\beta + \ldots + \log\lambda)^q$$

qui contiennent en facteur le produit $\log\alpha\log\beta\ldots\log\lambda$, et $\Sigma^{(q)}$ une somme étendue à tous les entiers ayant leurs facteurs premiers distincts et en nombre $\leqq q$; d'ailleurs pour les autres l'un ou l'autre facteurs du numérateur est nul. Pour $q=1$ on retrouve une formule élémentaire bien connue.

SÉANCE DU 26 NOVEMBRE 1924.

PRÉSIDENCE DE M. P. LÉVY.

Communications :

M. Auric : *Sur l'impossibilité d'une généralisation du calcul symbolique de Grassmann.*

M. P. Lévy : *Observations sur sa Communication précédente au sujet d'un problème de calcul des variations.*

M. Coblyn : *Exploration méthodique du ciel par les projecteurs.*

M. le Président signale l'hommage fait à la Société par la maison Gauthier-Villars et Cie de deux exemplaires d'une nouvelle édition des *Leçons de Mathématiques générales,* par L. Zoretti, professeur à la Faculté des Sciences de Caen.

SÉANCE DU 10 DÉCEMBRE 1924.

PRÉSIDENCE DE M. P. MONTEL.

Correspondance :

M. le Président signale une demande des *Monatshefte* de Vienne en vue de la reprise de l'échange de son Bulletin avec celui de la Société; cette demande sera soumise au Conseil.

Communication :

M. Noaillon : *Sur un théorème de Riesz et Fischer.*

M. Hadamard :

« La Note de M. Mordouhay-Boltovskoy aux *Comptes rendus* (t. **179**, n° **22**, 1er décembre 1924, p. 1239-1240) était accompagnée de la référence suivante, qui a été supprimée pour des raisons de réglementation : *voir* aussi Lindemann, *Ueber die Zahl* π (*Math. Annalen*, t. **20**, 1882), et les Notes de Hilbert, Hurwitz, *Math. Annalen*, t. **43**. »

Société mathématique de France

Comptes rendus des séances de l'année 1924

Séances ordinaires

TABLE DES MATIÈRES

Réimpression Photomécanique

LES PROCEDES DOREL - PARIS