E. WEYR

Quelques théorèmes nouveaux sur la lemniscate

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 18-19
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__18_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Quelques théorèmes nouveaux sur la lemnicaste; par M. ÉMILE WEYR.

(Séance du 20 novembre 1872)

Soit O le point double d'une lemniscate L, qui est la podaire de l'hyperbole équilatère H. La lemniscate est une courbe du quatrième ordre et de la sixième classe, avec trois points doubles, savoir: O et les deux points circulaires à l'infini. Les tangentes au point O sont des tangentes d'inflexion. On peut alors démontrer les théorèmes suivants:

Par chaque point X *de la lemniscate* L, *passent quatre tangentes de cette courbe (parmi elles, deux sont imaginaires), dont les points de contact sont sur une même droite* R, *et qui forment un système de quatre points équianharmoniques sur la courbe.*

La droite R *est perpendiculaire au rayon* OX, *et retranche du prolongement de ce rayon une longueur égale à* $\frac{OX}{2}$.

L'enveloppe de la droite R *est donc une hyperbole équilatère semblable, semblablement située, et concentrique avec* H, *qu'on peut obtenir en prenant la moitié des rayons de l'hyperbole* H.

Un cercle quelconque a quatre points d'intersection avec la lemniscate; soit a, b, c, d un système de tels points. Si l'on fait passer un deuxième cercle par a et b, et un troisième par c et d, les quatre nouveaux points de rencontre de ces deux cercles avec la lemniscate sont aussi situés sur un même cercle.

En passant aux cercles osculateurs, on trouve qu'un tel cercle, dont X *est le point de contact, coupe la lemniscate en un seul autre point* Y, *tel que* $\widehat{XYO} = \frac{\pi}{2}$, *c'est-à-dire que les cordes* XY *communes aux cercles osculateurs et à la lemniscate sont tangentes à l'hyperbole* H.

Par chaque point Y *de la courbe* L *passent trois cercles osculateurs, dont les points de contact sont en ligne droite, savoir sur la droite perpendiculaire en* Y *au rayon* OY.

Ces points de contact forment des groupes d'une involution du troisième ordre avec deux points triples, qui sont infiniment voisins du point O.

Si les quatre points X *de contact des quatre cercles osculateurs sont sur un même cercle, la même chose a lieu pour les quatre points* Y *d'intersection de ces cercles avec la lemniscate.*

Des propriétés analogues ont lieu pour les courbes planes du quatrième ordre avec trois points doubles, dont deux sont les points circulaires à l'infini.