BULLETIN DE LA S. M. F.

L. G. DU PASQUIER

Sur la théorie des nombres hypercomplexes à coordonnées rationnelles

Bulletin de la S. M. F., tome 48 (1920), p. 109-132

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1920__48__109_0>

SUR LA THÉORIE DES NOMBRES HYPERCOMPLEXES À COORDONNÉES RATIONNELLES ;

PAR M. L.-GUSTAVE DU PASQUIER.

CHAPITRE I.

LES NOMBRES HYPERCOMPLEXES ENTIERS.

1. Envisageons un ensemble constitué par une infinité d'éléments, ou *complexes*, tels que $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, le signe $\equiv$ (doublement égal) se prononçant « égal par définition », ou « identiquement égal ». Les $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sont des nombres réels, d'ailleurs quelconques, dits *coordonnées* du complexe x. Pour faire de cet ensemble un système S_m de nombres hypercomplexes, il faut soumettre au calcul les éléments x. A cet effet, il suffit de poser trois définitions primordiales : celle de *l'égalité* de deux complexes et celles de *deux opérations* que l'on appellera, par analogie avec l'arithmétique élémentaire, *addition* et *multiplication*. Ces trois définitions primordiales sont d'ailleurs arbitraires, à la seule restriction près que la définition de l'égalité, que nous représentons comme de coutume par le signe $=$, satisfasse aux trois axiomes suivants : 1° tout élément doit être « égal » à lui-même; 2° de $a = b$, il résulte $b = a$; 3° de $a = b$ et $b = c$, il résulte $a = c$.

Dans ce qui suit, nous supposons d'emblée *l'égalité* de deux nombres hypercomplexes tels que $a \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ et $b \equiv (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ définie par l'égalité des coordonnées *correspondantes*. L'équation $a = b$ entraîne donc, par définition, les m égalités entre nombres réels

$$a_\lambda = b_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots, m).$$

De plus, nous supposons l'une des deux opérations susmentionnées, *l'addition* des nombres hypercomplexes, définie par l'addition des coordonnées correspondantes, de sorte que

$$(1) \qquad a + b \equiv (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m).$$

Parmi les corollaires de ces deux définitions, signalons les cinq suivants :

1° L'existence, dans le système S_m, d'un nombre hypercomplexe z indifférent à l'addition (le « module » de l'addition) satisfaisant, quel que soit a, à l'équation $a + z = a$. Représentons-le comme d'habitude par $0 \equiv (0, 0, \ldots, 0)$.

2° L'existence d'une opération inverse de l'addition. Par analogie, on l'appelle « *soustraction* de nombres hypercomplexes » et on la représente par le signe —. On démontre qu'elle est, comme l'addition, toujours possible et univoque dans S_m et s'effectue par la soustraction des coordonnées correspondantes

$$(2) \qquad a - b \equiv (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_m - b_m).$$

3° Les propriétés associative et commutative de l'addition.

4° La multiplication d'un nombre hypercomplexe x par un nombre naturel n s'opère en multipliant par n chacune des coordonnées de x : on le voit en additionnant x à lui-même n fois de suite. Par définition, étendons ce théorème au cas où n est un nombre réel quelconque r, de sorte que

$$(3) \qquad rx \equiv (rx_1, rx_2, \ldots, rx_m).$$

5° Tout nombre hypercomplexe $y \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ du système S_m peut se mettre sous la forme

$$(4) \qquad y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_m e_m = \sum_i^{1 \ldots n} y_i e_i,$$

où les nombres réels $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ne sont autres que les coordonnées de y, et les $e_1, e_2, \ldots, e_m$ des complexes particuliers dits *unités relatives* du système, savoir :

$$(5) \qquad \begin{cases} e_1 \equiv (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ e_2 \equiv (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ e_3 \equiv (0, 0, 1, \ldots, 0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ e_m \equiv (0, 0, 0, \ldots, 1). \end{cases}$$

On pourrait d'ailleurs prendre dans le même système, comme *unités relatives*, m autres nombres hypercomplexes, pourvu qu'ils soient linéairement indépendants (*voir* n° 5). Tout nombre tel que y pourrait encore se mettre sous la forme (4). Il est vrai qu'en choisissant d'autres unités relatives, puis donnant au même nombre hypercomplexe y la forme (4), on obtiendrait en général d'autres y_i.

2. Outre l'addition, supposons définie dans S_m une seconde opération : « la multiplication ». Etant donnés les deux complexes x et y de S_m, on appelle *produit* xy un nouveau nombre hypercomplexe $z \equiv (z_1, z_2, \ldots, z_m)$ appartenant au même système et dont chaque coordonnée z_λ est une fonction f_λ des coordonnées x_i et y_i :

$$(6)\qquad xy = z \equiv [f_1(x_i, y_i), f_2(x_i, y_i), \ldots, f_m(x_i, y_i)].$$

Il n'est pas nécessaire d'ailleurs de supposer que ces f_λ soient des fonctions rationnelles entières de leurs arguments. Chacune doit être fixée, mais peut l'être arbitrairement. Suivant à quel choix des f_λ on s'arrêtera, la « multiplication » ainsi *définie* sera commutative ou non, associative ou non, liée ou non à l'addition par la loi de distributivité ; elle admettra une ou deux « opérations inverses » : la *division à droite* et la *division à gauche* univoques ou plurivoques, exécutables toujours, ou dans certains cas seulement, ou pas du tout.

On voit qu'en introduisant les unités relatives (5), la multiplication de nombres hypercomplexes de S_m sera déterminée dès que l'on saura exprimer tous les produits e_i, e_k au moyen des mêmes unités relatives $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Cette loi de multiplication est donc définie par m^3 constantes γ_{iks} qui entrent dans les formules

$$(7)\qquad \left\{ \begin{array}{l} e_1 e_2 = \sum_{s=1}^{s=m} \gamma_{12s} e_s, \qquad e_1 e_3 = \sum_{s=1}^{s=m} \gamma_{13s} e_s, \qquad \ldots, \qquad e_i e_k = \sum_{s}^{1\ldots m} \gamma_{iks} e_s \\ \qquad\qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m). \end{array} \right.$$

Définition. — Deux systèmes sont dits *réciproques* quand on passe de l'un à l'autre en changeant entre elles les constantes

$$\gamma_{iks} \quad \text{et} \quad \gamma_{kis}, \qquad \text{où} \qquad i, k, s = 1, 2, \ldots, m.$$

Dans ce qui suit, nous supposons :

1° Que le système S_m est à multiplication associative, $(ab)x = a(bx)$. On sait que, pour qu'il en soit ainsi, la condition nécessaire et suffisante est que les m^3 constantes γ_{iks} satisfassent aux relations

$$(8) \qquad \sum_s^{1\ldots m} \gamma_{iks}\gamma_{sjt} = \sum_s^{1\ldots m} \gamma_{kjs}\gamma_{ist} \qquad \text{où} \qquad i, k, j, t = 1, 2, \ldots, m.$$

2° Qu'il existe dans S_m une *unité principale*, c'est-à-dire un nombre hypercomplexe u indifférent à la multiplication (le « module » de la multiplication) satisfaisant, quel que soit a, aux égalités $au = ua = a$. Nous représenterons cette unité principale u par l'écriture 1. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que S_m admette une unité principale est qu'aucun des deux déterminants dits *déterminants caractéristiques du système*, savoir :

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \left| \sum_{i=1}^{i=m} \gamma_{iks} a_i \right|, & \left| \sum_{k=1}^{k=m} \gamma_{iks} a_k \right| \\ (k, s = 1, 2, \ldots, m), & (i, s = 1, 2, \ldots, m), \end{array} \right.$$

ne soit identiquement nul, quels que soient les nombres a_i.

S'il en est ainsi, la « division à droite » et la « division à gauche » sont possibles et bien déterminées lorsque le diviseur n'est pas un diviseur de zéro ; en d'autres termes : étant donnés a et b, on peut déterminer les solutions x et y des équations $a = bx$ et $a = yb$, et les coordonnées des quotients (« quotient à droite » et « quotient à gauche ») sont données par un système de m équations linéaires à m inconnues, à déterminant non nul quand b n'est pas diviseur de zéro.

3. Avec les nombres hypercomplexes envisagés se trouvent définies, par ce qui précède, l'égalité et quatre opérations rationnelles. Le système S_m constitue dès lors un corps de nombres. Appelons ***nombre hypercomplexe rationnel***, ou simplement « complexe rationnel », un tel complexe x dont toutes les m coordonnées x_i sont des nombres rationnels quelconques, entiers ou fractionnaires. L'ensemble des complexes rationnels constitue ***le domaine naturel de rationalité de*** S_m. Nous le désignerons par mR, ou simplement R. C'est dire que les nombres hypercomplexes rationnels en question se reproduisent dans R par addition, soustraction, multiplication et division ; en d'autres termes : que somme, différence, produit et quotients (s'ils existent) de deux complexes rationnels sont toujours de nouveau des complexes rationnels.

Nous nous proposons de faire *l'arithnomie* du corps de nombres mR.

Le premier pas devra consister à scinder mR en deux domaines, mettant dans l'un les complexes rationnels « entiers » encore à définir, dans l'autre, les complexes rationnels « non entiers ». La définition suivante que nous appelons *lipschitzienne* se présente le plus naturellement à l'esprit : un complexe rationnel

$$x \equiv \sum_{i=1}^{i=m} x_i e$$

est dit *entier*, si ses m coordonnées x_i sont des nombres entiers ordinaires ; x sera dit *non entier*, si l'une au moins de ses m coordonnées est un nombre fractionnaire.

En prenant pour base cette définition et envisageant les complexes *entiers* ainsi définis comme éléments, on peut ériger une arithnomie du système de nombres hypercomplexes considéré. Cette arithmétique généralisée présente beaucoup d'analogies avec la classique dont les éléments sont les nombres rationnels entiers. On retrouve en général, dans cette arithnomie des complexes, l'équivalent du nombre premier et la possibilité de décomposer un complexe entier quelconque en *facteurs premiers*. On y retrouve aussi les diviseurs communs de 2 ou, plus généralement, de n complexes entiers donnés. On y retrouve encore un procédé analogue à *l'algorithme d'Euclide*, permettant de déterminer, par un nombre fini d'opérations rationnelles, le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple de plusieurs complexes entiers donnés. On y retrouve une théorie des congruences, l'analogue du théorème de Fermat, l'analogue du théorème de Wilson, etc.

Mais il y a des cas où cette analogie ne joue pas. Il y a des systèmes de nombres où l'arithmétique généralisée basée sur la définition lipschitzienne du nombre hypercomplexe entier présente des anomalies étonnantes, curieuses exceptions aux règles générales. Cela tient souvent à la définition même du complexe « entier » comme l'a montré pour la première fois M. A. Hurwitz sur l'exemple des quaternions. Voici les considérations qui peuvent conduire à une définition satisfaisante du nombre hypercomplexe *entier*.

Les nombres entiers sont caractérisés par les propriétés fondamentales suivantes :

1° Ils doivent former *un domaine d'intégrité*, c'est-à-dire se reproduire par addition, soustraction et multiplication.

2° Ce domaine d'intégrité doit contenir *une unité principale*, « le nombre 1 ». Sinon, on aurait un système de nombres « entiers » dont aucun ne serait divisible par lui-même.

3° Ce domaine d'intégrité doit posséder *une base finie;* autrement dit, il doit être possible d'y choisir un nombre fini de complexes, disons $t_1, t_2, \ldots, t_n$, jouissant de la propriété que voici : si $m_1, m_2, \ldots, m_n$ désignent des nombres entiers ordinaires quelconques (positifs, nuls ou négatifs), l'expression

$$m_1 t_1 + m_2 t_2 + \ldots + m_n t_n \tag{10}$$

doit pouvoir reproduire, par un choix convenable des nombres entiers m_λ, *tous* les éléments du domaine envisagé. Réciproquement, le domaine d'intégrité en question doit se composer de *tous* les complexes, et *uniquement* des complexes, qu'on obtient en assignant, dans l'expression (10), aux nombres $m_1, m_2, \ldots, m_n$, de toutes les manières possibles, des valeurs entières (positives, nulles ou négatives).

Nous appelons *domaine holoïde* tout ensemble de complexes jouissant de ces trois propriétés, En vertu de cette définition, tout domaine holoïde contient une infinité d'éléments, parmi lesquels « le nombre 1 » et le zéro; de plus, on peut y effectuer, sans restriction, l'addition, la soustraction, la multiplication, et cela sans jamais sortir du domaine; enfin, il possède une base finie. Or, pour caractériser les nombres entiers, il faut une quatrième propriété.

4° Ils doivent constituer un domaine holoïde qui soit *maximal*.

Définition. — Un domaine holoïde [H] est dit *maximal*, lorsqu'il n'existe pas, *dans le corps de nombres envisagé*, un autre domaine holoïde contenant *tous* les éléments de [H] et, en plus, des éléments qui ne font pas partie de [H]. La définition du complexe rationnel entier est alors la suivante : un nombre hypercomplexe rationnel

$$x \equiv \sum_{\lambda}^{1 \ldots m} x_\lambda e_\lambda$$

est dit *entier*, s'il fait partie du domaine holoïde maximal en question ; le complexe rationnel x sera dit *non entier*, s'il n'est pas contenu dans ce domaine holoïde maximal.

En adoptant cette nouvelle définition et envisageant comme éléments les complexes « entiers » définis de *cette* façon, on peut construire, dans le domaine R, une arithmétique et une théorie des nombres, d'une simplicité analogue à celle de l'arithmétique classique, alors que la définition lipschitzienne conduit à une arithnomie non régulière. Cette nouvelle définition du nombre hypercomplexe entier peut avoir comme conséquence qu'on appellera *entiers* même certains complexes rationnels x à coordonnées x_λ fractionnaires ; inversement, il peut arriver que dans un domaine de rationalité donné R, certains complexes rationnels x ne soient pas réputés « entiers », bien que toutes leurs coordonnées x_λ soient des entiers ordinaires.

4. Par l'étude de différents systèmes de nombres hypercomplexes, nous avons établi les faits suivants :

1° L'opération qui consiste à scinder le corps de nombres envisagé en deux domaines dont l'un comprend les complexes *entiers*, l'autre les complexes *non entiers*, peut ne pas être univoque. Il existe, en effet, des systèmes de nombres hypercomplexes où le corps R constitué par l'ensemble des complexes rationnels contient plusieurs domaines holoïdes maximaux, très différents. Désignons-les par $\{M_1\}$, $\{M_2\}$, $\{M_3\}$, ... Dans un pareil système S_m, la définition du nombre hypercomplexe « entier » n'est plus univoque ; elle y devient relative. Elle dépend en effet du domaine holoïde maximal dont on se sert pour scinder le corps R. On est donc obligé de définir ainsi : un complexe rationnel x est dit « *entier par rapport au domaine* $\{M_p\}$ », s'il est contenu dans $\{M_p\}$; et x est dit « non entier *par rapport à* $\{M_p\}$ », s'il ne fait pas partie du domaine holoïde maximal $\{M_p\}$.

Dans un pareil système S_m, un complexe rationnel t pris au hasard est-il *entier ?* On ne pourra pas, en général, trancher cette question d'une manière absolue par oui ou par non. Il pourra se faire qu'on doive répondre : « Cela dépend », puisqu'il y a plusieurs manières de scinder le corps R en complexes entiers et non entiers. Or, il se trouve que certains complexes rationnels sont contenus dans *tous* les domaines holoïdes maximaux $\{M_p\}$, par exemple, les nombres entiers ordinaires. Pour cette raison, on pourrait les nommer *absolument entiers.* D'autres complexes rationnels ne sont contenus dans aucun des domaines holoïdes maximaux $\{M_p\}$; on pourrait les appeler *absolument fractionnaires.* Enfin, il y a une catégorie de complexes rationnels qu'on pourrait appeler *conditionnellement entiers;* ce sont ceux qui font partie d'un ou de plusieurs des domaines holoïdes maximaux $\{M_p\}$, mais pas de tous.

Au point de vue de l'arithnomie, un tel corps R se subdivise donc en trois groupes. On sait qu'il en est tout autrement du corps R des nombres rationnels ordinaires, du corps R des nombres complexes de Gauss, etc. Ces corps-là se subdivisent en deux groupes seulement; la catégorie des nombres « conditionnellement entiers » ou « conditionnellement fractionnaires » n'y existe pas.

2° Étant donné un corps R de complexes rationnels faisant partie d'un système S_m de nombres hypercomplexes, il peut arriver que R ne contienne *aucun* domaine holoïde maximal. Nous avons découvert ce fait surprenant en étudiant certains systèmes de tettarions. Dans un pareil système S_m, la définition du nombre hypercomplexe entier devient arbitraire, car sans domaine holoïde maximal, point de nombre *entier*. Aussi faut-il s'attendre *a priori* à ce que l'arithnomie basée sur une telle définition porte, elle aussi, l'empreinte plus ou moins profonde de l'arbitraire. L'expérience confirme cette présomption. Nous avons pensé qu'il n'était pas sans intérêt d'étudier à ce point de vue les différents systèmes connus de nombres hypercomplexes et d'indiquer pour chacun d'eux le domaine holoïde maximal, s'il y en a un seul, ou les domaines holoïdes maximaux, s'il y en a plusieurs. C'est l'objet du Chapitre suivant.

CHAPITRE II.

LES FORMES A DEUX ET A TROIS UNITÉS RELATIVES ET LEURS DOMAINES HOLOÏDES.

5. Nous commencerons par rappeler quelques définitions, en nous appuyant sur l'exposé de M. E. Cartan dans le Tome I de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées*.

α. Étant donnés n nombres hypercomplexes a', a'', a''', ..., $a^{(n)}$, appartenant à un même système S_m, ces nombres sont dits *linéairement indépendants* s'il est impossible de trouver n nombres réels m_1, m_2, ..., m_n, rationnels ou irrationnels, non tous nuls et tels que l'on ait

$$(11) \qquad m_1 a' + m_2 a'' + m_3 a''' + \ldots + m_n a^{(n)} \equiv 0.$$

Dire que « le système S_m est d'ordre m » signifie que l'on peut trouver, dans ce système, m nombres linéairement indépendants, mais non $m+1$ qui le soient.

β. On appelle *base* du système S_m d'ordre m l'ensemble de m nombres hypercomplexes linéairement indépendants, d'ailleurs quelconques, par exemple les complexes e_1, e_2, ..., e_m définis par les formules (5). Chacun des nombres qui constitue la base est appelé *unité relative*, parfois simplement *unité*. Il y a une infinité de bases possibles dans un système S_m. La base une fois choisie, tout nombre y de S_m peut se mettre, et d'une seule manière, sous la forme (4); réciproquement, à toute expression (4) correspond un nombre hypercomplexe $a \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ de S_m.

γ. Deux systèmes de nombres hypercomplexes S et S' sont dits *holoédriquement isomorphes*, si l'on peut établir entre les nombres de ces deux systèmes une correspondance uni-univoque qui satisfasse aux conditions suivantes : 1° à tout nombre a du premier correspond un et un seul nombre a' du second, et réciproquement; 2° à la somme et au produit de deux nombres quelconques a, b de l'un des systèmes correspondent respectivement la somme et le produit des deux nombres correspondants a', b', de l'autre. Il s'ensuit que toute équation $F(a, b, c, \ldots, g) = 0$ entre nombres du premier système subsiste si l'on remplace chacun des nombres a, b, c, ..., g qui figure dans cette équation par son correspondant dans l'autre système : a par a', b par b', etc., pourvu que F représente un nombre fini d'additions, de soustractions, de multiplications et de divisions opérées sur les arguments entre parenthèses. On dit aussi, dans ce cas, que S′ est *une permutation* du système S.

δ. Deux systèmes de nombres hypercomplexes sont dits *équivalents*, si l'un d'eux est holoédriquement isomorphe de l'autre ou réciproque d'un isomorphe de l'autre. Nous rangerons dans une même classe ou catégorie tous les systèmes équivalents entre eux et conviendrons de dire alors qu'ils *appartiennent à la même forme*. On appelle *ordre de la forme* l'ordre commun des systèmes qui appartiennent à cette forme.

ε. Dans un système S_m à unités relatives $e_1, e_2, \ldots, e_m$, choisissons une autre base $e'_1, e'_2, \ldots, e'_m$, dont les termes e'_λ sont définis par les égalités

$$e'_\lambda = c_{\lambda 1} e_1 + c_{\lambda 2} e_2 + \ldots + c_{\lambda m} e_m \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m). \tag{12}$$

Si les c_λ sont des constantes réelles à déterminant non nul et qu'on envisage ces nombres hypercomplexes e'_λ comme unités relatives d'un nouveau système S′, celui-ci sera équivalent à S_m. Il est à prévoir que S_m et S′ auront les mêmes propriétés « essentielles », bien que la loi de multiplication dans l'un puisse être très différente de celle dans l'autre. Reste à savoir, d'ailleurs, quelles sont ces propriétés communes, invariantes en regard d'un changement de base.

Le problème général des nombres hypercomplexes, dans les hypothèses restrictives indiquées sous 1 et 2, consiste à déterminer toutes les formes d'ordre m et d'indiquer, pour chaque forme, un représentant particulier.

Ce problème est résolu pour $m = 2, 3, 4, 5$ et 6.

6. Nous indiquerons pour chacune des formes à 2 et à 3 unités un représentant particulier pour lequel les lois de la multiplication sont aussi simples que possible. Envisageant ensuite, dans ce système, le corps de nombres R constitué par l'ensemble des complexes rationnels, nous indiquerons :

1° Quel est le domaine holoïde le plus général dans R; en d'autres termes, quelle est, dans ce corps de nombres, la base la plus générale d'un domaine d'intégrité contenant le nombre 1, et deux, respectivement trois, complexes linéairement indépendants;

2° Combien de ces domaines holoïdes sont maximaux.

D'après les considérations qui précèdent, cela revient à dire si la définition du nombre hypercomplexe entier est univoque et bien déterminée, ou plurivoque, ou enfin indéterminée dans R. Remarquons que tous ces systèmes comprennent les nombres réels comme sous-système.

Formes à deux unités relatives.

En prenant le terme de *forme* dans le sens très général ci-dessus défini : multitude de tous les systèmes de nombres hypercomplexes équivalents entre eux, on démontre qu'il n'y a que trois formes à deux unités relatives. Elles satisfont toutes trois à la loi de commutativité de la multiplication.

Système n° 1. — La loi de multiplication est résumée par le Tableau suivant, où la flèche indique l'ordre de succession des facteurs du produit $e_i . e_k$. Ce produit se trouve à l'intersection de la ligne (horizontale) qui porte à gauche e_i et de la colonne (verticale) qui porte au haut e_k.

↗	e_0	e_1
e_0	e_0	e_1
e_1	e_1	e_0

L'unité relative e_0 joue le rôle du nombre 1. Ce système est isomorphe au système des nombres bicomplexes $a + bj$, où j est un symbole défini par $j^2 = 1$. Les règles de calcul de l'algèbre ordinaire y sont valables, à la seule exception près qu'il y existe des diviseurs de zéro; en d'autres termes, qu'un produit peut être nul sans qu'aucun des facteurs ne le soit, par exemple $(1 + j)(1 - j) = 0$.

Dans le corps R *constitué par l'ensemble de ces nombres hypercomplexes rationnels, le domaine holoïde le plus général a pour base* $t_1 = e_0$, $t_2 = \frac{g}{2} e_0 + \frac{g}{2} e_1$, *où* $g \neq 0$ *représente un nombre entier d'ailleurs quelconque.* Ledit corps R contient une infinité simple de domaines holoïdes correspondant aux diverses valeurs de g. Parmi eux, *un seul est maximal*, celui qui correspond à $g = 1$.

La définition du nombre entier est donc univoque dans ce système : est réputé « entier » tout nombre bicomplexe de la forme $\left(a + \frac{b}{2}\right) + \frac{b}{2} j$, où a et b représentent des nombres entiers ordinaires quelconques. Ici se présente le curieux phénomène qu'un nombre bicomplexe, quoique ayant des coordonnées fractionnaires, comme par exemple $\frac{1}{2} + \frac{9}{2} j$, doit être considéré comme « nombre entier » [1].

Pour un système de nombres ayant t_1 et t_2 comme unités relatives, les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau que voici :

$\swarrow$	t_1	t_2
t_1	t_1	t_2
t_2	t_2	gt_2

Système n° 2. — Les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau suivant :

$\swarrow$	e_0	e_1
e_0	e_0	e_1
e_1	e_1	$-e_0$

[1] *Voir* L.-G. Du Pasquier : *Sur les nombres complexes de deuxième et de troisième espèce* (*Nouv. Ann. de Mathémat.*, 4e série, t. XVIII, 1918).

L'unité relative e_0 joue le rôle du nombre 1. Ce système est isomorphe à celui des nombres complexes de Gauss $a+bi$, avec $i^2=-1$. On sait que toutes les règles de calcul de l'algèbre ordinaire y sont valables. *Dans le corps* R *constitué par l'ensemble des nombres complexes rationnels de Gauss, le domaine holoïde le plus général a pour base $t_1=1$, $t_2=gi$, où $g\neq 0$ représente un nombre entier d'ailleurs quelconque.*

Ce corps **R** contient une infinité simple de domaines holoïdes correspondant aux diverses valeurs entières de g. Parmi eux, *un seul est maximal*, celui qui correspond à $g=1$, le domaine $[1, i]$. La définition du nombre complexe entier y est donc univoque : est réputé « entier » tout nombre complexe $a+bi$ à coordonnées a, b, entières.

Pour un système de nombres bicomplexes ayant $t_1\equiv e_0$, $t_2\equiv ge_1$ comme unités relatives et par conséquent équivalant au système n° **2**, les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau

$\nearrow$	t_1	t_2
t_1	t_1	t_2
t_2	t_2	$-g^2t_1$

Système n° 3. — Les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau suivant :

$\nearrow$	e_0	e_1
e_0	e_0	e_1
e_1	e_1	0

L'unité relative e_0 joue le rôle du nombre 1. Ce système est isomorphe à celui des nombres bicomplexes $a+b\omega$, où ω est un symbole défini par $\omega^2 = 0$. Toutes les règles de calcul de l'algèbre ordinaire y sont valables, à la seule exception près qu'il y existe des diviseurs de zéro, les nombres de la forme $r\omega$. *Dans le corps* R *constitué par l'ensemble de ces nombres bicomplexes rationnels, le domaine holoïde le plus général a pour base* $t_1 = e_0$, $t_2 = \alpha e_1$, où $\alpha = \frac{n}{g}$ représente un nombre commensurable non nul d'ailleurs quelconque, n et g désignant des nombres entiers ordinaires $\neq 0$. Ledit corps de nombres R contient donc une infinité de domaines holoïdes correspondant aux diverses valeurs possibles de $\alpha \neq 0$. De tous ces domaines holoïdes, *aucun n'est maximal*. Il s'ensuit que, dans ce système de nombres bicomplexes, la définition du complexe « entier » est, en un certain sens, arbitraire.

En résumé, parmi les trois formes à deux unités relatives, il s'en trouve deux où la définition du nombre complexe entier est univoque et absolue, et une où cette définition est arbitraire.

Formes à trois unités relatives.

7. **Système n° 1**. — Les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau suivant, où la flèche indique l'ordre de succession

↗	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	0
e_1	e_1	e_0	0
e_2	0	0	e_2

des facteurs du produit $e_i e_k$ $(i, k, = 1, 2, 3)$. Dans ce système de nombres, la somme $e_0 + e_2$ joue le rôle du nombre 1, et les lois fondamentales de l'algèbre ordinaire y sont valables, à la seule exception près qu'un produit peut être nul sans qu'aucun des facteurs ne le soit, par exemple

$$(2e_0 + 2e_1 + ze_2)(e_0 - e_1) = 0.$$

Dans le corps R *constitué par l'ensemble de ces complexes rationnels, le domaine holoïde le plus général a pour base*

$$(13)\qquad \begin{cases} t_1 = ge_0, \\ t_2 = e_0 + e_2, \\ t_3 = \left(b + \dfrac{a}{2}\right)e_0 + \dfrac{a}{2}e_1, \end{cases}$$

où a, b, g sont trois nombres entiers soumis aux seules conditions

$$(13')\qquad a \neq 0, \qquad g \neq 0, \qquad b(a+b) \equiv 0 \pmod{g}.$$

Ledit corps R contient donc une infinité double de domaines holoïdes, correspondant aux diverses valeurs de a, b, g. *Parmi eux, un seul est maximal :* celui qui correspond à $a = g = 1$, $b = 0$. Il a pour base

$$t_1 = e_0, \qquad t_2 = e_2, \qquad t_3 = \frac{1}{2}(e_0 + e_1).$$

Il s'ensuit que, dans ce système de nombres tricomplexes, la définition du nombre « entier » est univoque et absolue. Sera réputé *entier* tout complexe de la forme

$$\left(n_0 + \frac{n_1}{2}\right)e_0 + \frac{n_1}{2}e_1 + n_2e_2,$$

où les n_i représentent des nombres entiers ordinaires d'ailleurs quelconques. Réciproquement : on obtient tous les nombres complexes *entiers*, et seulement ceux-là, en faisant parcourir à n_1, n_2, n_3, indépendamment les uns des autres, la suite des nombres entiers ordinaires de $-\infty$ à $+\infty$. On voit que, parmi ces nombres complexes « entiers », il s'en trouve une infinité à coordonnées fractionnaires.

En prenant les termes de la base (13) comme unités relatives, on obtient un nouveau système de nombres tricomplexes, équivalent au système n° 1; les lois de la multiplication dans ce système sont résumées par le Tableau ci-après, où g_1 est le nombre entier que définit l'équation $gg_1 + b(a+b) = 0$, dans laquelle a, b, g sont donnés et, par hypothèse, tels que g_1 soit entier.

$\times$	t_1	t_2	t_3
t_1	gt_1	t_1	gt_3
t_2	t_1	t_2	t_3
t_3	gt_3	t_3	$g_1 t_1 + (a+2b) t_3$

Système n° 2. — Les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau suivant qui montre que le système est réductible.

$\times$	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	0
e_1	e_1	$-e_0$	0
e_2	0	0	e_2

L'unité principale, dans ce système, est $e_0 + e_2 = 1$, et les lois fondamentales de l'algèbre ordinaire y sont valables, à la seule exception près que le système admet des diviseurs de zéro puisque, par exemple, $e_1 e_2 = 0$.

Dans le corps R *constitué par l'ensemble des complexes rationnels, le domaine holoïde le plus général a pour base*

$$t_1 = ge_0,$$
$$t_2 = e_0 + e_2,$$
$$t_3 = ae_0 + be_1,$$

où $b \neq 0$, $g \neq 0$ et a sont trois nombres entiers ordinaires tels que

$$(14) \qquad a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{g}.$$

Ce corps R contient une infinité double de domaines holoïdes, correspondant aux diverses valeurs que peuvent prendre a, b et g. *Parmi eux, un seul est maximal*, celui qui correspond à $b = g = 1$, $a = 0$; c'est donc l'ensemble des complexes à coordonnées entières. Il s'ensuit que dans ce système, la définition du nombre complexe « entier » est univoque et absolue, et qu'elle se confond avec la définition lipschitzienne (*voir* l'article 3).

En prenant les termes de la base ci-dessus pour unités relatives, on obtient un nouveau système de nombres tricomplexes, équivalent au système n° 2, et dans lequel les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau ci-dessous, où g_1 est le nombre que

↗	t_1	t_2	t_3
t_1	gt_1	t_1	gt_3
t_2	t_1	t_2	t_3
t_3	gt_3	t_3	$2at_3 - g_1t_1$

définit l'équation $gg_1 + a^2 + b^2 = 0$, nombre qui est entier en vertu de (14).

Système n° 3. — Les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau suivant. — Dans ce système, l'unité relative e_0 est

↗	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	e_2
e_1	e_1	0	0
e_2	e_2	0	e_2

en même temps l'unité principale, de sorte qu'on peut poser $e_0 = 1$. Les lois fondamentales de l'algèbre ordinaire sont valables dans ce système, à la seule exception près qu'un produit peut y être nul sans qu'aucun des facteurs ne le soit, par exemple $e_1, e_2 = 0$.

Dans le corps R *constitué par l'ensemble de ces complexes rationnels, le domaine holoïde le plus général a pour base*

$$t_1 = e_0,$$
$$t_2 = \alpha e_1,$$
$$t_3 = \beta e_1 + g e_2,$$

où g est un nombre entier non nul d'ailleurs quelconque, α un nombre rationnel non nul et β un nombre rationnel, arbitrairement choisis, liés par la relation

$$g\beta = g_1 \alpha, \tag{15}$$

dans laquelle g_1 représente un nombre entier quelconque.

Ce corps R contient donc une infinité triple de domaines holoïdes. *Parmi eux, aucun n'est maximal.* Il s'ensuit que, dans ce corps R, la définition du complexe « entier » est en un certain sens arbitraire.

Remarquons que ce système est isomorphe au système de nombres tricomplexes $a + bj + c\omega$, où les coordonnées a, b, c sont réelles quelconques et j, ω des symboles définis par les égalités

$$j^2 = j, \qquad \omega^2 = 0, \qquad j\omega = \omega j = 0. \tag{16}$$

En prenant les termes de la base ci-dessus comme unités relatives, on peut construire un nouveau système de nombres tricomplexes, équivalent au système n° 3 et dans lequel les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau ci-dessous, où g_1, entier

/	t_1	t_2	t_3
t_1	t_1	t_2	t_3
t_2	t_2	0	0
t_3	t_3	0	$gt_3 - g_1 t_2$

figurant dans l'équation (15), peut être choisi arbitrairement, et où g représente un entier non nul.

Système n° 4. — Les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau suivant :

/	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2	0
e_2	e_2	0	0

Dans ce système, l'unité relative e_0 est en même temps l'unité principale et joue le rôle du nombre 1. Les lois fondamentales de l'algèbre ordinaire y sont valables, à la seule exception près qu'un produit peut être nul sans qu'aucun des facteurs ne le soit, par exemple $7\,e_2(10\,e_1 + 19\,e_2) = 0$.

Dans le corps R *constitué par l'ensemble de ces complexes rationnels, le domaine holoïde le plus général* a pour base

$$t_1 = e_0,$$
$$t_2 = \frac{\alpha^2}{g} e_2,$$
$$t_3 = \beta e_2 + \alpha e_1,$$

où $g \neq 0$ est un nombre entier, α un nombre rationnel non nul et β un nombre commensurable arbitraire.

Ce corps R contient donc une infinité triple de domaines holoïdes correspondant aux diverses valeurs que peuvent prendre α, β et g. Or, *aucun d'entre eux n'est maximal.* En conséquence, la définition du nombre complexe « entier » dans ce corps R est en un certain sens arbitraire. On vérifie que, le choix de α, β et g une fois fait, les produits t_i, t_k (i, $k = 1, 2, 3$) sont donnés par ce Tableau-ci :

	t_1	t_2	t_3
t_1	t_1	t_2	t_3
t_2	t_2	0	0
t_3	t_3	0	gt_2

Le système n° **4** est équivalent à celui que définit le Tableau de multiplication ci-dessous. Dans ce dernier système, le corps R ne

	e_0	e_1	e_2
	e_1	0	0
	e_2	0	e_1

possède pas non plus de domaine holoïde maximal. Ils sont tous deux isomorphes au système de nombres tricomplexes $a + bi' + c\omega'$, où les coordonnées a, b, c sont réelles quelconques et i', ω' des symboles obéissant aux relations

$$(17) \qquad i'^2 = \omega', \qquad \omega'^2 = 0, \qquad i'\omega' = \omega' i' = 0.$$

Système n° 5. — Les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau suivant. — Dans ce système, c'est encore l'unité relative e_0 qui est l'unité principale, en sorte qu'on peut poser $e_0 = 1$. Les lois fondamentales de l'algèbre ordinaire n'y sont valables qu'à deux exceptions près :

1° La multiplication *n'est pas commutative* en général, par exemple $e_1 e_2 = - e_2 e_1$;

2° Un produit peut être nul sans qu'aucun des facteurs ne le soit, par exemple $(3e_0 + 3e_1 - 15e_2)(e_0 - e_1 + 5e_2) = 0$.

	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	e_2
e_1	e_1	e_0	e_2
e_2	e_2	$-e_2$	0

Dans le corps R *des complexes rationnels, le domaine holoïde le plus général a pour base*

$$t_1 = e_0,$$
$$t_2 = \alpha e_2,$$
$$t_3 = \frac{g}{2} e_0 + \beta e_2 + \frac{g}{2} e_1,$$

où g représente un nombre entier non nul, α un nombre rationnel non nul d'ailleurs quelconque et β un nombre commensurable arbitrairement choisi. Ce corps R contient donc une infinité triple de domaines holoïdes, correspondant aux diverses valeurs que peuvent prendre g, α, β. On démontre que, *parmi eux, aucun n'est maximal.* En conséquence, la définition du nombre complexe « entier » dans ce corps R reste arbitraire.

Remarquons que ce système n° 5 est isomorphe au système des nombres tricomplexes $a + bj' + c\omega$, où les coordonnées a, b, c sont réelles quelconques et j', ω des symboles obéissant aux relations

$$j'^2 = 1, \qquad \omega^2 = 0, \qquad j'\omega = -\omega j' = \omega. \tag{18}$$

Le système n° 5 est équivalent à celui que définit le Tableau de multiplication suivant. Dans ce dernier système, à multiplication non commutative, le corps R contient aussi une infinité de domaines holoïdes dont aucun n'est maximal. Il est d'ailleurs isomorphe au système des nombres tricomplexes $a + bj + c\omega'$, où les coordonnées a, b, c sont réelles et j, ω' des symboles ou unités relatives satisfaisant aux égalités

$$(19) \qquad j^2 = j, \qquad \omega'^2 = 0, \qquad j\omega' = \omega', \qquad \omega' j = 0.$$

	e_0	e_1	e_2
	e_1	0	0
	e_2	e_1	e_2

On vérifie que la multiplication des termes de la base ci-dessus entre eux est résumée par ce Tableau :

	t_1	t_2	t_3
t_1	t_1	t_2	t_3
t_2	t_2	0	0
t_3	t_3	gt_2	gt_3

Système n° 6. — Les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau ci-dessous. L'unité relative e_0 est en même temps l'unité

	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	e_2
e_1	e_1	0	0
e_2	e_2	0	0

principale du système; elle y joue le rôle du nombre 1. Les lois fondamentales de l'algèbre ordinaire y sont valables, à la seule exception près qu'un produit peut être nul sans qu'aucun des facteurs ne le soit; ainsi, $(\alpha e_1 + \beta e_2)(\gamma e_1 + \delta e_2) = 0$ quels que soient les nombres réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Dans le corps R *constitué par l'ensemble des complexes rationnels, le domaine holoïde le plus général a pour base*

$$t_1 = e_0,$$
$$t_2 = \alpha e_1,$$
$$t_3 = \beta e_1 + \gamma e_2,$$

où α et γ représentent deux nombres rationnels non nuls d'ailleurs quelconques, et β un nombre rationnel arbitraire.

Ce corps R contient donc une infinité triple de domaines holoïdes, correspondant aux diverses valeurs de α, β, γ. Or, *aucun d'eux n'est maximal.* Il s'ensuit que, dans ce corps R, la définition du complexe entier reste arbitraire.

On vérifie que la multiplication des termes t_i de la base ci-dessus, quels que soient α, β, γ, est résumée par le Tableau que voici :

	t_1	t_2	t_3
t_1	t_1	t_2	t_3
t_2	t_2	0	0
t_3	t_3	0	0

Remarquons que le système n° 6 est isomorphe au système des nombres tricomplexes $a + b\omega + c\omega'$, où les coordonnées a, b, c sont des nombres réels, et ω, ω' des symboles (ou unités relatives) définies par les égalités

$$(20) \qquad \omega^2 = 0, \qquad \omega'^2 = 0, \qquad \omega\omega' = \omega'\omega = 0.$$

En résumé, parmi les six formes à trois unités relatives, il n'y en a que deux où la définition du nombre hypercomplexe « entier » soit univoque et absolue. Dans les quatre autres formes, cette définition est empreinte d'arbitraire, et il en résulte une arithnomie non régulière.